SERIE

SCHAUM

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

FRANK AYRES, JR.

TEORIA Y
1.175
PROBLEMAS RESUELTOS

schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill

McGraw Hill

SERIE DE COMPENDIOS SCHAUM

TEORIA Y PROBLEMAS

DE

CALCULO

diferencial e integral

FRANK AYRES, JR., Ph. D.

Formerly Professor and Head,
Department of Mathematics
Dickinson College

•

TRADUCCIÓN Y ADAPTACIÓN

LUIS GUTIÉRREZ DÍEZ

Ingeniero de Armamento

ANGEL GUTIÉRREZ VÁZQUEZ

Ingeniero de Armamento
Licenciado en Ciencias Físicas
Diplomado en Ingeniería Nuclear

McGRAW-HILL

MADRID • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • GUATEMALA • LISBOA • MÉXICO
NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • JOHANNESBURGO • LONDRES • MONTREAL
NUEVA DELHI • PARÍS • SAN FRANCISCO • SINGAPUR
ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

DERECHOS RESERVADOS © 1971, respecto a la primera edición en español por LIBROS McGRAW-HILL DE MEXICO, S. A. DE C. V.
Atlacomulco 499-501, Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 465

ISBN 968-451-182-5

ISBN 0-07-091520-2

Traducido de la segunda edición en inglés de

CALCULUS

Copyright © MCMLXVII, by McGraw-Hill, Book Co., U.S.A.

ISBN 0-07-002653-X

ISBN: 84-85-240-21-9
Depósito legal: M. 43944-1988

De esta edición se imprimieron 3.000 ejemplares en enero de 1989.

Impresión: Artes Gráficas EMA, S. A. Miguel Yuste, 27. 28037 Madrid

PRINTED IN SPAIN - IMPRESO EN ESPAÑA

Prólogo

El propósito de este libro sigue siendo, como en la primera edición (en inglés), proporcionar a los alumnos que inician sus estudios de cálculo una serie de problemas representativos, resueltos con todo detalle. Por sus características será asimismo de gran utilidad para los estudiantes de ciencias e ingeniería que necesiten consultar o repasar conceptos fundamentales de la teoría y encontrar el modo de resolver ciertos problemas, relacionados con alguna aplicación práctica. Por otra parte, al figurar en esta edición demostraciones de los teoremas y deducciones de las fórmulas de derivación e integración, junto con una amplia relación de problemas resueltos y propuestos, también se puede utilizar como libro de texto para desarrollar un curso de cálculo.

La disposición del libro es, en líneas generales, análoga a la de la edición anterior. Cada capítulo comienza por establecer las definiciones, principios y teoremas de los temas a tratar en él. Los ejemplos ilustrativos y los problemas resueltos que figuran a continuación se han seleccionado no solo con el objeto de ampliar o completar la teoría, sino también con el de que el alumno adquiera práctica en la formulación y resolución de problemas; para que éste pueda aplicar repetidamente los principios fundamentales y para que la enseñanza sea verdaderamente eficaz; para prevenirle ante las dificultades con que normalmente se tropieza el principiante y, finalmente, para mostrar el amplio campo en el que el cálculo tiene aplicación. En la explicación de los problemas resueltos se incluyen numerosas demostraciones de teoremas y se razonan, detalladamente, los resultados. Para sacar el máximo partido de este libro, bien se utilice como texto suplementario, bien como texto propiamente dicho, es necesario estudiar detenidamente los problemas resueltos. En cada uno de ellos hay algo que aprender y lo más práctico será que el alumno los vuelva a resolver él solo, justificando los sucesivos pasos o etapas de los mismos. De esta forma no se encontrarán grandes dificultades para resolver la mayor parte de los problemas propuestos.

El aumento de, aproximadamente, un cincuenta por ciento, que ha experimentado el contenido de esta edición se debe, solo en parte, a las adiciones reseñadas anteriormente. Otras innovaciones que merece la pena destacar son el estudio más completo del concepto de límite, de la continuidad de funciones y de las series infinitas, así como la introducción más extensa que se ha dado a los vectores en el plano y en el espacio.

Con objeto de que la parte en que se exponen las aplicaciones más elementales de la integración, como son el cálculo de áreas, volúmenes, etc., se pueda estudiar en orden de capítulos diferente al que aquí aparece, estos han sido expuestos de forma que en su mayor parte se puedan asimilar, una vez estudiados los seis primeros. Así, quienes utilicen este texto como libro de consulta o suplemento, encontrarán pocas dificultades para acomodarlo a sus necesidades.

El autor quiere aprovechar la oportunidad de poder expresar su gratitud a la Schaum Publishing Company por su magnífica cooperación.

FRANK AYRES, JR.

TABLA DE MATERIAS

Capítulo 1

Variables y funciones

EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES está formado por el de los números racionales (enteros positivos y negativos, cero y los fraccionarios de la forma a/b siendo a y b números enteros) y el de los números irracionales (de infinitas cifras decimales, como por ejemplo $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ y $\pi = 3{,}14159\ldots$ que no se pueden expresar como una relación entre enteros).

El álgebra de los números complejos no juegan aquí papel alguno y como no puede haber confusión siempre que se hable de un número, se sobrentenderá que se trata de un número *real*.

EL VALOR ABSOLUTO O NUMERICO ($|N|$) de un número (real) N se define por:

$$|N| = N \text{ si } N \text{ es cero o un número positivo,}$$
$$|N| = -N \text{ si } N \text{ es un número negativo.}$$

Por ejemplo,

$$|3| = |-3| = 3, \quad |3 - 5| = |5 - 3| = 2,$$
$$|x - a| = x - a \text{ si } x \geqslant a \quad \text{y} \quad |x - a| = a - x \text{ si } x < a.$$

En general, si a y b son dos números cualesquiera,

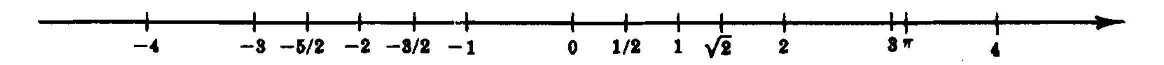
$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$$

$$|a \pm b| = |b \pm a|; \quad |ab| = |a| \cdot |b|; \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a}{b}\right|, \quad b \neq 0;$$

$$|a + b| \geqslant |a| - |b|; \quad |a - b| \leqslant |a| + |b|;$$
$$|a + b| \leqslant |a| + |b|; \quad |a - b| \geqslant |a| - |b|.$$

UNA ESCALA NUMERICA es una representación gráfica de los números reales por medio de los puntos de una recta. A cada número le corresponde un solo punto de la recta y recíprocamente. Por tanto, los vocablos número y punto (en una escala numérica) se pueden utilizar indistintamente.

Para establecer una escala numérica sobre una recta hay que efectuar las siguientes operaciones: (i) tomar un punto cualquiera de ella como *origen* (asignándole el 0), (ii) elegir un sentido positivo (se indica por medio de una flecha) y (iii) con una unidad de medida adecuada situar el punto $+1$ a una distancia del 0 igual a dicha unidad. Los números (puntos) N y $-N$ están a ambos lados de 0 y a $|N|$ unidades de él.



Si a y b son dos números diferentes, $a < b$ significa que a está situado a la izquierda de b en la escala, mientras que $a > b$ quiere decir que a está a la derecha de b.

El segmento dirigido de a a b viene representado por $b - a$, siendo negativo si $a > b$ y positivo si $a < b$. En cualquiera de estos casos, b está a una distancia de a igual a $|b - a| = |a - b|$.

INTERVALOS FINITOS. Sean a y b dos números tales que $a < b$. El conjunto de todos los números x comprendidos entre a y b recibe el nombre de *intervalo abierto* de a a b y se escribe $a < x < b$. Los puntos a y b reciben el nombre de *extremos* del intervalo. Un intervalo abierto no contiene a sus extremos.

El intervalo abierto $a < x < b$ junto con sus extremos a y b recibe el nombre de *intervalo cerrado* de a a b y se escribe $a \leq x \leq b$.



INTERVALOS INFINITOS. Sea a un número cualquiera. El conjunto de todos los números x tales que $x < a$ recibe el nombre de *intervalo infinito*. Otros intervalos infinitos son los definidos por $x \leq a$, $x > a$ y $x \geq a$.

(Ver Problemas 1-2.)

CONSTANTE Y VARIABLE. En la definición del intervalo $a < x < b$:

(i) cada uno de los símbolos a y b representan un solo número que se denomina una *constante*.

(ii) el símbolo x representa un número cualquiera del conjunto de números y se denomina *variable*.

El campo de variación de una variable es otra característica del conjunto de números que ella representa. Por ejemplo:

(1) si x es un libro de un conjunto formado por diez volúmenes, el campo de variación de x es el conjunto formado por los números enteros 1, 2, 3, . . ., 10.

(2) Si x es un día del mes de julio, su campo de variación estará formado por el conjunto de números 1, 2, 3, . . ., 31.

(3) Si x es la cantidad de agua (en litros) que se puede sacar de un depósito lleno de diez litros, su campo de variación es el intervalo $0 \leq x \leq 10$.

LAS DESIGUALDADES, como por ejemplo $2x - 3 > 0$ y $x^2 - 5x - 24 \leq 0$, también definen intervalos sobre una escala numérica.

Ejemplo 1: Resolver la desigualdad (*a*) $2x - 3 > 0$, (*b*) $x^2 - 5x - 24 \leq 0$.

(*a*) Se resuelve $2x - 3 = 0$ y se obtiene $x = 3/2$; consideramos los intervalos $x < 3/2$ y $x > 3/2$. Para un valor cualquiera de x del intervalo $x < 3/2$, tal como $x = 0$, se verifica $2x - 3 < 0$; para un valor cualquiera de x del intervalo $x > 3/2$ tal como $x = 3$, se verifica $2x - 3 > 0$. Por tanto, $2x - 3 > 0$ para todo valor de x perteneciente al intervalo $x > 3/2$.

(*b*) Se resuelve $x^2 - 5x - 24 = (x + 3)(x - 8) = 0$ y se obtiene $x = -3$ y $x = 8$; consideremos los intervalos $x < -3$, $-3 < x < 8$, $x > 8$. Ahora bien $x^2 - 5x - 24 > 0$ para todos los valores de x pertenecientes a los intervalos $x < -3$ y $x > 8$. Por otra parte $x^2 - 5x - 24 < 0$ para los valores del intervalo $-3 < x < 8$. Por tanto, $x^2 - 5x - 24 \leq 0$ en el intervalo $-3 \leq x \leq 8$.

(Ver Problema 3.)

FUNCION DE UNA VARIABLE. Se dice que una variable y es *función* de otra x, cuando ambas están relacionadas de forma que para cada valor de x perteneciente a su campo de variación le corresponde *un* valor de y. La variable y, cuyo valor depende del que tome x, recibe el nombre de *variable dependiente*, mientras que x es una *variable independiente*. La relación que liga a la función con la variable puede ser una tabla de valores en correspondencia (por ej., una tabla de logaritmos), una gráfica o una ecuación.

Ejemplo 2:

La ecuación $x^2 - y = 10$, siendo x la variable independiente, asigna un valor a y para cada valor que se dé a x. La función definida es $y = x^2 - 10$. La misma ecuación, tomando a y como variable independiente, hace corresponder dos valores de x con cada uno de los que se den a y. Por tanto, se pueden definir dos funciones de y: $x = \sqrt{10+y}$ y $x = -\sqrt{10+y}$.

Algunos autores definen a y como función de x, cuando a cada valor de x, perteneciente a su campo de variación, le corresponde uno o más valores de y. Así, pues, en el Ejemplo 2, y es una función *uniforme* de x, mientras que x es una función *multiforme* de y. Sin embargo, en el Cálculo, es conveniente descomponer las funciones multiformes en dos o más funciones uniformes.

Por ello, la definición que hemos dado de función lleva implícita esta propiedad de uniformidad.

El símbolo $f(x)$ se lee «función de x» o bien f de x, pero nunca «f veces x». Si en un mismo problema intervienen otras funciones de x se emplearán letras diferentes para denominarlas: $g(x)$, $h(x)$, $F(x)$, $\theta(x)$, . . .

Para poder estudiar una función $y = f(x)$ se necesita siempre conocer el campo de variación de la variable independiente, que también recibe el nombre de *dominio de definición* de la función.

Ejemplo 3:

(*a*) La función $f(x) = 18x - 3x^2$ está definida para todo valor de x; es decir, que siempre que x sea un número real, $18x - 3x^2$ también lo es. Por consiguiente el campo de variación de x o dominio de definición de la función está formado por el conjunto de los números reales.

(*b*) Si el área de un rectángulo determinado viene dada por $y = 18x - 3x^2$, siendo x uno de sus lados, tanto x como $18x - 3x^2$ deben ser positivos. De la figura adjunta o bien del Problema 3 (*a*) se deduce que el dominio de definición es el intervalo $0 < x < 6$.

(*c*) El dominio de definición de la función $y = x^2 - 10$ del Ejemplo 2 es el conjunto de los números reales. En las funciones $x = \sqrt{10+y}$ y $x = -\sqrt{10+y}$ es necesario que $10 + y \geq 0$; por tanto, el dominio de definición de cada una de ellas es $y \geq -10$.

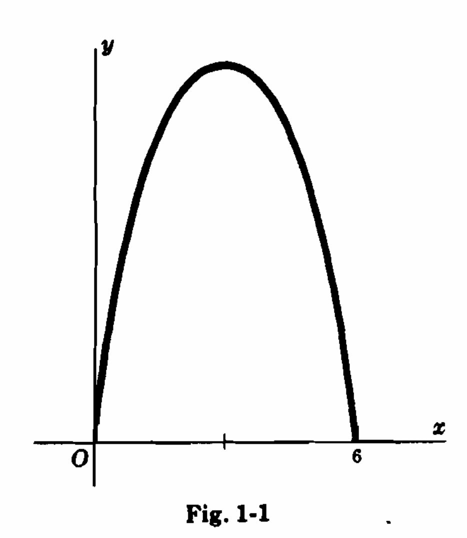


Fig. 1-1

Se dice que una función $f(x)$ está definida *en* un intervalo, cuando lo está en un punto *cualquiera* de dicho intervalo.

Si $f(x)$ es una función de x y a es un valor de su dominio de definición, la expresión $f(a)$ significa el valor numérico obtenido al sustituir x por a en $f(x)$ o sea el valor que toma $f(x)$ cuando $x = a$.

Ejemplo 4: Si $f(x) = x^3 - 4x + 2$, tendremos

$$f(1) = (1)^3 - 4(1) + 2 = 1 - 4 + 2 = -1,$$
$$f(-2) = (-2)^3 - 4(-2) + 2 = -8 + 8 + 2 = 2,$$
$$f(a) = a^3 - 4a + 2, \text{ etc.}$$

(Ver Problemas 4-13.)

UNA SUCESION INFINITA es una función de una variable (representada normalmente por n) cuyo campo de variación está formado por el conjunto de los números enteros positivos. Por ejemplo, cuando n va tomando los valores 1, 2, 3, 4, . . ., la función $\frac{1}{n+1}$ da lugar a la sucesión de términos $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ La sucesión se denomina *infinita* para indicar que no tiene último término.

El término $\frac{1}{n+1}$ de la sucesión anterior recibe el nombre de término *general* o *término enésimo*. Una sucesión se representa por su término general encerrado entre llaves $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ o bien indicando algunos de los términos que la componen, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n+1}, \ldots$ (Ver problemas 14-15).

Problemas resueltos

1. Enunciar y dibujar los intervalos: (*a*) $-3 < x < 5$, (*b*) $2 \leq x \leq 6$, (*c*) $-4 < x \leq 0$, (*d*) $x > 5$, (*e*) $x \leq 2$.

(*a*) Todos los números mayores que -3 y menores que 5.

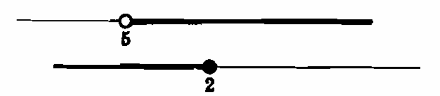
(*b*) Todos los números igual o mayor que 2 e igual o menor que 6.

(*c*) Todos los números mayores que -4 e igual o menor que 0.

Este intervalo finito que contiene a uno de sus extremos, recibe el nombre de intervalo *semiabierto*.

(*d*) Todos los números mayores que 5.

(*e*) Todos los números igual o menor que 2.

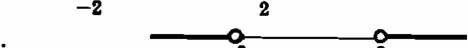


2. Enunciar y dibujar los intervalos:

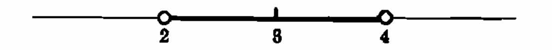
(*a*) $|x| < 2$; (*b*) $|x| > 3$; (*c*) $|x - 3| < 1$; (*d*) $|x - 2| < \delta$, $\delta > 0$; (*e*) $0 < |x + 3| < \delta$, $\delta > 0$.

(*a*) Intervalo abierto $-2 < x < 2$.

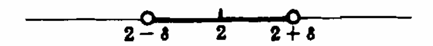
(*b*) Dos intervalos infinitos: $x < -3$ y $x > 3$.



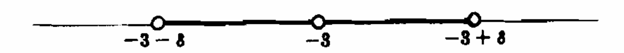
(*c*) Intervalo abierto que contiene al punto 3. Para hallar los extremos hacemos $x - 3 = 1$, con lo cual, $x = 4$ y $3 - x = 1$, de donde $x = 2$. (Hay que tener en cuenta que $|x - 3| = x - 3$ ó $3 - x$ según el valor de x.) Los extremos son 2 y 4 y el intervalo es el $2 < x < 4$. Obsérvese que el intervalo está formado por todos los puntos cuya distancia a 3 sea menor que 1.



(*d*) Siendo δ un número positivo dado, el intervalo $2 - \delta < x < 2 + \delta$ está formado por todos los puntos cuya distancia a 2 sea menor que δ. Este intervalo es un *entorno* del punto 2.



(*e*) La desigualdad $|x + 3| < \delta$ define el intervalo $-3 - \delta < x < -3 + \delta$ que contiene al punto -3. La condición $0 < |x + 3|$ implica que $x \neq -3$. Por tanto, el campo de variación de x está formado por los dos intervalos abiertos $-3 - \delta < x < -3$ y $-3 < x < -3 + \delta$. Los dos intervalos constituyen el *entorno reducido* del punto -3.



3. Resolver las desigualdades: (*a*) $18x - 3x^2 > 0$, (*b*) $(x + 3)(x - 2)(x - 4) < 0$, (*c*) $(x + 1)^2(x - 3) > 0$.

(*a*) De la igualdad $18x - 3x^2 = 3x(6 - x) = 0$, se deduce, $x = 0$ y $x = 6$; a continuación, se determina el signo de $18x - 3x^2$ para los valores de x pertenecientes a los intervalos $x < 0$, $0 < x < 6$ y $x > 6$. La desigualdad se verifica para los valores de x comprendidos en el intervalo $0 < x < 6$.

(*b*) Una vez determinado el signo de $(x + 3)(x - 2)(x - 4)$ en cada uno de los intervalos $x < -3$, $-3 < x < 2$, $2 < x < 4$ y $x > 4$, se llega a la conclusión de que la desigualdad se satisface para todos los valores de x de los intervalos $x < -3$ y $2 < x < 4$.

(*c*) Los intervalos que se deben estudiar son $x < -1$, $-1 < x < 3$ y $x > 3$. La desigualdad se cumple para $x > 3$. Obsérvese que como $(x + 1)^2 > 0$ para todos los valores de x, no es preciso tenerlo en cuenta. ¿Se podría decir lo mismo del factor $(x + 1)^3$?

4. Dada $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 2}$, hallar $f(0), f(-1), f(2a), f(1/x), f(x + h)$.

$$f(0) = \frac{0 - 1}{0 + 2} = -\frac{1}{2}, \quad f(-1) = \frac{-1 - 1}{1 + 2} = -\frac{2}{3}, \quad f(2a) = \frac{2a - 1}{4a^2 + 2},$$

$$f(1/x) = \frac{1/x - 1}{1/x^2 + 2} = \frac{x - x^2}{1 + 2x^2}, \quad f(x + h) = \frac{x + h - 1}{(x + h)^2 + 2} = \frac{x + h - 1}{x^2 + 2hx + h^2 + 2}$$

5. Si $f(x) = 2^x$, demostrar que (*a*) $f(x + 3) - f(x - 1) = \dfrac{15}{2} f(x)$ y (*b*) $\dfrac{f(x + 3)}{f(x - 1)} = f(4)$.

(*a*) $f(x + 3) - f(x - 1) = 2^{x+3} - 2^{x-1} = 2^x(2^3 - \frac{1}{2}) = \dfrac{15}{2} f(x)$ (*b*) $\dfrac{f(x + 3)}{(x - 1)} = \dfrac{2^{x+3}}{2^{x-1}} = 2^4 = f(4)$.

6. Si $f(x) = \log_a 1/x$, demostrar que (*a*) $f(a^3) = -3$ y (*b*) $f(a^{-1/z}) = 1/z$.

(*a*) $f(a^3) = \log_a 1/a^3 = \log_a a^{-3} = -3$ (*b*) $f(a^{-1/z}) = \log_a 1/a^{-1/z} = \log_a a^{1/z} = 1/z$.

7. Si $f(x) = \log_a x$ y $F(z) = a^z$, demostrar que $F(f(x)) = f(F(x))$.

$F(f(x)) = F(\log_a x) = a^{\log_a x} = x = \log_a a^x = f(a^x) = f(F(x))$.

8. Determinar el campo de variación de la variable independiente x en las funciones siguientes:

(*a*) $y = \sqrt{4 - x^2}$, (*b*) $y = \sqrt{x^2 - 16}$, (*c*) $y = \dfrac{1}{x - 2}$, (*d*) $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$, (*e*) $y = \dfrac{x}{x^2 + 4}$.

(*a*) Como y debe ser real, $4 - x^2 \geq 0$, o sea, $x^2 \leq 4$; el campo de variación de x es el intervalo $-2 \leq x \leq 2$ o bien $|x| \leq 2$. Es decir, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ está *definida* en el intervalo $-2 \leq x \leq 2$ y solo en él.

(*b*) En este caso $x^2 - 16 \geq 0$ o bien $x^2 \geq 16$; el campo de variación de x está formado por los intervalos $x \leq -4$ y $x \geq 4$, o bien $|x| \geq 4$.

(*c*) La función está definida para todos los valores de x excepto para $x = 2$. El campo de variación de x se puede expresar por $x < 2$, $x > 2$ o por $x \neq 2$.

(*d*) La función está definida para $x \neq \pm 3$.

(*e*) Como $x^2 + 4 \neq 0$ para todo valor de x, el campo de variación de x es el conjunto de los números reales.

9. Representar gráficamente las funciones definidas por:

$f(x) = 5$ cuando $0 < x \leq 1$ $\quad$ $f(x) = 10$ cuando $1 < x \leq 2$
$f(x) = 15$ cuando $2 < x \leq 3$ $\quad$ $f(x) = 20$ cuando $3 < x \leq 4$ $\quad$ etc.

Determinar los campos de variación de x y de $y = f(x)$.

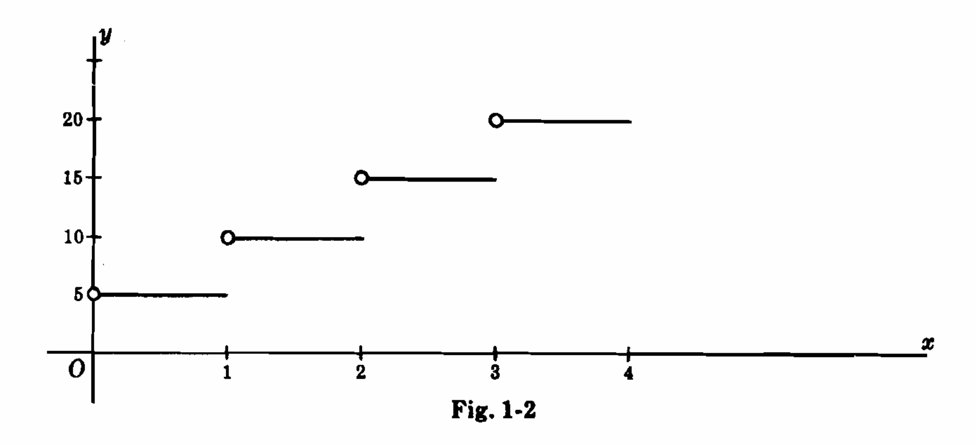


Fig. 1-2

La función $f(x)$ representa el coste (en unidades arbitrarias) de la franquicia de correos por el interior para el envío de un peso x (en unidades arbitrarias). El campo de variación de x es el intervalo $x > 0$ y el de $y = f(x)$, es el conjunto formado por los números 5, 10, 15, 20, ...

10. Para proteger un terreno rectangular se precisaron 2 000 m de alambrada. Si una de las dimensiones es x m, expresar el área, y (m²), en función de x. Determinar el campo de variación de x.

Como una de las dimensiones es x, la otra será $\frac{1}{2}(2\,000 - 2x) = 1\,000 - x$.

El área es $y = x(1\,000 - x)$ y el campo de variación de x es $0 < x < 1\,000$.

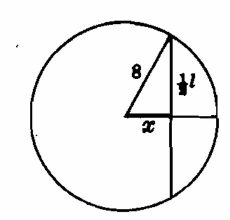
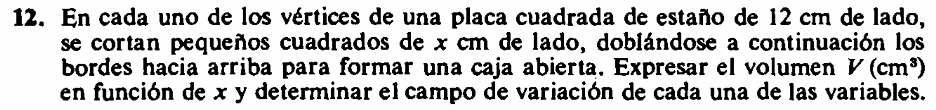


Fig. 1-3

11. Expresar la longitud l de una cuerda de una circunferencia de 8 cm de radio en función de su distancia x cm al centro de la misma. Determinar el campo de variación de x.

De la Fig. 1-3 se deduce, $\frac{1}{2}l = \sqrt{64 - x^2}$ y $l = 2\sqrt{64 - x^2}$.

El campo de variación de x es el intervalo $0 \leq x < 8$.



12. En cada uno de los vértices de una placa cuadrada de estaño de 12 cm de lado, se cortan pequeños cuadrados de x cm de lado, doblándose a continuación los bordes hacia arriba para formar una caja abierta. Expresar el volumen V (cm³) en función de x y determinar el campo de variación de cada una de las variables.

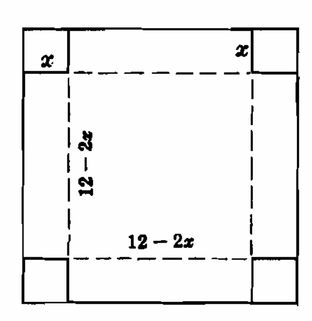


Fig. 1-4

La base de la caja es un cuadrado de $(12 - 2x)$ cm de lado y su altura es de x cm. El volumen, $V = x(12 - 2x)^2 = 4x(6 - x)^2$. El campo de variación de x es el intervalo $0 < x < 6$.

A medida que aumenta x, dentro de su campo de variación, también lo hace V hasta un determinado valor para luego disminuir. Así pues, de todas las cajas que se pueden construir hay una, M, de volumen máximo. Para determinar M es preciso conocer el valor de x para el cual V comienza a disminuir. Este problema se resolverá en un capítulo posterior.

13. Si $f(x) = x^2 + 2x$, hallar $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ e interpretar el resultado.

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{[(a+h)^2 + 2(a+h)] - (a^2 + 2a)}{h}$$
$$= 2a + 2 + h$$

Sobre el gráfico de la función (Fig. 1-5) situamos los puntos P y Q cuyas abscisas respectivas son a y $(a + h)$. La ordenada de P es $f(a)$ y la de Q es $f(a + h)$. Por tanto,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\text{diferencia de ordenadas}}{\text{diferencia de abscisas}}$$
$$= \text{pendiente de } PQ$$

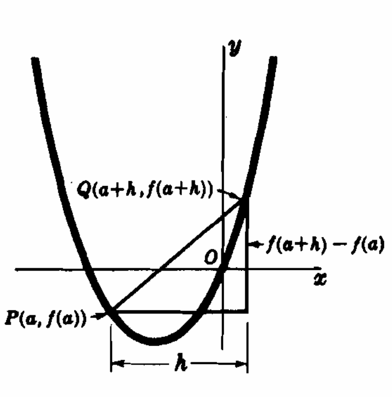


Fig. 1-5

14. Escribir los cinco primeros términos de cada una de las siguientes sucesiones:

(*a*) $\left\{1 - \dfrac{1}{2n}\right\}$. Tendremos $s_n = 1 - \dfrac{1}{2n}$; por tanto $s_1 = 1 - \dfrac{1}{2\cdot 1} = \dfrac{1}{2}$,

$$s_2 = 1 - \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{3}{4},\quad s_3 = 1 - \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{5}{6},\quad s_4 = 1 - \frac{1}{2\cdot 4} = \frac{7}{8},$$

y $s_5 = 9/10$. Los términos pedidos son 1/2, 3/4, 5/6, 7/8, 9/10.

(*b*) $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{1}{3n-1}\right\}$. Tendremos $s_n = (-1)^2\dfrac{1}{3\cdot 1 - 1} = 1/2$,

$$s_2 = (-1)^3\frac{1}{3\cdot 2 - 1} = -1/5,\quad s_3 = (-1)^4\frac{1}{3\cdot 3 - 1} = 1/8,$$

$s_4 = -1/11$, $s_5 = 1/14$. Los términos pedidos son 1/2, —1/5, 1/8, —1/11, 1/14.

(*c*) $\left\{\dfrac{2n}{1+n^2}\right\}$. Los términos son 1, 4/5, 3/5, 8/17, 5/13.

(*d*) $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n}{(n+1)(n+2)}\right\}$. Los términos son $\dfrac{1}{2\cdot 3}, \dfrac{-2}{3\cdot 4}, \dfrac{3}{4\cdot 5}, \dfrac{-4}{5\cdot 6}, \dfrac{5}{6\cdot 7}$.

(*e*) $\{\frac{1}{2}[(-1)^n + 1]\}$. Los términos son 0, 1, 0, 1, 0.

15. Escribir el término general de cada una de las siguientes sucesiones:

(*a*) 1, —1/3, 1/5, 1/7, 1/9, . . .

Los términos son los recíprocos de los números impares positivos. El término general es $\dfrac{1}{2n-1}$.

(*b*) 1, —1/2, 1/3, —1/4, 1/5, . . .

Prescindiendo del signo, se trata de los recíprocos de los enteros positivos. El término general es

$$(-1)^{n+1}\frac{1}{n} \text{ o } (-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

(*c*) 1, 1/4, 1/9, 1/16, 1/25, ...

Los términos son los recíprocos de los cuadrados de los enteros positivos. El término general es $1/n^2$.

(*d*) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}, \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}, \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}, \ldots.$ El término general es $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n)}$.

(*e*) 1/2, —4/9, 9/28, —16/65, ...

Sin tener en cuenta el signo, los numeradores son los cuadrados de los enteros positivos, y los denominadores son los cubos de dichos enteros incrementados en una unidad. El término general es $(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{n^3+1}$.

16. Demostrar que si a y b son dos números cualesquiera, $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Consideremos los siguientes casos: (*a*) a y b ambos positivos, (*b*) a y b ambos negativos, (*c*) a y b uno positivo y otro negativo.

(*a*) Como $|a| = a$, $|b| = b$, y $a + b$ es cero o un número positivo, tendremos

$$|a + b| = a + b = |a| + |b|$$

(*b*) Como $|a| = -a$, $|b| = -b$, y $a + b$ es negativo, tendremos

$$|a + b| = -(a + b) = -a + (-b) = |a| + |b|$$

(*c*) Supongamos $a > 0$ y $b < 0$; entonces $|a| = a$ y $|b| = -b$.

Si $|a| > |b|$, entonces $|a + b| = a + b < a - b = |a| + |b|$.
Si $|a| < |b|$, entonces $|a + b| = -a - b < a - b = |a| + |b|$.
Si $|a| = |b|$, entonces $|a + b| = 0 < |a| + |b|$.

Por tanto, si $a > 0$ y $b < 0$ o si $a < 0$ y $b > 0$, entonces $|a + b| < |a| + |b|$.

Problemas propuestos

17. Representar cada uno de los intervalos siguientes:

(*a*) $-5 < x < 0$ (*c*) $-2 \leqslant x < 3$ (*e*) $|x| < 3$ (*g*) $|x - 2| < \frac{1}{2}$ (*i*) $0 < |x - 2| < 1$ (*k*) $|x - 2| \geqslant 1$
(*b*) $x \leqslant 0$ (*d*) $x \geqslant 1$ (*f*) $|x| \geqslant 5$ (*h*) $|x + 3| > 1$ (*j*) $0 < |x + 3| < \frac{1}{4}$

18. Si $f(x) = x^2 - 4x + 6$, hallar (*a*) $f(0)$, (*b*) $f(3)$, (*c*) $f(-2)$. *Sol.* (*a*) 6, (*b*) 3, (*c*) 18
Probar que $f(\frac{1}{2}) = f(7/2)$ y $f(2 - h) = f(2 + h)$.

19. Si $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, hallar (*a*) $f(0)$, (*b*) $f(1)$, (*c*) $f(-2)$. *Sol.* (*a*) -1, (*b*) 0, (*c*) 3

Probar que $f(1/x) = -f(x)$ y $f(-1/x) = -1/f(x)$.

20. Si $f(x) = x^2 - x$, demostrar que $f(x + 1) = f(-x)$.

21. Si $f(x) = 1/x$, demostrar que $f(a) - f(b) = f\left(\dfrac{ab}{b-a}\right)$.

22. Si $y = f(x) = (5x + 3)/(4x - 5)$, demostrar que $x = f(y)$.

23. Determinar el dominio de definición de cada una de las funciones siguientes:

(*a*) $y = x^2 + 4$ (*c*) $y = \sqrt{x^2 - 4}$ (*e*) $y = \dfrac{2x}{(x-2)(x+1)}$ (*g*) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

(*b*) $y = \sqrt{x^2 + 4}$ (*d*) $y = \dfrac{x}{x+3}$ (*f*) $y = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$ (*h*) $y = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$.

Sol. (*a*), (*b*), (*g*) todos los valores de x; (*c*) $|x| \geqslant 2$; (*d*) $x \neq -3$; (*e*) $x \neq -1, 2$; (*f*) $-3 < x < 3$; (*h*) $0 \leqslant x < 2$

24. Hallar $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$, siendo: (*a*) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ para $a \neq 2$, $a + h \neq 2$; (*b*) $f(x) = \sqrt{x - 4}$ para $a \geqslant 4$, $a + h \geqslant 4$; (*c*) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ para $a \neq -1$, $a + h \neq -1$.

Sol. (*a*) $\dfrac{-1}{(a-2)(a+h-2)}$, (*b*) $\dfrac{1}{\sqrt{a+h-4} + \sqrt{a-4}}$, (*c*) $\dfrac{1}{(a+1)(a+h+1)}$

25. Escribir los cinco primeros términos de cada una de las sucesiones.

(*a*) $\left\{1 + \dfrac{1}{n}\right\}$ (*c*) $\{a + (n-1)d\}$ (*e*) $\left\{\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}\right\}$ (*g*) $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n!}{n^n}\right\}$

(*b*) $\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}\right\}$ (*d*) $\{(-1)^{n+1} ar^{n-1}\}$ (*f*) $\left\{\dfrac{\sqrt{n+1}}{n}\right\}$ (*h*) $\left\{\dfrac{(2n)!}{3^n 5^{n-1}}\right\}$

Sol. (*a*) 2, 3/2, 4/3, 5/4, 6/5
(*b*) 1/2, 1/6, 1/12, 1/20, 1/30
(*c*) a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$, $a + 4d$
(*d*) a, $-ar$, ar^2, $-ar^3$, ar^4
(*e*) $1/\sqrt{2}$, $2/\sqrt{5}$, $3/\sqrt{10}$, $4/\sqrt{17}$, $5/\sqrt{26}$
(*f*) $\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, 2/3, $\frac{1}{4}\sqrt{5}$, $\sqrt{6}/5$
(*g*) 1, $-1/2$, 2/9, $-3/32$, 24/625
(*h*) $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{2^3}{3 \cdot 5}$, $\dfrac{2^4}{3 \cdot 5}$, $\dfrac{7 \cdot 2^7}{3^2 \cdot 5^2}$, $\dfrac{7 \cdot 2^8}{3 \cdot 5^2}$

26. Escribir el término general de cada una de las sucesiones.

(*a*) 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, . . .
(*b*) 1/2, —1/6, 1/12, —1/20, 1/30, . . .
(*c*) 1/2, 1/12, 1/30, 1/56, 1/90, . . .
(*d*) $1/5^3$, $3/5^5$, $5/5^7$, $7/5^9$, $9/5^{11}$, . . .
(*e*) 1/2 !, —1/4 !, 1/6 !, —1/8 !, 1/10 !, . . .

Sol. (*a*) $\dfrac{n}{n+1}$, (*b*) $(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2 + n}$, (*c*) $\dfrac{1}{(2n-1)2n}$, (*d*) $\dfrac{2n-1}{5^{2n+1}}$, (*e*) $(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n)!}$

27. «Siempre que $|x - 4| < 1$, $|f(x)| > 1$» significa: «siempre que x esté comprendido entre 3 y 5, $f(x)$ es menor que -1, o bien mayor que $+1$». Interpretar las siguientes expresiones:

(*a*) Siempre que $|x - 1| < 2$, $f(x) < 10$.
(*b*) Siempre que $|x - 5| < 2$, $f(x) > 0$.
(*c*) Siempre que $0 < |x - 6| < 1$, $f(x) > 0$.
(*d*) Siempre que $|x - 3| < 2$, $|f(x) - 9| < 4$.

28. Dibujar la función $y = f(x) = 6x - x^2$ y determinar cuál de las expresiones (*a*) — (*d*) del Problema 27 son verdaderas o falsas. *Sol.* (*b*) es falsa.

29. Demostrar que, siendo a y b dos números cualesquiera: $|a \pm b| = |b \pm a|$; $|ab| = |a| \cdot |b|$; $|a/b| = |a| / |b|$, $b \neq 0$; $|a + b| \geq |a| - |b|$; $|a - b| \leq |a| + |b|$; $|a - b| \geq |a| - |b|$.

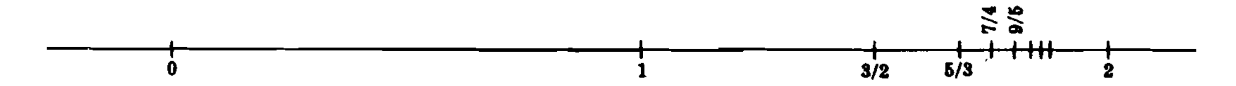
Capítulo 2

Límites

LIMITE DE UNA SUCESION. Si se sitúan sobre una escala numérica los puntos correspondientes a los términos de la sucesión

$$1,\ 3/2,\ 5/3,\ 7/4,\ 9/5,\ \ldots,\ 2 - 1/n,\ \ldots \qquad (1)$$

se observa que se van aproximando al punto 2 de manera que existen puntos de la sucesión cuya distancia a 2 es menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea. Por ejemplo, el pun-



to 2 001/1 001 y todos los siguientes distan de 2 una cantidad menor que 1/1 000; el punto 20 000 001/10 000 001 y todos los siguientes distan de 2 una cantidad menor que 1/10 000 000, y así sucesivamente. Estas condiciones se expresan diciendo que *el límite de la sucesión es* 2.

Si x es una variable cuyo campo de variación es la sucesión (*1*) se dice que x *se aproxima al límite* 2, o bien que x *tiende a* 2, y se representa por $x \to 2$.

La sucesión (*1*) no contiene a su límite 2. Sin embargo, la sucesión 1, 1/2, 1, 3/4, 1, 5/6, 1, . . ., en la que todos los términos impares son iguales a 1, tiene por límite 1. Por tanto, una sucesión puede o no contener a su propio límite. Sin embargo, como se verá más adelante, decir que $x \to a$ implica $x \neq a$, esto es, *se sobrentenderá que cualquier sucesión dada no contiene a su límite como término.*

LIMITE DE UNA FUNCION. Si $x \to 2$ según la sucesión (*1*), $f(x) = x^2 \to 4$ según la sucesión 1, 9/4, 25/9, 49/16, . . ., $(2 - 1/n)^2$, . . . Ahora bien, si $x \to 2$ según la sucesión

$$2{,}1;\ 2{,}01;\ 2{,}001;\ 2{,}0001;\ \ldots;\ 2 + 1/10^n;\ \ldots \qquad (2)$$

$x^2 \to 4$ según la sucesión 4,41; 4,0401; 4,004001; . . ., $(2 + 1/10^n)^2$; . . . Parece razonable esperar que x^2 tiende a 4 siempre que x tienda a 2. En estas condiciones se establece que «el límite de x^2 cuando x tiende a 2 es igual a 4», y se representa por el simbolismo $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

(Ver Problemas 1-2.)

LIMITES POR LA DERECHA Y POR LA IZQUIERDA. Cuando $x \to 2$ según la sucesión (*1*), cada término es siempre menor que 2. Se expresa diciendo que x *tiende a* 2 *por la izquierda,* y se representa por $x \to 2^-$. Análogamente, cuando $x \to 2$ según la sucesión (*2*), cada término es siempre mayor que 2. Se expresa diciendo que x *tiende a* 2 *por la derecha* y se representa por $x \to 2^+$. Es evidente que la existencia del $\lim_{x \to a} f(x)$ implica la del *límite por la izquierda* $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y la del *límite por la derecha* $\lim_{x \to a^+} f(x)$, y que ambos son iguales. Sin embargo, la existencia del límite por la derecha (izquierda) no implica necesariamente la existencia del límite por la izquierda (derecha).

Ejemplo 1:

Sea la función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$. El dominio de definición es el intervalo $-3 \leq x \leq 3$. Si a es un número cualquiera del intervalo abierto $-3 < x < 3$, $\lim_{x \to a} \sqrt{9 - x^2}$ existe y es igual a $\sqrt{9 - a^2}$. Considérese ahora que $a = 3$. Si x tiende a 3 por la izquierda, $\lim_{x \to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = 0$, y si x tiende a 3 por la derecha, $\lim_{x \to 3^+} \sqrt{9 - x^2}$ no existe, puesto que para $x > 3$, $\sqrt{9 - x^2}$ es un número imaginario. Por tanto, no existe $\lim_{x \to 3} \sqrt{9 - x^2}$.

Análogamente, $\lim_{x \to -3^+} \sqrt{9 - x^2}$ existe y es igual a 0; sin embargo, no existen ni $\lim_{x \to -3^-} \sqrt{9 - x^2}$ ni $\lim_{x \to -3} \sqrt{9 - x^2}$.

TEOREMAS SOBRE LIMITES.

I. Si $f(x) = c$, constante, tendremos $\lim_{x \to a} f(x) = c$.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = A$ y $\lim_{x \to a} g(x) = B$, resulta:

II. $\lim_{x \to a} k \cdot f(x) = kA$, siendo k una constante.

III. $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = A \pm B.$

IV. $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = A \cdot B.$

V. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$, siempre que $B \neq 0$.

VI. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}$, siempre que $\sqrt[n]{A}$ sea un número real.

INFINITO. Sea el campo de variación de la variable x la sucesión $s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots, s_n, \ldots$ En estas condiciones se establece:

(i) *x tiende a más infinito* $[x \to +\infty]$ si a partir de un determinado término, éste y todos los que le siguen, son mayores que cualquier número positivo dado, por grande que éste sea. Por ejemplo, $x \to +\infty$ en la sucesión $1, 2, 3, 4, \ldots$

(ii) *x tiende a menos infinito* $[x \to -\infty]$ si a partir de un determinado término, éste y todos los que le siguen son menores que cualquier número negativo dado, por pequeño que éste sea. Por ejemplo, $x \to -\infty$ en la sucesión $-2, -4, -6, -8, \ldots$

(iii) *x tiende a infinito* $[x \to \infty]$ si $|x| \to +\infty$, esto es, $x \to +\infty$, o bien, $x \to -\infty$.

Se dice que una función $f(x)$ *tiende a más infinito* cuando $x \to a$, $\left[\lim_{x \to a} f(x) = +\infty\right]$, si cuando x se aproxima a a (sin tomar el valor a), $f(x)$ se mantiene, a partir de un determinado término en adelante, superior a un número positivo dado, por grande que éste sea.

Se dice que una función $f(x)$ *tiende a menos infinito* cuando $x \to a$, $\left[\lim_{x \to a} f(x) = -\infty\right]$, si cuando x se aproxima a a (sin tomar el valor a), $f(x)$ se mantiene, a partir de un determinado término en adelante, inferior a un número negativo dado, por pequeño que éste sea.

Se dice que una función $f(x)$ *tiende a infinito* cuando $x \to a$, $\left[\lim_{x \to a} f(x) = \infty\right]$, si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

Ejemplo 2:

(*a*) Cuando $x \to 2$ según la sucesión (*1*), $f(x) = \dfrac{1}{2-x} \to +\infty$ según la sucesión 1, 2, 3, 4, · · · En general, si $x \to 2^-$, $\dfrac{1}{2-x} \to +\infty$ y se escribe, $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{2-x} = +\infty$.

(*b*) Cuando $x \to 2$ según la sucesión (*2*), $f(x) = \dfrac{1}{2-x} \to -\infty$ según la sucesión $-10, -100, -1\,000, -10\,000, \cdots$ En general, si $x \to 2^+$, $\dfrac{1}{2-x} \to -\infty$ y se escribe $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{2-x} = -\infty$.

(*c*) Cuando $x \to 2$ según (*1*) y (*2*), $|f(x)| = \left|\dfrac{1}{2-x}\right| \to +\infty$ y se escribe $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2} = \infty$.

Nota. Los símbolos $+\infty$, $-\infty$, ∞ *no* deben considerarse como nuevos números a añadir al conjunto de los números reales, sino que se utilizan para indicar un cierto comportamiento de una variable o de una función. Cuando una variable o el valor de una función aumenta constantemente sin llegar a alcanzar nunca un determinado valor M el límite de dicha variable o función será M o un número inferior a él. Cuando no existe tal número M, se dice que la variable o función tiende a infinito. En este último caso *no existe límite*; la designación de límite se sigue empleando solo por conveniencia.

(Ver Problemas 3-12.)

LA DEFINICION $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ se ha establecido estudiando el comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to a$ según varias sucesiones. En todos los casos se dedujo que $f(x) \to A$, por lo que se puede pensar que a este mismo resultado se habría llegado (sin comprobar) para todas las sucesiones que tengan por límite a. Ahora bien, cuando $x \to a$ según cada una de las sucesiones quiere decir que el valor de x se aproxima a a. La noción fundamental del concepto de límite es la de que siempre que x se aproxime a a, sin llegar nunca a alcanzar este valor, $f(x)$ se aproxima a A. Este hecho se puede establecer en términos más precisos, en la forma siguiente:

A. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ si dado un número positivo ϵ tan pequeño como se quiera, existe otro número positivo δ tal que cuando $0 < |x - a| < \delta$ se verifica $|f(x) - A| < \epsilon$.

Estas dos desigualdades establecen los intervalos:

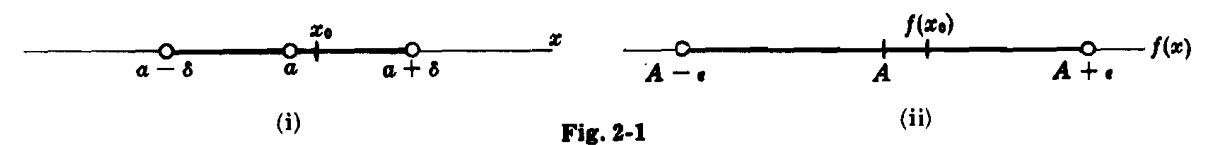


Fig. 2-1

De aquí resulta otra forma de establecer la esencia del concepto de límite: fijado el número ϵ [con lo cual queda definido el intervalo (ii)], se puede encontrar un número δ [y determinar el intervalo (i),] de forma que, siempre que $x \neq a$ en el intervalo (i), por ejemplo x_0, $f(x)$ esté contenido en el intervalo (ii).

Ejemplo 3:

Utilizando la definición de límite, demostrar que $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 + 3x) = 10$.

Elegido un valor de ϵ, se debe encontrar un $\delta > 0$ de forma que, siempre que $0 < |x - 2| < \delta$, se verifique, $|(x^2 + 3x) - 10| < \epsilon$. Observemos que si $0 < |x - 2| < \lambda < 1$, también se verificará $|x - 2|^n < \lambda$ para cualquier valor positivo de n. Por tanto,

$$|(x^2 + 3x) - 10| = |(x-2)^2 + 7(x-2)| \leqslant |x-2|^2 + 7\,|x-2| < \lambda + 7\lambda = 8\lambda$$

Ahora bien, para que $8\lambda < \epsilon$ basta con que $\lambda < \epsilon/8$. Por consiguiente, dado el número ϵ, se puede encontrar un δ, menor que $\epsilon/8$, que satisface la condición de límite.

(Ver Problemas 13-14.)

OTROS TIPOS DE LIMITES.

B. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ si dado un número positivo M, *tan grande como se quiera*, existe otro δ tal que, para $0 < |x - a| < \delta$ se verifica $|f(x)| > M$.

Cuando $f(x) > M$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$; si $f(x) < -M$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

C. $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ si dado un número positivo ϵ, *tan pequeño como se quiera*, existe un número positivo M tal que, para $|x| > M$, se verifica $|f(x) - A| < \epsilon$.

D. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ si dado un número positivo M, *tan grande como se quiera*, existe un número positivo P tal que, para $|x| > P$, se verifica $|f(x)| > M$.

(Ver Problema 15.)

Cuando existen los límites, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} g(x)$, son válidos todos los teoremas de este capítulo. Sin embargo, estos teoremas no se pueden aplicar cuando $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ o cuando $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Por ejemplo, $\lim_{x\to 1} \frac{x}{1-x} = \infty$ y $\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x^2} = \infty$, pero $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{1-x}\Big/\frac{1}{1-x^2}\right) = \lim_{x\to 1} x(1+x) = 2$. Igualmente, $\lim_{x\to+\infty} (x^2+5) = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} (2-x^2) = -\infty$ pero $\lim_{x\to+\infty} \{(x^2+5)+(2-x^2)\} = \lim_{x\to+\infty} 7 = 7$.

Problemas resueltos

1. Calcular el límite de las sucesiones siguientes:

(*a*) 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ...
(*b*) 1, 1/4, 1/9, 1/16, 1/25, ...
(*c*) 2, 5/2, 8/3, 11/4, 14/5, ...
(*d*) 5, 4, 11/3, 7/2, 17/5, ...
(*e*) 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32,...
(*f*) 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; 0,99999;...

(*a*) El término general es $1/n$. A medida que n toma los valores 1, 2, 3, 4 ..., va disminuyendo $1/n$ pero conservándose siempre positivo. El límite es 0.
(*b*) El término general es $(1/n)^2$; el límite es 0.
(*c*) El término general es $3 - 1/n$; el límite es 3.
(*d*) El término general es $3 + 2/n$; el límite es 3.
(*e*) El término general es $1/2^n$; como en (*a*), el límite es 0.
(*f*) El término general es $1 - 1/10^n$; el límite es 1.

2. Calcular el límite de $y = x + 2$, siendo x los términos de cada una de las sucesiones del Problema 1.

(*a*) $y \to 2$ según la sucesión 3, 5/2, 7/3, 9/4, 11/5, ..., $2 + 1/n$, ...
(*b*) $y \to 2$ según la sucesión 3, 9/4, 19/9, 33/16, 51/25, ..., $2 + 1/n^2$, ...
(*c*) $y \to 5$ según la sucesión 4, 9/2, 14/3, 19/4, 24/5, ..., $5 - 1/n$, ...
(*d*) $y \to 5$ según la sucesión 7, 6, 17/3, 11/2, 27/5, ..., $5 + 2/n$, ...
(*e*) $y \to 2$ según la sucesión 5/2, 9/4, 17/8, 33/16, 65/32, ..., $2 + 1/2^n$, ...
(*f*) $y \to 3$ según la sucesión 2,9; 2,99; 2,999; 2,9999; ...; $3 - \frac{1}{10^n}$; ...

3. Calcular:

(*a*) $\lim_{x\to 2} 5x = 5 \lim_{x\to 2} x = 5\cdot 2 = 10$

(*b*) $\lim_{x\to 2} (2x+3) = 2\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 3 = 2\cdot 2 + 3 = 7$

(*c*) $\lim_{x\to 2} (x^2 - 4x + 1) = 4 - 8 + 1 = -3$

(*d*) $\lim_{x\to 3} \frac{x-2}{x+2} = \frac{\lim_{x\to 3}(x-2)}{\lim_{x\to 3}(x+2)} = \frac{1}{5}$

(*e*) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x^2+4} = \frac{4-4}{4+4} = 0$

(*f*) $\lim_{x\to 4} \sqrt{25-x^2} = \sqrt{\lim_{x\to 4}(25-x^2)} = \sqrt{9} = 3$

Nota. Del resultado de estos problemas no se debe sacar la conclusión de que $\lim_{x\to a} f(x)$ es invariablemente $f(a)$. El término $f(a)$ significa el valor de $f(x)$ *cuando* $x = a$, y, se ha visto en el primer párrafo del Capítulo, que cuando $x \to a$, la variable x *nunca llega a ser* igual a a.

4. Hallar el límite de $f(x) = (-1)^x$ siendo x los términos de las sucesiones

(*a*) 1/3, 1/5, 1/7, 1/9, ... y (*b*) 2/3, 2/5, 2/7, 2/9, ...

¿Qué se puede decir acerca de $\lim_{x\to 0} (-1)^x$ y $f(0)$?

(*a*) $(-1)^x \to -1$ en la sucesión $-1, -1, -1, -1, \ldots$
(*b*) $(-1)^x \to +1$ en la sucesión $+1, +1, +1, +1, \ldots$

Como $(-1)^x$ tiende hacia límites distintos cuando x toma los valores de las dos sucesiones, $\lim_{x\to 0} (-1)^x$ no existe; $f(0) = (-1)^0 = +1$.

5. Hallar:

(*a*) $$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x+3)(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{7}$$

La división por $(x-4)$, antes del paso al límite, es válida, porque como se ha dicho, cuando $x \to 4$ es $x \neq 4$; por tanto, $x - 4$ nunca es igual a cero.

(*b*) $$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2+3x+9}{x+3} = \frac{9}{2}$$

(*c*) $$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x$$

Aquí, y también en los Problemas 7 y 8, h es una variable y, por ello, se podría pensar en una función de dos variables. Sin embargo, el que x sea una variable no juega papel alguno en estos problemas, de forma que se puede considerar a x como una constante, es decir, un valor particular de su campo de variación. El fundamento de este problema, como se verá en el Capítulo 4, es que si x es un valor cualquiera, como por ejemplo $x = x_0$, en el dominio de $y = x^2$, se verifica

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} \quad \text{es siempre igual al doble del valor de } x.$$

(*d*) $$\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})} = \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2}$$
$$= \lim_{x\to 2} (3+\sqrt{x^2+5}) = 6$$

(*e*) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1} = \infty \text{; no existe límite.}$$

6. Hallar los siguientes límites, dividiendo el numerador y denominador por la potencia mayor de x en la fracción, teniendo en cuenta luego que $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$.

(*a*) $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{9x+7} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-2/x}{9+7/x} = \frac{3-0}{9+0} = \frac{1}{3}$$

(*b*) $$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^2+2x+1}{6x^2-3x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{6+2/x+1/x^2}{6-3/x+4/x^2} = \frac{6+0+0}{6-0+0} = 1$$

(*c*) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-2}{4x^3-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x+1/x^2-2/x^3}{4-1/x^3} = \frac{0}{4} = 0$$

(*d*) $$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1/x+1/x^3} = \infty \text{; no existe límite.}$$

7. Dada $f(x) = x^2 - 3x$, hallar $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Como $f(x) = x^2 - 3x$, $f(x+h) = (x+h)^2 - 3(x+h)$ y

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x^2+2hx+h^2-3x-3h)-(x^2-3x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx+h^2-3h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (2x+h-3) = 2x - 3$$

8. Dada $f(x) = \sqrt{5x+1}$, hallar $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para $x > -1/5$.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5x+5h+1} - \sqrt{5x+1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5x+5h+1} - \sqrt{5x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1}}{\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(5x+5h+1)-(5x+1)}{h(\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{5}{\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1}} = \frac{5}{2\sqrt{5x+1}}
\end{aligned}$$

9. En las funciones siguientes, determinar los puntos $x = a$ para los cuales se anula el denominador, y calcular el límite de y cuándo $x \to a^-$ y $x \to a^+$.

(*a*) $y = f(x) = 2/x$. El denominador es cero para $x = 0$. Cuando $x \to 0^-$, $y \to -\infty$; cuando $x \to 0^+$, $y \to +\infty$.

(*b*) $y = f(x) = \dfrac{x-1}{(x+3)(x-2)}$. El denominador es cero para $x = -3$ y $x = 2$. Cuando $x \to -3^-$, $y \to -\infty$; cuando $x \to -3^+$, $y \to +\infty$. Cuando $x \to 2^-$, $y \to -\infty$; cuando $x \to 2^+$, $y \to +\infty$.

(*c*) $y = f(x) = \dfrac{x-3}{(x+2)(x-1)}$. El denominador es cero para $x = -2$ y $x = 1$. Cuando $x \to -2^-$, $y \to -\infty$; cuando $x \to -2^+$, $y \to +\infty$. Cuando $x \to 1^-$, $y \to +\infty$; cuando $x \to 1^+$, $y \to -\infty$.

(*d*) $y = f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-3)^2}$. El denominador es cero para $x = 3$. Cuando $x \to 3^-$, $y \to +\infty$; cuando $x \to 3^+$, $y \to +\infty$.

(*e*) $y = f(x) = \dfrac{(x+2)(1-x)}{x-3}$. El denominador es cero para $x = 3$. Cuando $x \to 3^-$, $y \to +\infty$; cuando $x \to 3^+$, $y \to +\infty$. (mal)

10. Estudiar (*a*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{3+2^{1/x}}$, (*b*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}}$.

(*a*) Sea $x \to 0^-$; entonces $1/x \to -\infty$, $2^{1/x} \to 0$, y $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{3+2^{1/x}} = 1/3$.

Sea $x \to 0^+$; entonces $1/x \to +\infty$, $2^{1/x} \to +\infty$, y $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{3+2^{1/x}} = 0$.

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{3+2^{1/x}}$ no existe.

(*b*) Sea $x \to 0^-$; entonces $2^{1/x} \to 0$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}} = \dfrac{1}{3}$.

Sea $x \to 0^+$. Para $x \neq 0$, $\dfrac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}} = \dfrac{2^{-1/x}+1}{3\cdot 2^{-1/x}+1}$ y como $\lim\limits_{x\to 0^+} 2^{-1/x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2^{-1/x}+1}{3\cdot 2^{-1/x}+1} = 1$.

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}}$ no existe.

11. Estudiar el límite de cada una de las funciones del Problema 9 cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$.

(*a*) Cuando $|x|$ es grande, $|y|$ es pequeño.
Para $x = -1\,000$, $y < 0$; cuando $x \to -\infty$, $y \to 0^-$. Para $x = +1\,000$, $y > 0$; cuando $x \to +\infty$, $y \to 0^+$.

(*b*), (*c*) Igual que en (*a*).

(*d*) Cuando $|x|$ es grande, $|y|$ es aproximadamente 1.
Para $x = -1\,000$, $y < 1$; cuando $x \to -\infty$, $y \to 1^-$. Para $x = +1\,000$, $y > 1$; cuando $x \to +\infty$, $y \to 1^+$.

(*e*) Cuando $|x|$ es grande, $|y|$ es grande.
Para $x = -1\,000$, $y > 0$; cuando $x \to -\infty$, $y \to +\infty$. Para $x = +1\,000$, $y < 0$; cuando $x \to +\infty$, $y \to -\infty$.

12. Estudiar el límite de la función del Problema 9 del Capítulo 1 cuando $x \to a^-$ y cuando $x \to a^+$ siendo a un número cualquiera entero y positivo:

Consideremos $a = 2$. Si $x \to 2^-$ según la sucesión (*1*), $f(x) \to 10$ según la sucesión 5, 10, 10, 10, ...; si $x \to 2^+$ según la sucesión (*2*), $f(x) \to 15$. Por tanto, no existe $\lim_{x\to 2} f(x)$ ni tampoco $\lim_{x\to a} f(x)$.

13. Aplicando la definición de límite, probar que:

(*a*) $\lim_{x\to 1} (4x^3 + 3x^2 - 24x + 22) = 5$, (*b*) $\lim_{x\to -1} (-2x^3 + 9x + 4) = -3$

(*a*) Dado un ϵ, para $0 < |x - 1| < \lambda < 1$,

$$\begin{aligned} |(4x^3 + 3x^2 - 24x + 22) - 5| &= |4(x-1)^3 + 15x^2 - 36x + 21| = |4(x-1)^3 + 15(x-1)^2 - 6(x-1)| \\ &\leqslant 4|x-1|^3 + 15|x-1|^2 + 6|x-1| \\ &< 4\lambda + 15\lambda + 6\lambda = 25\lambda \end{aligned}$$

Para que $|(4x^3 + 3x^2 - 24x + 22) - 5| < \epsilon$, basta con que $\lambda < \epsilon/25$; por consiguiente, dado un ϵ existe un δ menor que $\epsilon/25$, que satisface la condición de límite.

(*b*) Dado un ϵ, para $0 < |x + 1| < \lambda < 1$,

$$\begin{aligned} |(-2x^3 + 9x + 4) + 3| &= |-2(x+1)^3 + 6(x+1)^2 + 3(x+1)| \\ &\leqslant 2|x+1|^3 + 6|x+1|^2 + 3|x+1| < 11\lambda \end{aligned}$$

por lo que, dado un ϵ, existe un δ, menor que $\epsilon/11$, que satisface la condición de límite.

14. Siendo $\lim_{x\to a} f(x) = A$ y $\lim_{x\to a} g(x) = B$, probar que

(*a*) $\lim_{x\to a} \{f(x) + g(x)\} = A + B$, (*b*) $\lim_{x\to a} \{f(x)\cdot g(x)\} = AB$, (*c*) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, $B \neq 0$

Como $\lim_{x\to a} f(x) = A$ y $\lim_{x\to a} g(x) = B$, de la definición de límite se deduce que dados los números $\epsilon_1 > 0$ y $\epsilon_2 > 0$, tan pequeños como se quiera, existen dos valores $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$, o tales que:

(i) para $0 < |x - a| < \delta_1$ es $|f(x) - A| < \epsilon_1$, y

(ii) para $0 < |x - a| < \delta_2$ es $|g(x) - B| < \epsilon_2$.

Si se elige un número λ menor que δ_1 y δ_2, se verificará

(iii) para $0 < |x - a| < \lambda$ que $|f(x) - A| < \epsilon_1$ y $|g(x) - B| < \epsilon_2$.

(*a*) Elegido un valor de ϵ, se necesita un $\delta > 0$ tal que para $0 < |x - a| < \delta$, se verifique $|\{f(x) + g(x)\} - \{A+B\}| < \epsilon$.

Ahora bien, $|\{f(x) + g(x)\} - \{A + B\}| = |\{f(x) - A\} + \{g(x) - B\}| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B|$. De (iii) $|f(x) - A| < \epsilon_1$ siempre que $0 < |x - a| < \lambda$ y $|g(x) - A| < \epsilon_2$ siempre que $0 < |x - a| < \lambda$, siendo λ menor que δ_1 y δ_2. Por tanto,

$$|\{f(x) + g(x)\} - \{A + B\}| < \epsilon_1 + \epsilon_2 \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \lambda$$

Tomando $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{1}{2}\epsilon$ y $\delta = \lambda$ se tiene,

$$|\{f(x) + g(x)\} - \{A + B\}| < \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon = \epsilon \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

(*b*) Elegido un ϵ, se debe encontrar un δ tal que

$$\text{siempre que } 0 < |x - a| < \delta \text{ se verifique } |f(x)\cdot g(x) - AB| < \epsilon$$

Ahora bien $|f(x)\cdot g(x) - AB| = |\{f(x) - A\}\cdot\{g(x) - B\} + B\{f(x) - A\} + A\{g(x) - B\}|$
$\leqslant |f(x) - A|\cdot|g(x) - B| + |B|\cdot|f(x) - A| + |A|\cdot|g(x) - B|$

Por tanto, de (iii), $|f(x)\cdot g(x) - AB| < \epsilon_1\epsilon_2 + |B|\,\epsilon_1 + |A|\,\epsilon_2$ siempre que $0 < |x - a| < \lambda$.

Tomando ϵ_1 y ϵ_2 de forma que $\epsilon_1\,\epsilon_2 < \frac{1}{3}\epsilon$, $\epsilon_1 < \dfrac{1}{3}\dfrac{\epsilon}{|B|}$ y $\epsilon_2 < \dfrac{1}{3}\dfrac{\epsilon}{|A|}$ se satisfagan simultáneamente y $\delta = \lambda$ se tiene,

$$|f(x)\cdot g(x) - AB| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

(*c*) Como $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$, como se ha visto en (*b*), hay que demostrar que $\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}, B \neq 0$.

Elegido un ϵ, se debe encontrar un δ tal que

$$\text{siempre que } 0 < |x - a| < \delta \text{ se verifique } \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| < \epsilon.$$

Ahora bien $\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \left| \frac{B - g(x)}{B \cdot g(x)} \right| = \frac{|g(x) - B|}{|B| \cdot |g(x)|} = \frac{|g(x) - B|}{|B|} \cdot \frac{1}{|g(x)|}$. De (ii),

$$|g(x) - B| < \epsilon_2 \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta_2$$

Como la función objeto de estudio es $\frac{1}{g(x)}$ hay que asegurarse de que δ_2 es suficientemente pequeño para que en el intervalo $a - \delta_2 < x < a + \delta_2$ no exista una raíz de $g(x) = 0$. Sea $\delta_3 \leq \delta_2$ un valor que satisfaga a esta condición, de forma que $|g(x) - B| < \epsilon_2$ y $|g(x)| > 0$ en $0 < |x - a| < \delta_3$. Ahora bien, si $|g(x)| > 0$ en este intervalo, se verificará $|g(x)| > b > 0$ y $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{b}$ en el mismo intervalo. Por tanto,

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| < \frac{\epsilon_2}{|B|} \cdot \frac{1}{b} \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta_3$$

Tomando $\epsilon_2 < \epsilon b\, |B|$ y $\delta = \delta_3$, se verificará $\frac{\epsilon_2}{|B| \cdot b} < \epsilon$ y en consecuencia,

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

15. Demostrar que: (*a*) $\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^3} = \infty$, (*b*) $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+1} = 1$, (*c*) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty$.

(*a*) Elegido un M, para todos los valores de x del intervalo $0 < |x - 2| < \delta$,

$$\left| \frac{1}{(x-2)^3} \right| > \frac{1}{\delta^3}. \quad \text{Por tanto} \quad \left| \frac{1}{(x-2)^3} \right| > M \text{ cuando } \frac{1}{\delta^3} > M \text{ o bien } \delta < \frac{1}{\sqrt[3]{M}}.$$

(*b*) Elegido un ϵ, para todos los valores de x tales que $|x| > M$, $\left| \frac{x}{x+1} - 1 \right| = \frac{1}{|x+1|} \leq \frac{1}{|x| - 1} < \frac{1}{M-1}$.

Por tanto $\left| \frac{x}{x+1} - 1 \right| < \epsilon$ cuando $\frac{1}{M-1} < \epsilon$ o $M > 1 + \frac{1}{\epsilon}$.

(*c*) Elegido un M suficientemente grande, para todos los valores de x tales que $|x| > P > 1$,

$$\left| \frac{x^2}{x-1} \right| \geq \frac{x^2}{|x|+1} > \frac{x^2}{2|x|} = \frac{1}{2}|x| > \frac{1}{2}P. \quad \text{Por tanto} \quad \left| \frac{x^2}{x-1} \right| > M \text{ cuando } P > 2M.$$

Problemas propuestos

16. Estudiar el límite de $y = 2x + 1$ cuando x toma los valores de los términos de las sucesiones del Problema 1.

Sol. (*a*) $y \to 1$, (*b*) $y \to 1$, (*c*) $y \to 7$, (*d*) $y \to 7$, (*e*) $y \to 1$, (*f*) $y \to 3$

17. Calcular:

(*a*) $\lim_{x \to 2} (x^2 - 4x)$ (*e*) $\lim_{x \to 2} \frac{x-1}{x^2-1}$ (*i*) $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$

(*b*) $\lim_{x \to -1} (x^3 + 2x^2 - 3x - 4)$ (*f*) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ (*j*) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}$

(*c*) $\lim_{x \to 1} \frac{(3x-1)^2}{(x+1)^3}$ (*g*) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$ (*k*) $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

(*d*) $\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$ (*h*) $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$ (*l*) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3} - 2}$

Sol. (*a*) -4; (*b*) 0; (*c*) $\frac{1}{2}$; (*d*) 0; (*e*) $\frac{1}{3}$; (*f*) -4; (*g*) $\frac{1}{2}$; (*h*) $\frac{1}{4}$; (*i*) 0; (*j*) ∞, no existe límite; (*k*) $3x^2$; (*l*) 2

18. Calcular:

(*a*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{4x-5}$ (*c*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+5}$ (*e*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+3}{x^2+5x+6}$ (*g*) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

(*b*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+1}{6+x-3x^2}$ (*d*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+5x+6}{x+1}$ (*f*) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

Sol. (*a*) $\frac{1}{2}$; (*b*) $-2/3$; (*c*) 0; (*d*) ∞, no existe límite; (*e*) 0; (*f*) 1; (*g*) -1

19. Hallar $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ para cada una de las funciones del Problema 24, Capítulo 1.

Sol. (*a*) $\dfrac{-1}{(a-2)^2}$, (*b*) $\dfrac{1}{2\sqrt{a-4}}$, (*c*) $\dfrac{1}{(a+1)^2}$

20. Estudiar el $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n}$, siendo $a_0b_0 \neq 0$ y m, n dos números positivos enteros, cuando (*a*) $m > n$, (*b*) $m = n$, (*c*) $m < n$. *Sol.* (*a*) no existe límite; (*b*) a_0/b_0; (*c*) 0

21. Hallar el límite de $f(x) = |x|$ cuando $x \to 0$.
Ind. Estudiar $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. *Sol.* $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$

22. Hallar el límite de $\begin{cases} f(x) = x, \ x > 0 \\ f(x) = x+1, \ x \leq 0 \end{cases}$ cuando $x \to 0$.
Sol. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe.

23. (*a*) Aplicando el Teorema IV y el método matemático de inducción completa, demostrar que

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n, \text{ siendo } n \text{ un número entero y positivo}$$

(*b*) Aplicando el Teorema III y el método de inducción completa, demostrar que

$$\lim_{x\to a} \{f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)\} = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x) + \ldots + \lim_{x\to a} f_n(x)$$

24. Aplicando el Teorema II y los resultados del Problema 23, demostrar que

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a), \text{ siendo } P(x) \text{ un polinomio en } x.$$

25. Siendo $f(x) = 5x - 6$, encontrar un $\delta > 0$ tal que siempre que $0 < |x-4| < \delta$ se verifique $|f(x) - 14| < \epsilon$, cuando (*a*) $\epsilon = \frac{1}{2}$, (*b*) $\epsilon = 0{,}001$. *Sol.* (*a*) 1/10, (*b*) 0,0002

26. Aplicando la definición de límite, demostrar que:

(*a*) $\lim\limits_{x\to 3} 5x = 15$, (*b*) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$, (*c*) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 - 3x + 5) = 3$.

27. Aplicando la definición de límite, demostrar que:

(*a*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$, (*b*) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x-1} = \infty$, (*c*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$, (*d*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = \infty$.

Sol. (*a*) $\delta < 1/M$, (*b*) $\delta < \dfrac{1}{M+1}$, (*c*) $M > 1 + \dfrac{1}{\epsilon}$, (*d*) $P > 2M$

28. Demostrar que si $f(x)$ está definido para todos los valores de x próximos a $x = a$ y tiene límite cuando $x \to a$, este límite es único.
Ind.: Suponer que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, siendo $B \neq A$. Elegir $\epsilon_1, \epsilon_2 < \frac{1}{2}|A - B|$ y determinar δ_1 y δ_2 para los dos límites. Tomando δ más pequeño que δ_1 y δ_2, se obtendrá $|A - B| = |\{A - f(x)\} + \{f(x) - B\}| < |A - B|$, lo cual es una contradicción.

29. Siendo $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ tales que (i) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todos los valores de x próximos a $x = a$, y (ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$, demostrar que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.
Ind.: Elegido un $\epsilon > 0$ tan pequeño como se quiera, existirá un $\delta > 0$ tal que, para $0 < |x - a| < \delta$, se verifique $|f(x) - A| < \epsilon$ y $|h(x) - A| < \epsilon$, o bien, $A - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < A + \epsilon$.

30. Demostrar que si $f(x) \leq M$ para todos los valores de x, y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, se verifica $A \leq M$.
Ind.: Supongamos $A > M$. Eligiendo $\epsilon = \frac{1}{2}(A - M)$, se llega a una contradicción.

Capítulo 3

Continuidad

UNA FUNCION $f(x)$ es continua en el punto $x = x_0$ si (i) está definida $f(x_0)$, (ii) existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$, (iii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Por ejemplo, $f(x) = x^2 + 1$ es continua en el punto $x = 2$ ya que $\lim_{x \to 2} f(x) = 5 = f(2)$. La condición (i) expresa que una función puede ser continua únicamente en puntos de su dominio de definición. Así, pues, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ no es continua en $x = 3$ puesto que $f(3)$ es imaginario y la función no está definida en este punto.

Se dice que una función es continua en un intervalo (abierto o cerrado), cuando es continua en todos sus puntos. Se dice que una función es continua, cuando lo es en todos los puntos de su dominio de definición. Así, pues, $f(x) = x^2 + 1$ y todos los polinomios en x son funciones continuas; otros ejemplos son e^x, sen x, cos x.

Si el dominio de definición de una función es un intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, la condición (ii) no se cumple en los extremos a y b. En estos casos se dice que la función es continua, cuando lo es en el intervalo abierto $a < x < b$ y además, $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$. Por ejemplo, $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, es una función continua (ver Ejemplo 1, Capítulo 2). Las funciones que se manejan normalmente en el cálculo elemental son continuas en sus dominios de definición excepto en algún punto aislado.

UNA FUNCION $f(x)$ se dice que es discontinua en el punto $x = x_0$ cuando no se cumple una o varias de las condiciones dichas de continuidad. A continuación, se presentan algunos ejemplos de discontinuidad:

(*a*) $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ es discontinua en el punto $x = 2$ porque

(i) $f(2)$ no está definido (se hace nulo el denominador)

(ii) no existe $\lim_{x \to 2} f(x)$ (es infinito).

La citada función es continua en todos los puntos salvo en el $x = 2$, en el que presenta una *discontinuidad infinita*. Ver Figura 3-1.

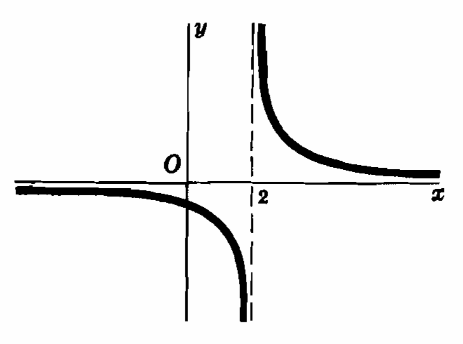


Fig. 3-1

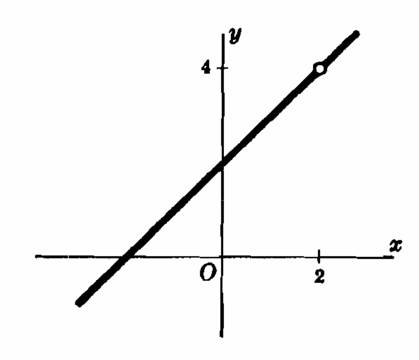


Fig. 3-2

(*b*) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ es discontinua en el punto $x = 2$ porque

(i) $f(2)$ no está definido (se anulan el numerador y el denominador)

(ii) $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$.

En este caso, la discontinuidad recibe el nombre de *evitable* ya que asignando a la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ el valor $f(2) = 4$ para $x = 2$, ya es continua. (Obsérvese que la discontinuidad que se presenta en (*a*) no se puede evitar puesto que allí no existe el límite.) Las curvas representativas de $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ y de $g(x) = x + 2$ son idénticas excepto en el punto $x = 2$, en el que la primera presenta un «hueco». Evitar la discontinuidad consiste simplemente en llenar de forma adecuada dicho «hueco».

(*c*) . $f(x) = \frac{x^3 - 27}{x - 3}$, $x \neq 3$; $f(3) = 9$ es discontinua en el punto $x = 3$ porque

$$\text{(i)}\ f(3) = 9, \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to 3} f(x) = 27, \qquad \text{(iii)}\ \lim_{x\to 3} f(x) \neq f(3)$$

La discontinuidad se puede evitar asignando a la función $f(x) = \frac{x^3 - 27}{x - 3}$ el valor $f(3) = 27$ para $x \neq 3$.

(*d*) La función del Problema 9, Capítulo 1, está definida para todo $x > 0$, pero presenta discontinuidades en los puntos $x = 1, 2, 3, \ldots$ (ver Problema 12, Capítulo 2) ya que $\lim_{x\to s^-} f(x) \neq \lim_{x\to s^+} f(x)$ (siendo s un número cualquiera entero y positivo).

La diferencia entre los valores de estos dos límites recibe el nombre de *salto de discontinuidad.*

(Ver Problemas 1-2.)

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS. Los teoremas sobre la continuidad de funciones se deducen rápidamente de los teoremas sobre límites del Capítulo 2. En particular, si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas para $x = a$, también lo son $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ y $f(x)/g(x)$ siempre que, en esta última, $g(a) \neq 0$. Es decir, mientras todos los polinomios de x son funciones continuas para todos los valores de la variable, las funciones racionales son continuas para todos los valores de x excepto en aquellos que anulan al denominador.

En álgebra se aplican algunas de las propiedades de las funciones continuas, como por ejemplo:

(*a*) En la curva representativa de una función polinómica $y = f(x)$, dos puntos cualesquiera de ella $[a, f(a)]$ y b, $[f(b)]$ están unidos por un arco continuo.

(*b*) Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, la curva de la función $y = f(x)$ corta al eje x por lo menos una vez, y la ecuación $f(x) = 0$ tiene, por lo menos, una raíz entre $x = a$ y $x = b$.

La propiedad de las funciones continuas que aplicamos aquí es:

I. Si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$, y si $f(a) \neq f(b)$, todo valor, c, comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ lo toma la función al menos para un valor de x del intervalo, como por ejemplo x_0, de forma que $f(x_0) = c$.

Las Figuras 3-3*a* y 3-3*b* ilustran las dos aplicaciones de esta propiedad, mientras que las 3-4*a* y 3-4*b* nos muestran cómo es esencial la continuidad en el intervalo.

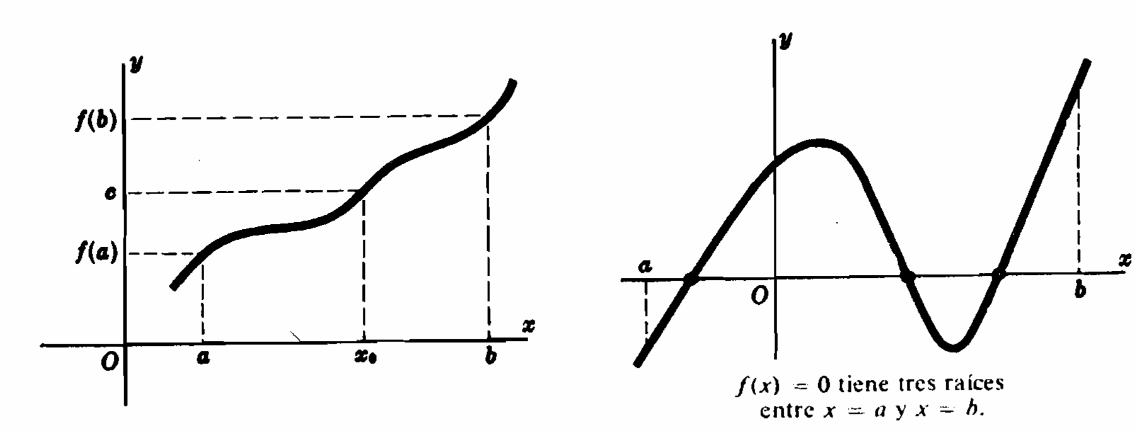


Fig. 3-3*a*

Fig. 3-3*b*

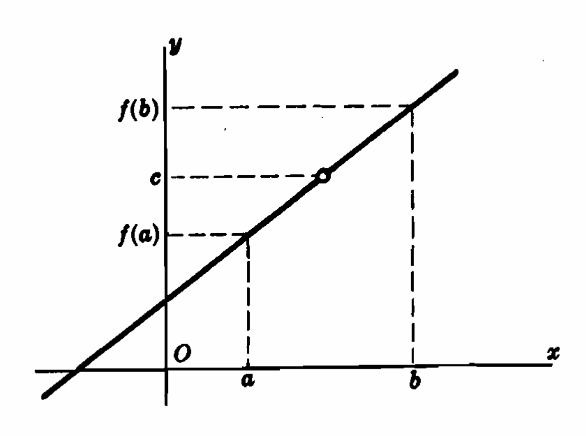


Fig. 3-4a

$f(x) = 0$ no tiene raíces entre $x = a$ y $x = b$.

Fig. 3-4b

Otras propiedades de las funciones continuas son:

II. Si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$, $f(x)$ toma un valor mínimo m y otro máximo M para dos puntos del intervalo.

Aun cuando la demostración de la Propiedad II se sale de los márgenes de este libro, sin embargo, se utilizará con plena libertad en capítulos posteriores. En las figuras siguientes se explica esta propiedad de un modo intuitivo. En la Fig. 3-5*a* la función es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$; la función toma el menor valor m y el mayor M en los puntos $x = c$ y $x = d$ respectivamente, que pertenecen al intervalo. En la Fig. 3-5*b* la función es continua en $a \leq x \leq b$; la función toma el menor valor en el extremo $x = a$ mientras que el mayor lo alcanza en el punto $x = c$ de dicho intervalo. En la Fig. 3-5*c* se representa una discontinuidad en el punto $x = c$, siendo $a < c < b$; el menor valor de la función corresponde a $x = a$ pero, en este caso, no existe valor máximo.

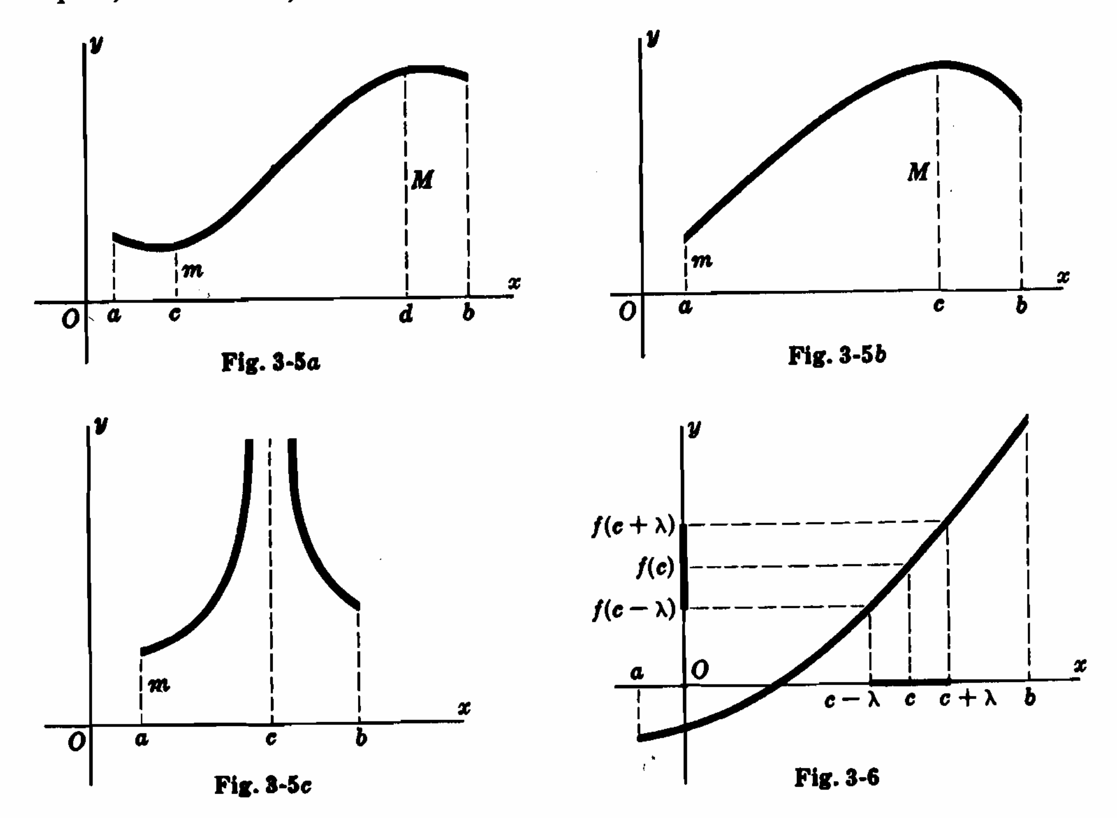


Fig. 3-5a

Fig. 3-5b

Fig. 3-5c

Fig. 3-6

III. Si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ y c un número cualquiera comprendido entre a y b, si $f(c) > 0$ existe un número $\lambda > 0$ tal que, para $c - \lambda < x < c + \lambda$, se verifica $f(x) > 0$.

Esta propiedad, cuya demostración puede verse en el Problema 4, está representada en la Figura 3-6.

Problemas resueltos

1. Del Problema 9, Capítulo 2, se deduce:

(*a*) $f(x) = 2/x$ tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$.

(*b*) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+3)(x-2)}$ tiene una discontinuidad infinita en $x = -3$ y $x = 2$.

(*c*) $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-3)^2}$ tiene una discontinuidad infinita en $x = 3$.

2. Del Problema 5, Capítulo 2, se deduce:

(*a*) $f(x) = \dfrac{x^3-27}{x^2-9}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 3$.

Presenta también una discontinuidad en $x = -3$.

(*b*) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$.

Tiene también una discontinuidad evitable en $x = -2$.

(*c*) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$ tiene una discontinuidad infinita en $x = 1$.

3. Demostrar que la existencia de $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ implica que $f(x)$ sea continua en $x = a$.

De la existencia del límite se deduce, $f(a+h) - f(a) \to 0$. Por tanto, $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$ y $f(x)$ es continua en el punto $x = a$.

4. Demostrar que si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ y c es un número cualquiera comprendido entre a y b, y si $f(c) > 0$, existe un número $\lambda > 0$ tal que, para $c - \lambda < x < c + \lambda$, se verifica $f(x) > 0$.

Como $f(x)$ es continua en el punto $x = c$, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ y dado un $\epsilon > 0$, existirá un $\delta > 0$ tal que

(i) siempre que $0 < |x - c| < \delta$ se verifica $|f(x) - f(c)| < \epsilon$.

Ahora bien, $f(x) > 0$ en todos los puntos del intervalo $c - \delta < x < c + \delta$ con lo cual, $f(x) \geq f(c)$. Para los demás puntos de dicho intervalo se verifica $f(x) < f(c)$, de forma que $|f(x) - f(c)| = f(c) - f(x) < \epsilon$ y $f(x) > f(c) - \epsilon$. Por consiguiente, en estos puntos, $f(x) > 0$ a menos que $\epsilon \geq f(c)$. Así pues, para determinar un intervalo que satisfaga las condiciones del teorema, se elige $\epsilon < f(c)$, con lo cual δ verificará (i) y se toma $\lambda < \delta$. Ver Problema 10 para la expresión del teorema correspondiente.

Problemas propuestos

5. Determinar los puntos de discontinuidad de las funciones del Problema 17 (*a*)-(*h*) del Capítulo 2.

Sol. (*a*), (*b*), (*d*) ninguno; (*c*) $x = -1$; (*e*) $x = \pm 1$; (*f*) $x = 2, 3$; (*g*) $x = -1, -3$; (*h*) $x = \pm 2$

6. Demostrar que $f(x) = |x|$ es continua.

7. Demostrar que $f(x) = \dfrac{1-2^{1/x}}{1+2^{1/x}}$ presenta un salto de discontinuidad en $x = 0$.

8. Demostrar que para $x = 0$ (*a*) $f(x) = \dfrac{1}{3^{1/x}+1}$ tiene un salto de discontinuidad y (*b*) $f(x) = \dfrac{x}{3^{1/x}+1}$ tiene una discontinuidad evitable.

9. En la Fig. 3-4 *a* se representa la función $f(x) = \dfrac{x^2-4x-21}{x-7}$; demostrar que si $a = 3$ y $b = 11$, es $c = 10$.

10. Demostrar que si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ y c es un número cualquiera comprendido entre a y b, si $f(c) < 0$ existe un número $\lambda > 0$ tal que, para $c - \lambda < x < c + \lambda$, se verifica $f(x) < 0$.

Capítulo 4

Derivada

INCREMENTOS. El incremento Δx de una variable x es el aumento o disminución que experimenta, desde un valor $x = x_0$ a otro $x = x_1$ de su campo de variación. Así, pues, $\Delta x = x_1 - x_0$, o bien $x_1 = x_0 + \Delta x$.

Si se da un incremento Δx a la variable x, (es decir si x pasa de $x = x_0$ a $x = x_0 + \Delta x$), la función $y = f(x)$ se verá incrementada en $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ a partir del valor $y = f(x_0)$. El cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{incremento de } y}{\text{incremento de } x}$$

recibe el nombre de cociente medio de incrementos de la función en el intervalo comprendido entre $x = x_0$ hasta $x = x_0 + \Delta x$.

Ejemplo 1:

Cuando x aumenta en $\Delta x = 0,5$ a partir de $x_0 = 1$, la función $y = f(x) = x^2 + 2x$ se incrementa en $\Delta y = f(1 + 0,5) - f(1) = 5,25 - 3 = 2,25$. Por tanto, el cociente de incremento de y, en el intervalo entre $x = 1$ y $x = 1,5$, es $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2,25}{0,5} = 4,5$.

(Ver Problemas 1-2.)

DERIVADA de una función $y = f(x)$ con respecto a x en un punto $x = x_0$ se define por el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

siempre que exista. Este límite se denomina también cociente instantáneo de incrementos (o simplemente cociente de incrementos) de y con respecto de x en el punto $x = x_0$.

Ejemplo 2:

Hallar la derivada de $y = f(x) = x^2 + 3x$ con respecto a x en un punto $x = x_0$. Como aplicación, calcular la derivada en los puntos: (*a*) $x_0 = 2$ y (*b*) $x_0 = -4$.

$$\begin{aligned}
y_0 &= f(x_0) = x_0^2 + 3x_0 \\
y_0 + \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x) \\
&= x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x_0 + 3\Delta x \\
\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2x_0\Delta x + 3\Delta x + (\Delta x)^2 \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 2x_0 + 3 + \Delta x
\end{aligned}$$

La derivada en el punto $x = x_0$ es

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + 3 + \Delta x) = 2x_0 + 3$$

(*a*) Para $x_0 = 2$, el valor de la derivada es $2 \cdot 2 + 3 = 7$.
(*b*) Para $x_0 = -4$, el valor de la derivada es $2(-4) + 3 = -5$.

EN EL CALCULO DE DERIVADAS se suele prescindir del subíndice 0 con lo que la derivada de $y = f(x)$ *con respecto a* x se escribe en la forma

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Véase la nota del Problema 5(*c*), Capítulo 2.

La derivada de $y = f(x)$ con respecto a x se puede representar por uno cualquiera de los símbolos

$$\frac{d}{dx} y,\ \frac{dy}{dx},\ D_x y,\ y',\ f'(x),\ \text{o}\ \frac{d}{dx} f(x)$$

(Ver Problemas 3-8.)

Problemas resueltos

1. Dada $y = f(x) = x^2 + 5x - 8$, hallar Δy e $\Delta y/\Delta x$ cuando x varía

(*a*) de $x_0 = 1$ a $x_1 = x_0 + \Delta x = 1{,}2$ y (*b*) de $x_0 = 1$ a $x_1 = 0{,}8$.

(*a*) $\Delta x = x_1 - x_0 = 1{,}2 - 1 = 0{,}2$

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1{,}2) - f(1) = -0{,}56 - (-2) = 1{,}44$ y $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1{,}44}{0{,}2} = 7{,}2$

(*b*) $\Delta x = 0{,}8 - 1 = -0{,}2$

$\Delta y = f(0{,}8) - f(1) = -3{,}36 - (-2) = -1{,}36$ y $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-1{,}36}{-0{,}2} = 6{,}8$

Geométricamente, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ en (*a*) es la pendiente de la recta que une los puntos (1, −2) y (1, 2, −0,56) de la parábola $y = x^2 + 5x - 8$, y en (*b*) es la pendiente de la recta que une los puntos (0,8, −3,36) y (1, −2) de la misma parábola.

2. La ecuación $s = 5t^2$ representa el espacio, s(m), recorrido por un cuerpo que cae libremente a partir del reposo. Calcular $\Delta s/\Delta t$ cuando t varía de t_0 a $t_0 + \Delta t$: Como aplicación, calcular $\Delta s/\Delta t$ cuando t varía: (*a*) de 3 a 3,5, (*b*) de 3 a 3,2 y (*c*) de 3 a 3,1.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{5(t_0 + \Delta t)^2 - 5t_0^2}{\Delta t} = \frac{10t_0 \cdot \Delta t + 5(\Delta t)^2}{\Delta t} = 10t_0 + 5\Delta t$$

(*a*) Aquí $t_0 = 3$, $\Delta t = 0{,}5$, y $\Delta s/\Delta t = 10(3) + 5(0{,}5) = 32{,}5$ m/s.

(*b*) Aquí $t_0 = 3$, $\Delta t = 0{,}2$, y $\Delta s/\Delta t = 10(3) + 5(0{,}2) = 31$ m/s.

(*c*) Aquí $t_0 = 3$, $\Delta t = 0{,}1$, y $\Delta s/\Delta t = 30{,}5$ m/s.

Como Δs es el desplazamiento del cuerpo desde el instante $t = t_0$ hasta $t = t_0 + \Delta t$,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \text{velocidad media del cuerpo en el intervalo de tiempo dado}$$

3. Hallar dy/dx, siendo $y = x^3 - x^2 - 4$. Hallar también dy/dx en el punto: (*a*) $x = 4$, (*b*) $x = 0$, (*c*) $x = -1$.

(1) $y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 - (x + \Delta x)^2 - 4$
$= x^3 + 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^2 - 2x(\Delta x) - (\Delta x)^2 - 4$

(2) $\Delta y = (3x^2 - 2x)\cdot\Delta x + (3x - 1)(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

(3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 - 2x + (3x - 1)\cdot\Delta x + (\Delta x)^2$

(4) $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \{3x^2 - 2x + (3x - 1)\cdot\Delta x + (\Delta x)^2\} = 3x^2 - 2x$

(*a*) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=4} = 3(4)^2 - 2(4) = 40$, (*b*) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 3(0)^2 - 2(0) = 0$, (*c*) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = 3(-1)^2 - 2(-1) = 5$

4. Hallar la derivada de $y = x^2 + 3x + 5$.

(1) $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) + 5 = x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2 + 3x + 3\Delta x + 5$

(2) $\Delta y = (2x + 3)\Delta x + \Delta x^2$

(3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(2x + 3)\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + 3 + \Delta x$

(4) $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} (2x + 3 + \Delta x) = 2x + 3$

5. Hallar la derivada de $y = \dfrac{1}{x - 2}$ en los puntos $x = 1$ y $x = 3$. Demostrar que la función no es derivable en el punto $x = 2$, en el que presenta una discontinuidad.

(1) $y + \Delta y = \dfrac{1}{x + \Delta x - 2}$

(2) $\Delta y = \dfrac{1}{x + \Delta x - 2} - \dfrac{1}{x - 2} = \dfrac{(x - 2) - (x + \Delta x - 2)}{(x - 2)(x + \Delta x - 2)} = \dfrac{-\Delta x}{(x - 2)(x + \Delta x - 2)}$

(3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-1}{(x - 2)(x + \Delta x - 2)}$

(4) $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{-1}{(x - 2)(x + \Delta x - 2)} = \dfrac{-1}{(x - 2)^2}$

Para $x = 1$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{(1 - 2)^2} = -1$, y para $x = 3$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{(3 - 2)^2} = -1$.

Para $x = 2$, $\dfrac{dy}{dx}$ no existe porque el denominador es cero.

6. Hallar la derivada de $f(x) = \dfrac{2x - 3}{3x + 4}$ y demostrar que la función no es derivable en el punto $x = -\frac{4}{3}$, en el que presenta una discontinuidad.

(1) $f(x + \Delta x) = \dfrac{2(x + \Delta x) - 3}{3(x + \Delta x) + 4}$

(2) $f(x + \Delta x) - f(x) = \dfrac{2x + 2\Delta x - 3}{3x + 3\Delta x + 4} - \dfrac{2x - 3}{3x + 4}$

$= \dfrac{(3x + 4)[(2x - 3) + 2\Delta x] - (2x - 3)[(3x + 4) + 3\Delta x]}{(3x + 4)(3x + 3\Delta x + 4)}$

$= \dfrac{(6x + 8 - 6x + 9)\Delta x}{(3x + 4)(3x + 3\Delta x + 4)} = \dfrac{17\Delta x}{(3x + 4)(3x + 3\Delta x + 4)}$

(3) $$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{17}{(3x+4)(3x+3\Delta x+4)}$$

(4) $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{17}{(3x+4)(3x+3\Delta x+4)} = \frac{17}{(3x+4)^2}$$

Para $x = -4/3$, la función no es derivable porque se anula el denominador. En general, *una función no es derivable en los puntos en que presenta una discontinuidad.*

7. Hallar la derivada de $y = \sqrt{2x+1}$.

(1) $$y + \Delta y = (2x + 2\Delta x + 1)^{1/2}$$

(2) $$\Delta y = (2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} - (2x+1)^{1/2}$$

$$= [(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} - (2x+1)^{1/2}]\,\frac{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}}{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}}$$

$$= \frac{(2x + 2\Delta x + 1) - (2x+1)}{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}} = \frac{2\Delta x}{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}}$$

(3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}}$$

(4) $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}} = \frac{1}{(2x+1)^{1/2}}$$

En la función $f(x) = \sqrt{2x+1}$, $\lim\limits_{x \to -1/2^+} f(x) = 0 = f(-\frac{1}{2})$ mientras que no existe $\lim\limits_{x \to -1/2^-} f(x)$; la función es *continua a la derecha* de $x = -\frac{1}{2}$. En el punto $x = -\frac{1}{2}$ la derivada es infinita.

8. Calcular la derivada de $f(x) = x^{1/3}$ y, como aplicación, estudiar $f'(0)$.

(1) $$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^{1/3}$$

(2) $$f(x+\Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^{1/3} - x^{1/3}$$

$$= \frac{[(x+\Delta x)^{1/3} - x^{1/3}][(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}]}{(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}}$$

$$= \frac{x + \Delta x - x}{(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}}$$

(3) $$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}}$$

(4) $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}} = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

La función no es derivable en el punto $x = 0$ porque el denominador es cero. Obsérvese que la función es continua en el punto $x = 0$. Teniendo esto en cuenta así como la nota final del Problema 7 se puede afirmar que: *Si una función es derivable en el punto $x = a$, es continua en dicho punto aunque el recíproco no es cierto.*

9. Interpretación geométrica de dy/dx.

La Fig. 4-1 muestra que $\Delta y/\Delta x$ es la pendiente de la secante que une un punto fijo $P(x, y)$ cualquiera de la curva con otro $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Cuando $\Delta x \to 0$, P permanece fijo y Q se mueve sobre la curva acercándose a P; la recta PQ va girando alrededor de P hasta que llega a su posición límite que es la tangente PT a la curva en el punto P. Así pues, dy/dx es la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P.

Por ejemplo, en el Problema 3, la pendiente de la cúbica $y = x^3 - x^2 - 4$ en el punto $x = 4$ es $m = 40$, en $x = 0$ es $m = 0$ y en $x = -1$ es $m = 5$.

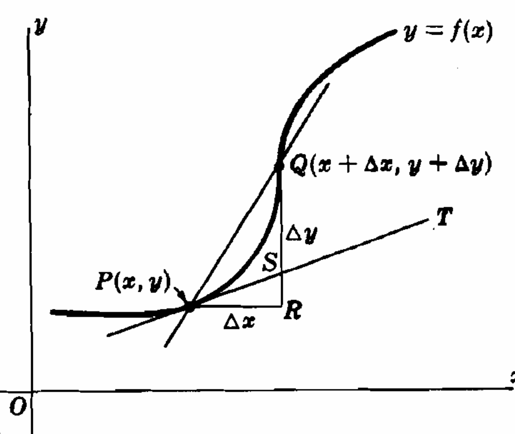


Fig. 4-1

10. Hallar ds/dt en la función del Problema 2. Interpretar el resultado.

En este caso $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = 10t_0 + 5\Delta t$ y $\dfrac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}(10t_0 + 5\Delta t) = 10t_0$.

Cuando $\Delta t \to 0$, $\Delta s/\Delta t$ representa la velocidad media del cuerpo en intervalos de tiempo Δt cada vez más pequeños. El valor de ds/dt es la velocidad instantánea v en el instante $t = t_0$. Por ejemplo, para $x = 3$, $v = 10(3) = 30$ m/s.

11. Calcular $f'(x)$ en la función $f(x) = |x|$.

La función es continua para todos los valores de x. Para $x < 0, f(x) = -x$ y $f'(x) = -1$; para $x > 0, f(x) = x$ y $f'(x) = 1$.

Para $x = 0, f(x) = 0$ y $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$.

Cuando $\Delta x \to 0^-$, $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} \to -1$ mientras que si $\Delta x \to 0^+$, $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} \to 1$.

Por consiguiente, la función no es derivable en el punto $x = 0$.

12. Calcular $\epsilon = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - \dfrac{dy}{dx}$ para la función de los Problemas (*a*) 3 y (*b*) 5. Demostrar que $\epsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

(*a*) $\epsilon = \{3x^2 - 2x + (3x - 1)\Delta x + (\Delta x)^2\} - \{3x^2 - 2x\} = (3x - 1 + \Delta x)\Delta x$.

(*b*) $\epsilon = \dfrac{-1}{(x-2)(x + \Delta x - 2)} - \dfrac{-1}{(x-2)^2} = \dfrac{-(x-2) + (x + \Delta x - 2)}{(x-2)^2(x + \Delta x - 2)} = \dfrac{1}{(x-2)^2(x + \Delta x - 2)}\Delta x$

13. Interpretar geométricamente la expresión $\Delta y = \dfrac{dy}{dx} \cdot \Delta x + \epsilon \cdot \Delta x$ del Problema 12.

En la figura del Problema 9, $\Delta y = RQ$ y $\dfrac{dy}{dx} \cdot \Delta x = PR \cdot \text{tag}\angle\, TPR = RS$; por tanto, $\epsilon \cdot \Delta x = SQ$. Cuando x se incrementa en Δx desde $P(x,y)$, Δy es el incremento correspondiente de y *contado hasta la curva* mientras que $\dfrac{dy}{dx}\Delta x$ es el incremento correspondiente de y *contado hasta la tangente PT*. Como la diferencia entre ambos incrementos $\epsilon \cdot \Delta x = (\ldots)(\Delta x)^2 \to 0$ más rápidamente que Δx, en el Capítulo 23 se empleará la expresión $\dfrac{dy}{dx} \cdot \Delta x$ como una aproximación de Δy cuando $|\Delta x|$ sea pequeño.

Problemas propuestos

14. Calcular Δy e $\Delta y/\Delta x$, en los casos siguientes:

(*a*) $y = 2x - 3$ y x pasa de 3,3 a 3,5.
(*b*) $y = x^2 + 4x$ y x pasa de 0,7 a 0,85.
(*c*) $y = 2/x$ y x pasa de 0,75 a 0,5.

Sol. (*a*) 0,4; 2, (*b*) 0,8325; 5,55, (*c*) 4/3; —16/3

15. Dada la función $y = x^2 - 3x + 5$, calcular Δy en el punto $x = 5$ para $\Delta x = -0{,}01$. Hallar el valor de y para $x = 4{,}99$.

Sol. $\Delta y = -0{,}0699$; $y = 14{,}9301$

16. Calcular la velocidad media de los siguientes movimientos:

(*a*) $s = (3t^2 + 5)$ m y t pasa de 2 a 3 seg.
(*b*) $s = (2t^2 + 5t - 3)$ m y t pasa de 2 a 5 seg.

Sol. (*a*) 15 m/seg, (*b*) 19 m/seg.

17. Calcular el aumento de volumen de un balón esférico cuando su radio se incrementa desde r hasta $r + \Delta r$ cm, (*b*) desde 2 hasta 3 cm.

Sol. (*a*) $\frac{4\pi}{3}(3r^2 + 3r \cdot \Delta r + \Delta r^2) \cdot \Delta r$ cm³., (*b*) $^{76}/_3\pi$ cm³.

18. Hallar la derivada de las siguientes funciones:

(*a*) $y = 4x - 3$
(*b*) $y = 4 - 3x$
(*c*) $y = x^2 + 2x - 3$
(*d*) $y = 1/x^2$
(*e*) $y = (2x - 1)/(2x + 1)$
(*f*) $y = (1 + 2x)/(1 - 2x)$
(*g*) $y = \sqrt{x}$
(*h*) $y = 1/\sqrt{x}$
(*i*) $y = \sqrt{1 + 2x}$
(*j*) $y = 1/\sqrt{2 + x}$

Sol. (*a*) 4
(*b*) —3
(*c*) $2(x + 1)$
(*d*) $-2/x^3$
(*e*) $\dfrac{1}{(2x + 1)^2}$
(*f*) $\dfrac{4}{(1 - 2x)^2}$
(*g*) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
(*h*) $-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$
(*i*) $\dfrac{1}{\sqrt{1 + 2x}}$
(*j*) $-\dfrac{1}{2(2 + x)^{3/2}}$

19. Hallar la pendiente de las siguientes curvas en el punto $x = 1$:

(*a*) $y = 8 - 5x^2$, (*b*) $y = \dfrac{4}{x + 1}$, (*c*) $y = \dfrac{2}{x + 3}$.

Sol. (*a*) —10, (*b*) —1, (*c*) —1/8.

20. Calcular las coordenadas del vértice de la parábola $y = x^2 - 4x + 1$ teniendo en cuenta que la pendiente de la tangente en dicho punto es igual a cero. *Sol.* $V(2, -3)$.

21. Calcular la pendiente de las tangentes a la parábola $y = -x^2 + 5x - 6$ en los puntos de intersección con el eje x.

Sol. Para $x = 2$, $m = 1$; para $x = 3$, $m = -1$.

22. Calcular la velocidad de los siguientes movimientos en el instante $t = 2$; s viene expresado en metros y t en segundos:

(*a*) $s = t^2 + 3t$, (*b*) $s = t^3 - 3t^2$, (*c*) $s = \sqrt{t + 2}$.

Sol. (*a*) 7 m/s, (*b*) 0 m/s, (*c*) $\frac{1}{4}$ m/s

23. Demostrar que la variación instantánea del volumen de un cubo con respecto a su arista x(cm) es de 12 cm³/cm cuando $x = 2$ cm.

Capítulo 5

Derivación de funciones algebraicas

UNA FUNCION que tiene derivada en un punto $x = x_0$ se dice que es *derivable* en él. Una función es derivable en un intervalo cuando lo es en todos los puntos del mismo.

Las funciones que aparecen en el cálculo elemental son, en general, derivables en sus intervalos de definición, pudiendo no serlo en algún punto aislado.

FORMULAS DE DERIVACION. En las fórmulas siguientes u, v y w son funciones derivables de x.

1. $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$, siendo c una constante
2. $\dfrac{d}{dx}(x) = 1$
3. $\dfrac{d}{dx}(u + v + \cdots) = \dfrac{d}{dx}(u) + \dfrac{d}{dx}(v) + \cdots$
4. $\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{d}{dx}(u)$
5. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{d}{dx}(v) + v\dfrac{d}{dx}(u)$
6. $\dfrac{d}{dx}(uvw) = uv\dfrac{d}{dx}(w) + uw\dfrac{d}{dx}(v) + vw\dfrac{d}{dx}(u)$
7. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{c}\right) = \dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{d}{dx}(u), \quad c \neq 0$
8. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{c}{u}\right) = c\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{u}\right) = -\dfrac{c}{u^2}\cdot\dfrac{d}{dx}(u), \quad u \neq 0$
9. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{d}{dx}(u) - u\dfrac{d}{dx}(v)}{v^2}, \quad v \neq 0$
10. $\dfrac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1}$
11. $\dfrac{d}{dx}(u^m) = mu^{m-1}\dfrac{d}{dx}(u)$

(Ver Problemas 1-13.)

FUNCION INVERSA. Sea la función $y = f(x)$ derivable en el intervalo $a \leq x \leq b$ y supongamos que dy/dx no cambia de signo en dicho intervalo. Las funciones representadas en las Figs. 5-1a y 5-1b toman una sola vez cada uno de los valores comprendidos entre $f(a) = c$ y $f(b) = d$. Por tanto, a cada valor de y perteneciente a dicho intervalo le corresponde un único valor de x, con lo cual x es también función de y, es decir $x = g(y)$. Las funciones $y = f(x)$ y $x = g(y)$ reciben el nombre de *funciones inversas*.

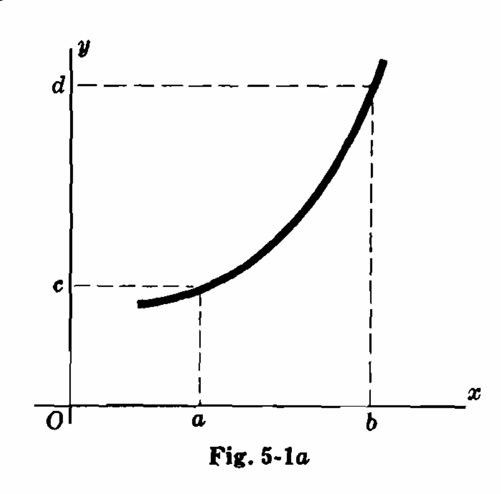


Fig. 5-1*a*

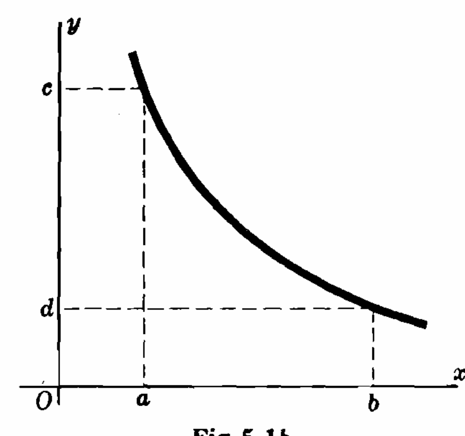


Fig. 5-1*b*

Ejemplo 1:

(*a*) $y = f(x) = 3x + 2$ y $x = g(y) = \frac{1}{3}(y - 2)$ son funciones inversas.

(*b*) Cuando $x \leq 2$ e $y \geq -1$, $y = x^2 - 4x + 3$ y $x = 2 - \sqrt{y+1}$ son funciones inversas. Cuando $x \geq 2$ e $y \geq -1$, $y = x^2 - 4x + 3$ y $x = 2 + \sqrt{y+1}$ son funciones inversas.

Para calcular dy/dx en la función $x = g(y)$:

(*a*) Despejar y si es posible y derivar con respecto a x

(*b*) Derivar $x = g(y)$ con respecto a y y aplicar

$$12. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

Ejemplo 2:

Calcular dy/dx en la función $x = \sqrt{y} + 5$.

Aplicando (*a*): $y = (x - 5)^2$ y $dy/dx = 2(x - 5)$.

Aplicando (*b*): $\dfrac{dx}{dy} = \frac{1}{2}y^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$; por tanto, $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} = 2(x - 5)$.

(Ver Problemas 14-15.)

DERIVADA DE UNA FUNCION DE FUNCION. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ resulta que $y = f\{g(x)\}$ es una función de x. En el caso en que y sea una función derivable de u y u lo sea respecto de x, la función $y = f\{g(x)\}$ también será derivable con respecto a x. La derivada dy/dx se puede obtener por uno de los procedimientos siguientes:

(*a*) Despejar y en función de x y derivar

Ejemplo 3:

Si $y = u^2 + 3$ y $u = 2x + 1$, tendremos $y = (2x + 1)^2 + 3$ y $dy/dx = 8x + 4$.

(*b*) Derivar cada una de las funciones con respecto a la variable independiente y aplicar la fórmula

$$13. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo 4:

Si $y = u^2 + 3$ y $u = 2x + 1$, tendremos $\dfrac{dy}{du} = 2u$, $\dfrac{du}{dx} = 2$ y $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = 4u = 8x + 4$.

(Ver Problemas 16-20.)

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR. La derivada de una función de x, $y = f(x)$, recibe el nombre de *primera derivada* de la función. Si la primera derivada es a su vez una función derivable, su derivada se denomina *derivada segunda* de la función original y se representa por uno cualquiera de los símbolos $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, y'' o $f''(x)$. La derivada de esta segunda derivada, si existe es la *derivada tercera* de la función y se representa por $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, y''' o $f'''(x)$.

Nota. La derivada de un orden determinado en un punto solo puede existir cuando todas las funciones derivadas de orden inferior son derivables en dicho punto.

(Ver Problemas 21-23.)

Problemas resueltos

1. Demostrar: (*a*) $\frac{d}{dx}(c) = 0$, siendo c una constante; (*b*) $\frac{d}{dx}(x) = 1$; (*c*) $\frac{d}{dx}(cx) = c$, siendo c una constante;

(*d*) $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$, siendo n un número positivo entero.

Como $\frac{d}{dx}f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

(*a*) $\frac{d}{dx}(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$

(*b*) $\frac{d}{dx}(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 = 1$

(*c*) $\frac{d}{dx}(cx) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{c(x+\Delta x) - cx}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} c = c$

(*d*) $$\frac{d}{dx}(x^n) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left\{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n\right\} - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left\{nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}\right\} = nx^{n-1}$$

2. Sean u y v funciones derivables de x. Demostrar: (*a*) $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v)$

(*b*) $\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u \cdot \frac{d}{dx}(v) + v \cdot \frac{d}{dx}(u)$ (*c*) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot \frac{d}{dx}(u) - u \cdot \frac{d}{dx}(v)}{v^2}$, $v \neq 0$

(*a*) Sea $f(x) = u + v = u(x) + v(x)$; tendremos:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x) - u(x) - v(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

Tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$, $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}u(x) + \frac{d}{dx}v(x) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v)$.

(*b*) Sea $f(x) = u \cdot v = u(x) \cdot v(x)$; tendremos:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{[u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - v(x)\cdot u(x+\Delta x)] + [v(x)\cdot u(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)]}{\Delta x}$$

$$= u(x+\Delta x)\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} + v(x)\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

y $$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(u\cdot v) = u(x)\frac{d}{dx}v(x) + v(x)\frac{d}{dx}u(x) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u).$$

(*c*) Sea $f(x) = \frac{u}{v} = \frac{u(x)}{v(x)}$; tendremos

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{\Delta x\{v(x)\cdot v(x+\Delta x)\}}$$

$$= \frac{[u(x+\Delta x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x)] - [u(x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)]}{\Delta x\{v(x)\cdot v(x+\Delta x)\}}$$

$$= \frac{v(x)\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} - u(x)\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)}$$

y $$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(x)\frac{d}{dx}u(x) - u(x)\frac{d}{dx}v(x)}{\{v(x)\}^2} = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$$

Derivar las siguientes funciones.

3. $y = 4 + 2x - 3x^2 - 5x^3 - 8x^4 + 9x^5$

$$\frac{dy}{dx} = 0 + 2(1) - 3(2x) - 5(3x^2) - 8(4x^3) + 9(5x^4) = 2 - 6x - 15x^2 - 32x^3 + 45x^4$$

4. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} = x^{-1} + 3x^{-2} + 2x^{-3}$

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} + 3(-2x^{-3}) + 2(-3x^{-4}) = -x^{-2} - 6x^{-3} - 6x^{-4} = -\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}$$

5. $y = 2x^{1/2} + 6x^{1/3} - 2x^{3/2}$

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) + 6\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\right) - 2\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right) = x^{-1/2} + 2x^{-2/3} - 3x^{1/2} = \frac{1}{x^{1/2}} + \frac{2}{x^{2/3}} - 3x^{1/2}$$

6. $y = \dfrac{2}{x^{1/2}} + \dfrac{6}{x^{1/3}} - \dfrac{2}{x^{3/2}} - \dfrac{4}{x^{3/4}} = 2x^{-1/2} + 6x^{-1/3} - 2x^{-3/2} - 4x^{-3/4}$

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) + 6\left(-\frac{1}{3}x^{-4/3}\right) - 2\left(-\frac{3}{2}x^{-5/2}\right) - 4\left(-\frac{3}{4}x^{-7/4}\right)$$

$$= -x^{-3/2} - 2x^{-4/3} + 3x^{-5/2} + 3x^{-7/4} = -\frac{1}{x^{3/2}} - \frac{2}{x^{4/3}} + \frac{3}{x^{5/2}} + \frac{3}{x^{7/4}}$$

7. $y = \sqrt[3]{3x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{5x}} = (3x^2)^{1/3} - (5x)^{-1/2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(3x^2)^{-2/3}\cdot 6x - \left(-\frac{1}{2}\right)(5x)^{-3/2}\cdot 5 = \frac{2x}{(9x^4)^{1/3}} + \frac{5}{2(5x)(5x)^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{9x}} + \frac{1}{2x\sqrt{5x}}$$

8. $s = (t^2 - 3)^4$

$$\frac{ds}{dt} = 4(t^2 - 3)^3(2t) = 8t(t^2 - 3)^3$$

9. $z = \dfrac{3}{(a^2 - y^2)^2} = 3(a^2 - y^2)^{-2}$

$$\frac{dz}{dy} = 3(-2)(a^2 - y^2)^{-3}\cdot\frac{d}{dy}(a^2 - y^2) = 3(-2)(a^2 - y^2)^{-3}(-2y) = \frac{12y}{(a^2 - y^2)^3}$$

10. $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 3} = (x^2 + 6x + 3)^{1/2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 3)^{-1/2}\cdot\frac{d}{dx}(x^2 + 6x + 3) = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 3)^{-1/2}(2x + 6) = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 6x + 3}}$$

11. $y = (x^2 + 4)^2(2x^3 - 1)^3$

$$y' = (x^2 + 4)^2\cdot\frac{d}{dx}(2x^3 - 1)^3 + (2x^3 - 1)^3\cdot\frac{d}{dx}(x^2 + 4)^2$$

$$= (x^2 + 4)^2\cdot 3(2x^3 - 1)^2\cdot\frac{d}{dx}(2x^3 - 1) + (2x^3 - 1)^3\cdot 2(x^2 + 4)\cdot\frac{d}{dx}(x^2 + 4)$$

$$= (x^2 + 4)^2\cdot 3(2x^3 - 1)^2\cdot 6x^2 + (2x^3 - 1)^3\cdot 2(x^2 + 4)\cdot 2x = 2x(x^2 + 4)(2x^3 - 1)^2(13x^3 + 36x - 2)$$

12. $y = \dfrac{3 - 2x}{3 + 2x}$

$$y' = \frac{(3 + 2x)\cdot\frac{d}{dx}(3 - 2x) - (3 - 2x)\cdot\frac{d}{dx}(3 + 2x)}{(3 + 2x)^2} = \frac{(3 + 2x)(-2) - (3 - 2x)(2)}{(3 + 2x)^2} = \frac{-12}{(3 + 2x)^2}$$

13. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{x^2}{(4-x^2)^{1/2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4-x^2)^{1/2}\cdot\frac{d}{dx}(x^2) - x^2\cdot\frac{d}{dx}(4-x^2)^{1/2}}{4-x^2} = \frac{(4-x^2)^{1/2}(2x) - x^2\cdot\frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2}(-2x)}{4-x^2}$$

$$= \frac{(4-x^2)^{1/2}(2x) + x^3(4-x^2)^{-1/2}}{4-x^2}\cdot\frac{(4-x^2)^{1/2}}{(4-x^2)^{1/2}} = \frac{2x(4-x^2)+x^3}{(4-x^2)^{3/2}} = \frac{8x-x^3}{(4-x^2)^{3/2}}$$

14. Hallar dy/dx, en la función $x = y\sqrt{1-y^2}$.

$$\frac{dx}{dy} = (1-y^2)^{1/2} + \frac{1}{2}y(1-y^2)^{-1/2}(-2y) = \frac{1-2y^2}{\sqrt{1-y^2}} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{1-2y^2}$$

15. Calcular la pendiente de la curva $x = y^2 - 4y$ en los puntos de intersección con el eje y.

Los puntos de corte son (0,0) y (0,4).

$\dfrac{dx}{dy} = 2y - 4$, y $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{dx/dy} = \dfrac{1}{2y-4}$. En (0,0) la pendiente es $-\frac{1}{4}$, y en (0,4) la pendiente es $\frac{1}{4}$.

FORMULA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCION DE FUNCION

16. Deducir la fórmula $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$.

Sean Δu y Δy los incrementos experimentados por las funciones u y y cuando x aumenta o disminuye en Δx. Siempre que $\Delta u \neq 0$ podremos escribir,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

y siendo $\Delta u \neq 0$, cuando $\Delta x \to 0$ se verificará $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$.

Se puede prescindir de la condición impuesta a Δu tomando $|\Delta x|$ suficientemente pequeño. Cuando esto no sea posible, la fórmula se puede deducir de la manera siguiente:

Sea $\Delta y = \dfrac{dy}{du}\cdot\Delta u + \epsilon\cdot\Delta u$ donde $\epsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. (Ver Problema 13, Capítulo 4.) Por tanto,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} + \epsilon\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

y, tomando límites cuando $\Delta x \to 0$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx} + 0\,\dfrac{du}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ como antes.

17. Hallar dy/dx, en las funciones $y = \dfrac{u^2-1}{u^2+1}$ y $u = \sqrt[3]{x^2+2}$.

$$\frac{dy}{du} = \frac{4u}{(u^2+1)^2} \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx} = \frac{2x}{3(x^2+2)^{2/3}} = \frac{2x}{3u^2}$$

Por lo tanto $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx} = \dfrac{4u}{(u^2+1)^2}\cdot\dfrac{2x}{3u^2} = \dfrac{8x}{3u(u^2+1)^2}$

18. Un punto se mueve sobre la curva $y = x^3 - 3x + 5$ de forma que $x = \frac{1}{2}\sqrt{t} + 3$ siendo t el tiempo. Calcular la variación de y con respecto al tiempo en el instante $t = 4$.

Se trata de calcular el valor de dy/dt para $t = 4$.

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2-1), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{4\sqrt{t}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{3(x^2-1)}{4\sqrt{t}}$$

Cuando $t = 4$ $x = \frac{1}{2}\sqrt{4} + 3 = 4$, y $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3(16-1)}{4\cdot 2} = \dfrac{45}{8}$ unidades por unidad de tiempo.

19. Un punto se mueve en el plano según la ley $x = t^2 + 2t$, $y = 2t^3 - 6t$. Calcular dy/dx para $t = 0, 2, 5$.

De la primera ecuación se puede despejar t y sustituirlo en la segunda, resultando y en función de x.

$\dfrac{dy}{dt} = 6t^2 - 6$, $\dfrac{dx}{dt} = 2t + 2$, $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{2t+2}$, y $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx} = 6(t^2-1)\cdot\dfrac{1}{2(t+1)} = 3(t-1)$.

Los valores pedidos de dy/dx son -3 para $t = 0$, 3 para $t = 2$, y 12 para $t = 5$.

20. Si $y = x^2 - 4x$ y $x = \sqrt{2t^2+1}$, hallar dy/dt cuando $t = \sqrt{2}$.

$$\frac{dy}{dx} = 2(x-2), \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{(2t^2+1)^{1/2}}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{4t(x-2)}{(2t^2+1)^{1/2}}$$

Cuando $t = \sqrt{2}$, $x = \sqrt{5}$ y $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{4\sqrt{2}(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{5}(5 - 2\sqrt{5})$.

21. Demostrar que la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 8x + 2$ tiene derivadas de todos los órdenes para $x = a$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 8 \quad \text{y} \quad f'(a) = 3a^2 + 6a - 8$$
$$f''(x) = 6x + 6 \quad \text{y} \quad f''(a) = 6a + 6$$
$$f'''(x) = 6 \quad \text{y} \quad f'''(a) = 6$$

Todas las derivadas de orden superior son idénticamente nulas

22. Hallar las sucesivas derivadas de $f(x) = x^{4/3}$ para $x = 0$.

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} \text{ y } f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \frac{4}{9x^{2/3}} \text{ y } f''(0) \text{ no existe.}$$

Por tanto, para $x = 0$ solamente existe la primera derivada.

23. Dada la función $f(x) = \dfrac{2}{1-x} = 2(1-x)^{-1}$, calcular $f^{(n)}(x)$.

Tendremos

$$f'(x) = 2(-1)(1-x)^{-2}(-1) = 2(1-x)^{-2} = 2\cdot 1\,!\,(1-x)^{-2}$$
$$f''(x) = 2(1\,!)(-2)(1-x)^{-3}(-1) = 2\cdot 2\,!\,(1-x)^{-3}$$
$$f'''(x) = 2(2\,!)(-3)(1-x)^{-4}(-1) = 2\cdot 3\,!\,(1-x)^{-4}$$

con lo cual $f^{(n)}(x) = 2\cdot n\,!\,(1-x)^{-(n+1)}$.

Esto se puede demostrar por el método de inducción, suponiendo que $f^{(k)}(x) = 2\cdot k\,!\,(1-x)^{-(k+1)}$, se verifica

$$f^{(k+1)}(x) = -2\cdot k\,!\,(k+1)(1-x)^{-(k+2)}(-1) = 2\cdot(k+1)\,!\,(1-x)^{-(k+2)}$$

Problemas propuestos

24. Deducir la fórmula 10 en el caso en que $m = -1/n$, siendo n un número positivo, aplicando la fórmula 9 para hallar $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$.

En el caso en que $m = p/q$, siendo p y q enteros, ver Problema 4, Capítulo 6.

Hallar la derivada de las funciones de los Problemas 25-43.

25. $y = x^5 + 5x^4 - 10x^2 + 6$ *Sol.* $dy/dx = 5x(x^3 + 4x^2 - 4)$

26. $y = 3x^{1/2} - x^{3/2} + 2x^{-1/2}$ *Sol.* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} - \dfrac{3}{2}\sqrt{x} - \dfrac{1}{x^{3/2}}$

27. $y = \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{4}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}x^{-2} + 4x^{-1/2}$ *Sol.* $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2}{x^{3/2}}$

28. $y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$ *Sol.* $y' = \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}}$

29. $f(t) = \dfrac{2}{\sqrt{t}} + \dfrac{6}{\sqrt[3]{t}}$ *Sol.* $f'(t) = -\dfrac{t^{1/2} + 2t^{2/3}}{t^2}$

30. $y = (1-5x)^6$ *Sol.* $y' = -30(1-5x)^5$

31. $f(x) = (3x - x^3 + 1)^4$ *Sol.* $f'(x) = 12(1-x^2)(3x - x^3 + 1)^3$

32. $y = (3 + 4x - x^2)^{1/2}$ *Sol.* $y' = \dfrac{2-x}{y}$

33. $\theta = \dfrac{3r+2}{2r+3}$ *Sol.* $\dfrac{d\theta}{dr} = \dfrac{5}{(2r+3)^2}$

34. $y = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^5$ *Sol.* $y' = \dfrac{5x^4}{(1+x)^6}$

35. $y = 2x^2\sqrt{2-x}$ *Sol.* $y' = \dfrac{x(8-5x)}{\sqrt{2-x}}$

36. $f(x) = x\sqrt{3-2x^2}$ *Sol.* $f'(x) = \dfrac{3-4x^2}{\sqrt{3-2x^2}}$

37. $y = (x-1)\sqrt{x^2-2x+2}$ *Sol.* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^2-4x+3}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

38. $z = \dfrac{w}{\sqrt{1-4w^2}}$ *Sol.* $\dfrac{dz}{dw} = \dfrac{1}{(1-4w^2)^{3/2}}$

39. $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$ *Sol.* $y' = \dfrac{1}{4\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$

40. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ *Sol.* $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$

41. $y = (x^2+3)^4(2x^3-5)^3$ *Sol.* $y' = 2x(x^2+3)^3(2x^3-5)^2(17x^3+27x-20)$

42. $s = \dfrac{t^2+2}{3-t^2}$ *Sol.* $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{10t}{(3-t^2)^2}$

43. $y = \left(\dfrac{x^3-1}{2x^3+1}\right)^4$ *Sol.* $y' = \dfrac{36x^2(x^3-1)^3}{(2x^3+1)^5}$

44. Calcular dy/dx por dos métodos diferentes y comprobar que se llega al mismo resultado: (*a*) $x = (1+2y)^3$ (*b*) $x = 1/(2+y)$.

Calcular dy/dx en los Problemas 45-48.

45. $y = \dfrac{u-1}{u+1}$, $u = \sqrt{x}$ *Sol.* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}$

46. $y = u^3+4$, $u = x^2+2x$ *Sol.* $\dfrac{dy}{dx} = 6x^2(x+2)^2(x+1)$

47. $y = \sqrt{1+u}$, $u = \sqrt{x}$ *Sol.* Ver Problema 39

48. $y = \sqrt{u}$, $u = v(3-2v)$, $v = x^2$ Ind: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dv}\cdot\dfrac{dv}{dx}$. (*Sol.* Ver Problema 36)

Calcular las derivadas indicadas en los Problemas 49-52.

49. $y = 3x^4-2x^2+x-5;\ y'''$ *Sol.* $y''' = 72x$

50. $y = 1/\sqrt{x};\ y^{(iv)}$ *Sol.* $y^{(iv)} = \dfrac{105}{16x^{9/2}}$

51. $f(x) = \sqrt{2-3x^2};\ f''(x)$ *Sol.* $f''(x) = \dfrac{-6}{(2-3x^2)^{3/2}}$

52. $y = x/\sqrt{x-1},\ y''$ *Sol.* $y'' = \dfrac{4-x}{4(x-1)^{5/2}}$

Calcular la derivada enésima en los Problemas 53-54.

53. $y = 1/x^2$ *Sol.* $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n(n+1)!}{x^{n+2}}$

54. $f(x) = 1/(3x+2)$ *Sol.* $f^n(x) = (-1)^n\dfrac{3^n\cdot n!}{(3x+2)^{n+1}}$

55. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, demostrar:

(*a*) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{d^2y}{du^2}\left(\dfrac{du}{dx}\right)^2$ (*b*) $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{d^3u}{dx^3} + 3\dfrac{d^2y}{du^2}\cdot\dfrac{d^2u}{dx^2}\cdot\dfrac{du}{dx} + \dfrac{d^3y}{du^3}\left(\dfrac{du}{dx}\right)^3$

56. A partir de $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y'}$, deducir $\dfrac{d^2x}{dy^2} = -\dfrac{y''}{(y')^3}$ y $\dfrac{d^3x}{dy^3} = \dfrac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}$.

Capítulo 6

Derivación de funciones implícitas

FUNCION IMPLICITA. Cuando una ecuación, definida en el campo de variación de sus variables se escribe en la forma $f(x, y) = 0$ se dice que y es una función implícita de x.

Ejemplo 1:

(*a*) La ecuación $xy + x - 2y - 1 = 0$, siendo $x \neq 2$, define la función $y = \dfrac{1-x}{x-2}$

(*b*) La ecuación $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ define la función $y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ cuando $|x| \leq 3$ e $y \geq 0$ y la función $y = -\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ cuando $|x| \leq 3$ e $y \leq 0$.

Obsérvese que la elipse se puede considerar formada por dos arcos unidos en los puntos $(-3,0)$ y $(3,0)$.

Para hallar la derivada y' se puede seguir uno de los procedimientos que se detallan a continuación:

(*a*) Despejar y, si es posible, y derivar con respecto a x. Este procedimiento se debe evitar, a menos que se trate de una ecuación muy sencilla.

(*b*) Derivar la ecuación dada con respecto a x, teniendo en cuenta que y es función de x, y despejar y'. Esta forma de efectuar la derivación recibe el nombre de *derivación implícita.*

Ejemplo 2:

(*a*) Hallar y', en la ecuación $xy + x - 2y - 1 = 0$.

Tendremos $x \cdot \dfrac{d}{dx}(y) + y \cdot \dfrac{d}{dx}(x) + \dfrac{d}{dx}(x) - 2 \cdot \dfrac{d}{dx}(y) - \dfrac{d}{dx}(1) = \dfrac{d}{dx}(0)$

o bien $xy' + y + 1 - 2y' = 0$; por tanto, $y' = \dfrac{1+y}{2-x}$.

(*b*) Hallar y', cuando $x = \sqrt{5}$, en la ecuación $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.

Tendremos, $4 \cdot \dfrac{d}{dx}(x^2) + 9 \cdot \dfrac{d}{dx}(y^2) = 8x + 9 \cdot \dfrac{d}{dy}(y^2)\dfrac{dy}{dx} = 8x + 18yy' = 0$ e $y' = -\dfrac{4x}{9y}$.

Para $x = \sqrt{5}$, $y = \pm 4/3$. En el punto $(\sqrt{5}, 4/3)$ del arco superior de la elipse, $y' = -\sqrt{5}/3$, y en el punto $(\sqrt{5}, -4/3)$ del arco inferior, $y' = \sqrt{5}/3$.

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR. Se pueden calcular por uno de los procedimientos siguientes:

(*a*) Derivar implícitamente la primera derivada y en el resultado, sustituir el valor de y' previamente calculado, repitiendo después la misma marcha.

Ejemplo 3: En el Ejemplo 2(*a*), $y' = \dfrac{1+y}{2-x}$. Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx}(y') = y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1+y}{2-x}\right) = \frac{(2-x)y' + 1 + y}{(2-x)^2} = \frac{(2-x)\left(\dfrac{1+y}{2-x}\right) + 1 + y}{(2-x)^2} = \frac{2+2y}{(2-x)^2}$$

(*b*) Derivar implícitamente la ecuación dada cuantas veces sea necesario hasta que aparezca la derivada que se quiere obtener, eliminando, acto seguido, todas las derivadas de orden inferior. Este procedimiento es el más recomendable cuando se trate de hallar una derivada de orden superior en un punto.

Ejemplo 4: Calcular el valor de y'' en el punto $(-1,1)$ en la curva $x^2y + 3y - 4 = 0$.
Derivando implícitamente con respecto a x dos veces, se obtiene,

$$x^2y' + 2xy + 3y' = 0 \quad \text{y} \quad x^2y'' + 2xy' + 2xy' + 2y + 3y'' = 0$$

Sustituyendo $x = -1$, $y = 1$ en la primera relación, obtenemos $y' = \frac{1}{2}$.
Sustituyendo $x = -1$, $y = 1$, $y' = \frac{1}{2}$ en la segunda relación, obtenemos $y'' = 0$.

Problemas resueltos

1. Hallar y', en la ecuación $x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$.

$$\frac{d}{dx}(x^2y) - \frac{d}{dx}(xy^2) + \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$x^2\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(x^2) - x\frac{d}{dx}(y^2) - y^2\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$x^2y' + 2xy - 2xyy' - y^2 + 2x + 2yy' = 0 \quad \text{e} \quad y' = \frac{y^2 - 2x - 2xy}{x^2 + 2y - 2xy}$$

2. Hallar y' e y'', en la ecuación $x^2 - xy + y^2 = 3$.

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = 2x - xy' - y + 2yy'. = 0 \quad \text{e} \quad y' = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

$$y'' = \frac{(x-2y)\frac{d}{dx}(2x-y) - (2x-y)\frac{d}{dx}(x-2y)}{(x-2y)^2} = \frac{(x-2y)(2-y') - (2x-y)(1-2y')}{(x-2y)^2}$$

$$= \frac{3xy' - 3y}{(x-2y)^2} = \frac{3x\left(\frac{2x-y}{x-2y}\right) - 3y}{(x-2y)^2} = \frac{6(x^2 - xy + y^2)}{(x-2y)^3} = \frac{18}{(x-2y)^3}$$

3. Hallar y' e y'', en la ecuación $x^3y + xy^3 = 2$ para $x = 1$.

$$x^3y' + 3x^2y + 3xy^2y' + y^3 = 0$$

y $$x^3y'' + 3x^2y' + 3x^2y' + 6xy + 3xy^2y'' + 6xy(y')^2 + 3y^2y' + 3y^2y' = 0$$

Cuando $x = 1$, $y = 1$; sustituyendo en la primera ecuación, $y' = -1$.

Sustituyendo $x = 1$, $y = 1$, $y' = -1$ en la segunda ecuación, $y'' = 0$.

Problemas propuestos

4. Deducir la Fórmula 10, Capítulo 5, para $m = p/q$, siendo p y q números enteros, escribiendo $y = x^{p/q}$ en la forma $y^q = x^p$ y derivando con respecto a x.

5. Hallar y'', en las ecuaciones (*a*) $x + xy + y = 2$, (*b*) $x^3 - 3xy + y^3 = 1$. *Sol.* $y'' = \frac{2(1+y)}{(1+x)^2}$, (*b*) $y'' = -\frac{4xy}{(y^2-x)^3}$

6. Hallar y', y'', e y''' en (*a*) el punto (2, 1) de $x^2 - y^2 - x = 1$, (*b*) el punto (1, 1) de $x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 2y^3 = 0$.
Sol. (*a*) 3/2, —5/4, 45/8; (*b*) 1, 0, 0

7. Hallar la pendiente de la tangente en el punto (x_0, y_0) de (*a*) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, (*b*) $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, (*c*) $x^3 + y^3 - 6x^2y = 0$. *Sol.* (*a*) $-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$, (*b*) $\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$, (*c*) $\frac{4x_0y_0 - x_0^2}{y_0^2 - 2x_0^2}$

8. Demostrar que las curvas $5y - 2x + y^3 - x^2y = 0$ y $2y + 5x + x^4 - x^3y^2 = 0$ se cortan en ángulo recto en el origen.

9. (*a*) El área total de un paralelepípedo recto cuya base es un cuadrado de lado y de altura x viene dada por $S = 2y^2 + 4xy$. Suponiendo que S es constante, calcular dy/dx sin despejar y.

(*b*) El área total de un cilindro recto circular de radio r y altura h viene dada por $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Suponiendo que S es constante, calcular dr/dh. *Sol.* (*a*) $-\frac{y}{x+y}$; (*b*) $-\frac{r}{2r+h}$

10. En la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, demostrar que $\left|\frac{y''}{\{1 + (y')^2\}^{3/2}}\right| = \frac{1}{r}$.

11. Siendo $S = \pi x(x + 2y)$ y $V = \pi x^2y$, demostrar que $dS/dx = 2\pi(x - y)$ cuando V es constante, y que $dV/dx = -\pi x(x-y)$ cuando S es constante.

Capítulo 7

Tangente y Normal

SI LA FUNCION $f(x)$ posee derivada finita, $f'(x_0)$, en el punto $x = x_0$, la curva $y = f(x)$ tiene una tangente en $P_0(x_0, y_0)$ cuya pendiente es

$$m = \text{tag}\,\theta = f'(x_0)$$

Si $m = 0$, la curva tiene una tangente horizontal de ecuación $y = y_0$ en P_0, puntos A, C y E de la Fig. 7-1. En los demás casos la ecuación de la tangente en un punto a una curva es

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Si $f(x)$ es continua en el punto $x = x_0$, pero $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \infty$ la curva tiene una tangente vertical de ecuación $x = x_0$, puntos B y D de la Figura 7-1.

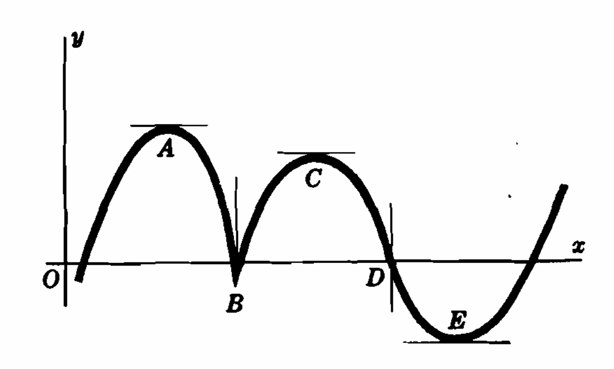


Fig. 7-1

La *normal* a una curva en uno de sus puntos es la recta que pasando por dicho punto es perpendicular a la tangente en él. La ecuación de la normal en el punto $P_0(x_0, y_0)$ es

$x = x_0$, si la tangente es horizontal

$y = y_0$, si la tangente es vertical;

en los demás casos,

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$$

(Ver Problemas 1-9.)

EL ANGULO DE INTERSECCION de dos curvas se define por el formado por sus tangentes en el punto de intersección.

Para hallar los ángulos de intersección de dos curvas:

(1) Se calculan los puntos de intersección, resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

(2) Se hallan las pendientes m_1 y m_2 de las tangentes a las curvas en cada uno de los puntos de intersección.

(3) Si $m_1 = m_2$, el ángulo de intersección es $\phi = 0°$,
si $m_1 = -1/m_2$, el ángulo de intersección es $\phi = 90°$;

en los demás casos, $$\text{tag}\,\phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Si tag $\phi > 0$, el ángulo agudo de intersección es ϕ y
si tag $\phi < 0$, el ángulo agudo de intersección es $180° - \phi$.

(Ver Problemas 10-12.)

LONGITUDES DE TANGENTE NORMAL, SUBTANGENTE Y SUBNORMAL. La *longitud de tangente* a una curva en uno de sus puntos se define como la longitud del segmento de tangente comprendido entre el punto de contacto y el eje x. La longitud de la proyección de este segmento sobre

el eje x recibe el nombre de *longitud de subtangente*.

La *longitud de normal* se define como la longitud del segmento de normal comprendido entre el punto de tangencia y el eje x. La longitud de la proyección de este segmento sobre el eje x recibe el nombre de *longitud de subnormal*.

Longitud de la subtangente $= TS = y_0/m$

Longitud de la subnormal $= SN = my_0$

Longitud de la tangente

$$= TP_0 = \sqrt{(TS)^2 + (SP_0)^2}$$

Longitud de la normal

$$= P_0N = \sqrt{(SN)^2 + (SP_0)^2}$$

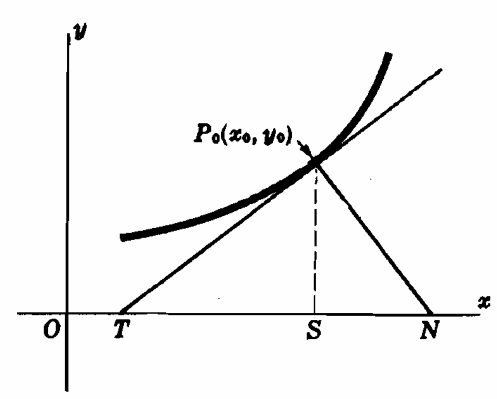


Fig. 7-2

Nota. Las longitudes de subtangente y subnormal son segmentos dirigidos. Algunos autores solamente consideran sus módulos, $|y_0/m|$ y $|my_0|$ respectivamente. Por ello, en las soluciones de los problemas no se han tenido en cuenta más que dichos módulos.

(Ver Problema 13.)

Problemas resueltos

1. Calcular los puntos de la curva $x^2 - xy + y^2 = 27$ en los que las tangentes son horizontales y verticales.

Derivando, $y' = \dfrac{y - 2x}{2y - x}$.

Tangentes horizontales: Igualando a cero el numerador de y', obtenemos $y = 2x$. Los puntos de tangencia son los de intersección de la recta $y = 2x$ con la curva dada. Resolviendo el sistema se obtienen los puntos (3,6) y (—3, —6).

Tangentes verticales: Igualando a cero el denominador de y' resulta $x = 2y$. Los puntos de tangencia son los de intersección de la recta $x = 2y$ con la curva dada. Resolviendo el sistema se obtienen los puntos (6, 3) y (—6, —3).

2. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $y = x^3 - 2x^2 + 4$ en el punto (2, 4).

$f'(x) = 3x^2 - 4x$; la pendiente de la tangente en el punto (2, 4) es $m = f'(2) = 4$.

La ecuación de la tangente es $y - 4 = 4(x - 2)$, o bien, $y = 4x - 4$.

La ecuación de la normal es $y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)$, o bien, $x + 4y = 18$.

3. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $x^2 + 3xy + y^2 = 5$ en el punto (1, 1).

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x + 3y}{3x + 2y}$. La pendiente de la tangente en el punto (1, 1) es $m = -1$.

La ecuación de la tangente es $y - 1 = -1(x - 1)$, o bien, $x + y = 2$.

La ecuación de la normal es $y - 1 = 1(x - 1)$, o bien, $x - y = 0$.

4. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la elipse $4x^2 + 9y^2 = 40$, de pendiente $m = -2/9$.

Sea $P_0(x_0, y_0)$ el punto de tangencia de la tangente buscada. Se tiene,

(*a*) $4x_0^2 + 9y_0^2 = 40$, puesto que P_0 es un punto de la elipse.

(*b*) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x}{9y}$. Para (x_0, y_0), $m = -\dfrac{4x_0}{9y_0} = -\dfrac{2}{9}$, con lo que $y_0 = 2x_0$.

(*c*) Los puntos de tangencia son las soluciones del sistema de ecuaciones (*a*) y (*b*). Resolviendo dicho sistema se obtienen los puntos (1, 2) y (—1, —2).

La ecuación de la tangente en el punto (1, 2) es $y - 2 = -2/9(x - 1)$, o bien, $2x + 9y = 20$.

La ecuación de la tangente en el punto (—1 —2) es $y + 2 = -2/9(x + 1)$, o bien, $2x + 9y = -20$.

5. Hallar la ecuación de la tangente a la hipérbola $x^2 - y^2 = 16$ en el punto $(2, -2)$.

Sea $P_0(x_0, y_0)$ el punto de tangencia de la recta buscada. Se tiene,

(*a*) $x_0^2 - y_0^2 = 16$, puesto que P_0 es un punto de la hipérbola.

(*b*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$. Para (x_0, y_0), $m = \dfrac{x_0}{y_0} = \dfrac{y_0 + 2}{x_0 - 2}$ = pendiente de la recta que une P_0 con $(2, -2)$; por tanto,

$$2x_0 + 2y_0 = x_0^2 - y_0^2 = 16 \text{ o sea } x_0 + y_0 = 8$$

(*c*) El punto de tangencia es la solución del sistema de ecuaciones (*a*) y (*b*). Resolviendo dicho sistema resulta el punto $(5, 3)$. La ecuación de la tangente es $y - 3 = \frac{5}{3}(x - 5)$, o bien $5x - 3y = 16$.

6. Hallar las ecuaciones de las rectas verticales que pasan por los puntos de las curvas (*1*) $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ y (*2*) $3y = 2x^3 + 9x^2 - 3x - 3$, en los que las tangentes a ellas son paralelas.

Sea $x = x_0$ la ecuación de la recta buscada.

En (*1*): $y' = 3x^2 + 4x - 4$; para $x = x_0$, $m = 3x_0^2 + 4x_0 - 4$.

En (*2*): $3y' = 6x^2 + 18x - 3$; para $x = x_0$, $m = 2x_0^2 + 6x_0 - 1$.

Igualando $3x_0^2 + 4x_0 - 4 = 2x_0^2 + 6x_0 - 1$, $x_0 = -1$ y 3. Las rectas son $x = -1$ y $x = 3$.

(*a*) Demostrar que la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 4px$ de pendiente $m \neq 0$ es $y = mx + p/m$.

(*b*) Demostrar que la ecuación de la tangente de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en el punto $P_0(x_0, y_0)$ es $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$

(*a*) $y' = 2p/y$. Si $P_0(x_0, y_0)$ es el punto de tangencia, se tiene $y_0^2 = 4px_0$ y $m = 2p/y_0$. Así pues, $y_0 = 2p/m$, $x_0 = \frac{1}{4}y_0^2/p = p/m^2$ y la ecuación de la tangente, $y - 2p/m = m(x - p/m^2)$, o bien, $y = mx + p/m$.

(*b*) $y' = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$. En P_0, $m = -\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$ y la ecuación de la tangente es $y - y_0 = -\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$

o sea $b^2x_0x + a^2y_0y = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$.

8. Demostrar que la tangente a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ en el punto $P_0(x_0, y_0)$ es la bisectriz del ángulo formado por los radios vectores de P_0.

En el punto P_0 la pendiente de la tangente a la hipérbola es b^2x_0/a^2y_0 y las pendientes de los radios vectores P_0F' y P_0F son $y_0/(x_0 + c)$ e $y_0/(x_0 - c)$, respectivamente. Así pues,

$$\operatorname{tag} \alpha = \frac{\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0} - \dfrac{y_0}{x_0 + c}}{1 + \dfrac{b^2x_0}{a^2y_0} \cdot \dfrac{y_0}{x_0 + c}} = \frac{(b^2x_0^2 - a^2y_0^2) + b^2cx_0}{(a^2 + b^2)x_0y_0 + a^2cy_0} = \frac{a^2b^2 + b^2cx_0}{c^2x_0y_0 + a^2cy_0} = \frac{b^2(a^2 + cx_0)}{cy_0(a^2 + cx_0)} = \frac{b^2}{cy_0}$$

Fig. 7-3

puesto que $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$ y $a^2 + b^2 = c^2$, y

$$\operatorname{tag} \beta = \frac{\dfrac{y_0}{x_0 - c} - \dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}}{1 + \dfrac{b^2x_0}{a^2y_0} \cdot \dfrac{y_0}{x_0 - c}} = \frac{b^2cx_0 - (b^2x_0^2 - a^2y_0^2)}{(a^2 + b^2)x_0y_0 - a^2cy_0} = \frac{b^2cx_0 - a^2b^2}{c^2x_0y_0 - a^2cy_0} = \frac{b^2}{cy_0}$$

Luego, como $\operatorname{tag} \alpha = \operatorname{tag} \beta$, $\alpha = \beta$.

9. Demostrar que la cuerda que une los puntos de contacto de las tangentes a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ trazadas desde un punto de la directriz pasa por el foco correspondiente.

Sea $P_0(x_0, y_0)$ el punto desde el que se trazan las tangentes a la elipse y $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ los correspondientes puntos de contacto. Las ecuaciones de las tangentes en P_1 y P_2 son $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$ y $b^2x_2x + a^2y_2y = a^2b^2$. Como ambas pasan por P_0, se verifican $b^2x_1x_0 + a^2y_1y_0 = a^2b^2$ y $b^2x_2x_0 + a^2y_2y_0 = a^2b^2$. La recta $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$, que pasa por P_1 y P_2, es la cuerda de contacto. Sea $P(a^2/c, \bar{y})$ un punto de la directriz del lado derecho. La ecuación de la cuerda de contacto que pasa por P tiene de ecuación $(b^2a^2/c)x + a^2\bar{y}y = a^2b^2$ y, como se puede comprobar, pasa por el foco correspondiente $F(c, 0)$.

10. Hallar el ángulo agudo de intersección de las curvas (*1*) $y^2 = 4x$ y (*2*) $2x^2 = 12 - 5y$.

(*a*) Los puntos de intersección de las curvas son $P_1(1, 2)$ y $P_2(4, -4)$.

(*b*) En (*1*), $y' = 2/y$; en (*2*), $y' = -4x/5$.

En $P_1(1, 2)$, $m_1 = 1$ y $m_2 = -4/5$; en $P_2(4, -4)$, $m_1 = -1/2$ y $m_2 = -16/5$.

(*c*) En P_1: $\operatorname{tag} \phi = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = \dfrac{1 + 4/5}{1 - 4/5} = 9$ y $\phi = 83°40'$ es el ángulo agudo de intersección.

En P_2: $\operatorname{tag} \phi = \dfrac{-1/2 + 16/5}{1 + 8/5} = 1{,}0385$ y $\phi = 46°5'$ es el ángulo agudo de intersección.

11. Hallar los ángulos agudos de intersección de las curvas (*1*) $2x^2 + y^2 = 20$ y (*2*) $4y^2 - x^2 = 8$.

Los puntos de intersección son $(\pm 2\sqrt{2}, 2)$ y $(\pm 2\sqrt{2}, -2)$.

En (*1*), $y' = -2x/y$, y en (*2*), $y' = x/4y$.

En el punto $(2\sqrt{2}, 2)$, $m_1 = -2\sqrt{2}$ y $m_2 = \frac{1}{4}\sqrt{2}$. Como $m_1m_2 = -1$, el ángulo de intersección es $\phi = 90°$ (es decir, las curvas son ***ortogonales***). Por simetría se deduce que las curvas son ortogonales en cada uno de sus puntos de intersección.

12. El cable de un puente colgante está unido a dos pilares separados entre sí una distancia de 250 m. Suponiendo que adquiere forma de parábola con su punto más bajo a una distancia de 50 m del punto de suspensión, calcular el ángulo que forma el cable con el pilar.

Se elige como origen el vértice de la parábola como se representa en la Fig. 7-4.

La ecuación de la parábola es $y = \dfrac{2}{625}x^2$, y $y' = \dfrac{4x}{625}$.

En el punto (125, 50), $m = 4(125/625) = 0{,}8000$ y $\theta = 38°40'$.

El ángulo pedido es $\phi = 90° - \theta = 51°20'$.

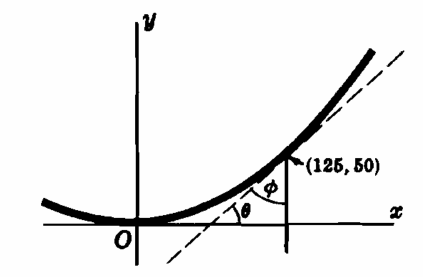


Fig. 7-4

13. Hallar la longitud de la subtangente, subnormal tagente y normal a la curva $xy + 2x - y = 5$ en el punto (2, 1).

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2 + y}{1 - x}$; en el punto (2, 1), $m = -3$.

Longitud de la subtangente $= y_0/m = -1/3$. Longitud de la subnormal $= my_0 = -3$.

Longitud de la tangente $= \sqrt{1/9 + 1} = \sqrt{10}/3$. Longitud de la normal $= \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$.

Problemas propuestos

14. Hallar en qué puntos de la curva $x^2 + 4xy + 16y^2 = 27$ la tangente es horizontal o vertical.
Sol. T.H. en $(3, -3/2)$ y $(-3, 3/2)$
T.V. en $(6, -3/4)$ y $(-6, 3/4)$

15. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $x^2 - y^2 = 7$ en el punto $(4, -3)$.
Sol. $4x + 3y = 7$; $3x - 4y = 24$.

16. Hallar en qué punto la tangente a la curva $y = x^3 + 5$ es (*a*) paralela a la recta $12x - y = 17$, (*b*) perpendicular a la recta $x + 3y = 2$. *Sol.* (*a*) $(2, 13)$, $(-2, -3)$; (*b*) $(1, 6)$, $(-1, 4)$.

17. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la curva $9x^2 + 16y^2 = 52$ paralelas a la recta $9x - 8y = 1$.
Sol. $9x - 8y = \pm 26$.

18. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $xy = 1$ trazadas desde el punto $(-1, 1)$.
Sol. $y = (2\sqrt{2} - 3)x + 2\sqrt{2} - 2$; $y = -(2\sqrt{2} + 3)x - 2\sqrt{2} - 2$.

19. Demostrar que la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en un punto de ella $P(x_0, y_0)$ es, $yy_0 = 2p(x + x_0)$.

20. Demostrar que las ecuaciones de las tangentes a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ de pendiente igual a m son, $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$.

21. Dada la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, demostrar que (*a*) la ecuación de la tangente en un punto de ella, $P(x_0, y_0)$, es $b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$, (*b*) las ecuaciones de las tangentes de pendiente m son $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$.

22. Demostrar que la normal a una parábola en un punto de ella P_0 es la bisectriz del ángulo formado por el radio vector de dicho punto y la paralela al eje de la parábola trazada por él.

23. Demostrar que toda tangente a una parábola excepto la del vértice, corta a la directriz y al *latus rectum* (N. del T.: Cuerda perpendicular al eje por el foco) en puntos que equidistan del foco.

24. Demostrar que la cuerda que une los puntos de contacto de las tangentes a una parábola trazada desde un punto de la directriz, pasa por el foco.

25. Demostrar que la normal a una elipse en un punto de ella P_0 es bisectriz del ángulo que forman los radios vectores de dicho P_0.

26. Demostrar que la cuerda que une los puntos de contacto de las tangentes a una hipérbola trazada desde un punto de una directriz pasa por el foco correspondiente.

27. Demostrar que el punto de contacto de una tangente a una hipérbola es el punto medio del segmento de tangente comprendido entre las asíntotas.

28. Demostrar que la pendiente de la tangente a una hipérbola o una elipse en uno de los extremos de su *latus rectum* (*N. del T.*: Cuerda perpendicular al eje—mayor en la elipse y transversal en la hipérbola— por el foco) es numéricamente igual a su excentricidad.

29. Demostrar que (*a*) la suma de las coordenadas en el origen de una tangente cualquiera a la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ es constante, (*b*) la suma de los cuadrados de las coordenadas en el origen de una tangente cualquiera a la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, es constante.

30. Hallar los ángulos agudos de intersección de las circunferencias $x^2 - 4x + y^2 = 0$ y $x^2 + y^2 = 8$. *Sol.* 45.°

31. Demostrar que las curvas $y = x^3 + 2$ e $y = 2x^2 + 2$ tienen una tangente común en el punto $(0, 2)$ y que se cortan en el punto $(2, 10)$ formando un ángulo $\phi = \text{arc tag } 4/97$.

32. Demostrar que la elipse $4x^2 + 9y^2 = 45$ y la hipérbola $x^2 - 4y^2 = 5$ son ortogonales.

33. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal, así como las longitudes de subtangentes, subnormal, tangente y normal, a la parábola $y = 4x^2$ en el punto $(-1, 4)$.
Sol. $y + 8x + 4 = 0$, $8y - x - 33 = 0$; $-\frac{1}{2}$, -32, $\frac{1}{2}\sqrt{65}$, $4\sqrt{65}$.

34. Calcular la longitud de subtangente, subnormal, tangente y normal a la hipérbola $3x^2 - 2y^2 = 10$ en el punto $(-2, 1)$.
Sol. $-1/3$, -3, $\sqrt{10}/3$, $\sqrt{10}$.

35. Determinar en qué puntos de la curva $y = 2x^3 + 13x^2 + 5x + 9$ sus tangentes pasan por el origen.
Sol. $x = -3, -1, 3/4$.

Capítulo 8

Máximos y mínimos

FUNCION CRECIENTE Y DECRECIENTE. Una función $f(x)$ es *creciente* en un punto $x = x_0$ cuando, dado un h positivo e infinitamente pequeño, se verifica: $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$. Análogamente, $f(x)$ es *decreciente* en un punto $x = x_0$ cuando, dado un h positivo e infinitamente pequeño, se verifica: $f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h)$.

Si $f'(x_0) > 0$, la función $f(x)$ es creciente en el punto $x = x_0$ y si $f'(x_0) < 0$, es decreciente en dicho punto. (Ver Problema 17.) Cuando $f'(x_0) = 0$, diremos que la función es *estacionaria* en el punto $x = x_0$.

Una función es creciente (decreciente) en un intervalo, cuando es creciente (decreciente) o estacionaria en cada uno de los puntos del mismo.

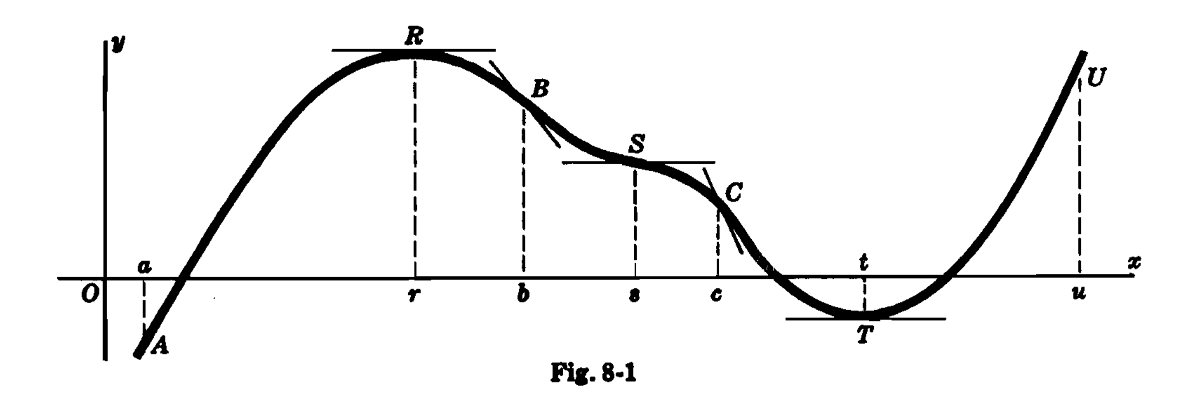


Fig. 8-1

En la Fig. 8-1, la función $y = f(x)$ es creciente en los intervalos $a < x < r$ y $t < x < u$, decreciente en el $r < x < t$ y estacionaria en los puntos $x = r$, $x = s$ y $x = t$. La curva tiene tangente horizontal en los puntos R, S y T. Los valores de x, (r, s y t) para los cuales la función $f(x)$ es estacionaria ($f'(x) = 0$), reciben el nombre de *valores críticos* y los puntos correspondientes de la curva (R, S y T) el de *puntos críticos.*

MAXIMOS Y MINIMOS RELATIVOS DE UNA FUNCION. Una función $y = f(x)$ tiene un *máximo* (*mínimo*) *relativo* en un punto $x = x_0$, cuando $f(x_0)$ es mayor (menor) que los valores de la función para los puntos inmediatamente anteriores y posteriores al considerado. (Ver Problema 1.)

En la Fig. 8-1, $R[r, f(r)]$ es un máximo relativo de la curva puesto que $f(r) > f(x)$ en el entorno $0 < |x - r| < \delta$. En estas condiciones, $y = f(x)$ tiene un *máximo relativo* $[= f(r)]$ en $x = r$. En la misma figura, $T[t, f(t)]$ es un mínimo relativo de la curva puesto que $f(t) < f(x)$ en el entorno $0 < |x - t| < \delta$. Por tanto, $y = f(x)$ tiene un *mínimo relativo* $[= f(t)]$ en $x = t$. Obsérvese que R es el punto de unión de un arco AR ascendente $[f'(x) > 0]$ y otro RB descendente $[f'(x) < 0]$, mientras que T une un arco CT descendente $[f'(x) < 0]$ con otro TU ascendente $[f'(x) > 0]$. En el punto S se unen dos arcos descendentes y, por consiguiente, en él no habrá ni máximo ni mínimo relativo.

Si la función $y = f(x)$ admite derivada en el intervalo $a \leq x \leq b$, y $f(x)$ tiene un máximo (mínimo) relativo en el punto $x = x_0$, siendo $a < x_0 < b$, se verifica $f'(x_0) = 0$. (Ver Problema 18.)

Para determinar los máximos (mínimos) relativos [o simplemente máximos (mínimos)] de una función $f(x)$ continua así como su derivada se puede seguir el siguiente proceso:

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

1. Resolver la ecuación $f'(x_0) = 0$ para calcular los valores críticos.
2. Representar estos valores críticos sobre el eje de abscisas de un sistema coordenado (escala numérica); de esta manera se han establecido un cierto número de intervalos.
3. Determinar el signo de $f'(x)$ en cada uno de los intervalos anteriores.
4. Para cada uno de los valores críticos $x = x_0$:

$f(x)$ tiene un máximo $[= f(x_0)]$, si $f'(x)$ pasa de $+$ a $-$,

$f(x)$ tiene un mínimo $[= f(x_0)]$, si $f'(x)$ pasa de $-$ a $+$,

$f(x)$ no tiene ni máximo ni mínimo en el punto $x = x_0$, si $f'(x)$ no cambia de signo.

(Ver Problemas 2-5.)

UNA FUNCION $y = f(x)$ puede tener máximos o mínimos $[= f(x_0)]$ aunque no exista $f'(x_0)$. Los valores, $x = x_0$, para los cuales $f(x)$ está definida pero no existe $f'(x)$, también reciben el nombre de valores críticos y junto con aquellos otros para los cuales $f'(x) = 0$, han de servir para establecer los intervalos del apartado 2 del párrafo anterior.

(Ver Problemas 6-8.)

Finalmente, se pueden presentar otros casos —de los que aquí no trataremos— en los que $f(x_0)$ tenga máximo (mínimo) aunque no exista un intervalo, $x_0 - \delta < x < x_0$, para el cual $f'(x)$ sea positiva (negativa) ni otro, $x_0 < x < x_0 + \delta$, para el que $f'(x)$ sea negativa (positiva).

CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD. Un arco de curva $y = f(x)$ es cóncavo si en cada uno de sus puntos está situado por encima de la tangente. Al aumentar x, $f'(x)$ o aumenta sin cambiar de signo (como en el intervalo $b < x < s$ de la Fig. 8-1) o cambia de signo pasando de negativa a positiva (como en el intervalo $c < x < u$). En cualquier caso, la pendiente $f'(x)$ aumenta y $f''(x) > 0$.

Un arco de curva $y = f(x)$ es convexo, si en cada uno de sus puntos el arco está situado por debajo de la tangente. Al aumentar x, $f'(x)$ o disminuye sin cambiar de signo (como en el intervalo $s < x < c$) o cambia de signo pasando de positiva a negativa (como en el intervalo $a < x < b$). En cualquier caso, la pendiente $f'(x)$ disminuye y $f''(x) < 0$.

PUNTO DE INFLEXION. Es un punto en el cual la curva pasa de cóncava a convexa o viceversa. En la Fig. 8-1, los puntos B, S y C son de inflexión.

Una curva $y = f(x)$ tiene un punto de inflexión en el punto $x = x_0$

si $f''(x_0) = 0$ ó no está definida y

si $f''(x)$ cambia de signo en un entorno de $x = x_0$.

La última condición equivale a $f'''(x_0) \neq 0$ cuando existe la tercera derivada $f'''(x_0)$.

(Ver Problemas 9-13.)

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

1. Resolver la ecuación $f'(x) = 0$ para calcular los valores críticos.
2. Para cada uno de los valores críticos $x = x_0$:

   $f(x)$ tiene un máximo $[= f(x_0)]$, si $f''(x_0) < 0$,

   $f(x)$ tiene un mínimo $[= f(x_0)]$, si $f''(x_0) > 0$,

   si $f''(x_0) = 0$ ó se hace infinito, nada se puede afirmar.

En este último caso hay que recurrir al criterio de la primera derivada.

(Ver Problemas 14-16.)

Problemas resueltos

1. (*a*) $y = -x^2$ tiene un máximo relativo (= 0) en $x = 0$, puesto que $y = 0$ para $x = 0$ e $y < 0$ para $x \neq 0$.

   (*b*) $y = (x - 3)^2$ tiene un mínimo relativo (= 0) en $x = 3$, puesto que $y = 0$ para $x = 3$ e $y > 0$ para $x \neq 3$.

   (*c*) $y = \sqrt{25 - 4x^2}$ tiene un máximo relativo (= 5) en $x = 0$, puesto que $y = 5$ para $x = 0$ e $y < 5$ en el intervalo $-1 < x < 1$.

   (*d*) $y = \sqrt{x - 4}$ no tiene ni máximos ni mínimos relativos. [Algunos autores definen los máximos y mínimos relativos, de forma que esta función tiene un máximo relativo en el punto $x = 4$. Ver Problema 30.]

2. Dada la función $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$, calcular:

   (*a*) Puntos críticos.

   (*b*) Intervalos en los cuales y es creciente y decreciente.

   (*c*) Máximos y mínimos de y.

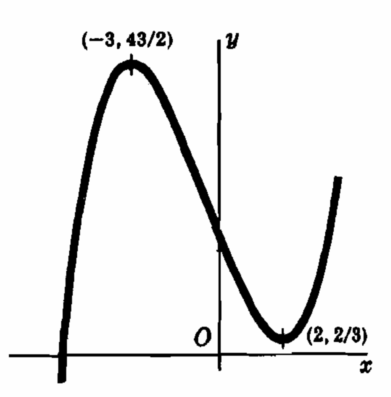


Fig. 8-2

   (*a*) $y' = x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$

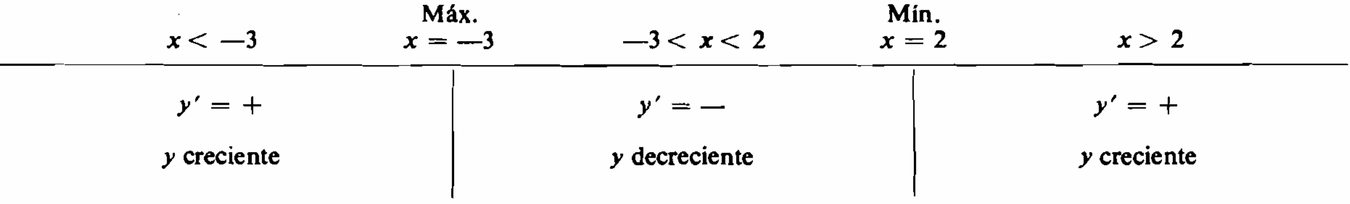
   Resolviendo $y' = 0$, obtenemos los valores críticos $x = -3, 2$.
   Los puntos críticos son $(-3, 43/2)$, $(2, 2/3)$.

   (*b*) Cuando y' es positiva, y es creciente; cuando y' es negativa, y es decreciente.



   Cuando $x < -3$, por ejemplo $x = -4$, $y' = (-)(-) = +$, e y es creciente.
   Cuando $-3 < x < 2$, por ejemplo $x = 0$, $y' = (+)(-) = -$, e y es decreciente.
   Cuando $x > 2$, por ejemplo $x = 3$, $y' = (+)(+) = +$, e y es creciente.

   En el siguiente diagrama se representan estos resultados.



$x < -3$	Máx. $x = -3$	$-3 < x < 2$	Mín. $x = 2$	$x > 2$
$y' = +$		$y' = -$		$y' = +$
y creciente		y decreciente		y creciente

   (*c*) Veamos si hay máximo o mínimo en los valores críticos $x = -3, 2$.

   Al ir aumentando x al pasar por -3, y' cambia de signo, de $+$ a $-$. Por tanto en $x = -3$, y tiene un máximo, igual a $43/2$.

   Al ir aumentando x al pasar por 2, y' cambia de signo, de $-$ a $+$. Por tanto, en $x = 2$, y tiene un mínimo igual a $2/3$,

3. Dada la función $y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$, calcular:

(a) Intervalos en los que y es creciente y decreciente.
(b) Máximos y mínimos de y.

$y' = 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4 = 2(x+2)(2x+1)(x-1)$
Resolviendo $y' = 0$ obtenemos los valores críticos $x = -2, -\frac{1}{2}, 1$.

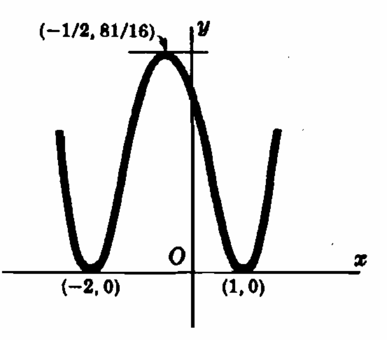


Fig. 8-3

(a) Cuando $x < -2$, $y' = 2(-)(-)(-) = -$, e y es decreciente.
Cuando $-2 < x < -\frac{1}{2}$, $y' = 2(+)(-)(-) = +$, e y es creciente.
Cuando $-\frac{1}{2} < x < 1$, $y' = 2(+)(+)(-) = -$, e y es decreciente.
Cuando $x > 1$, $y' = 2(+)(+)(+) = +$, e y es creciente.



En el siguiente diagrama se representan estos resultados.

$x < -2$	Mín. $x = -2$	$-2 < x < -\frac{1}{2}$	Máx. $x = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 1$	Mín. $x = 1$	$x > 1$
$y' = -$ y decrece		$y' = +$ y crece		$y' = -$ y decrece		$y' = +$ y crece

(b) Veamos si hay máximo o mínimo en los valores críticos $x = -2, -\frac{1}{2}, 1$.

Al ir aumentando x al pasar por -2, y' cambia de signo de $-$ a $+$. Por tanto, en $x = -2$, y tiene un mínimo igual a 0.

Al ir aumentando x al pasar por $-\frac{1}{2}$, y' cambia de signo, de $+$ a $-$. Por tanto, en $x = -\frac{1}{2}$, y tiene un máximo igual a 81/16.

Al ir aumentando x al pasar por 1, y' cambia de signo, de $-$ a $+$. Por tanto, en $x = 1$, y tiene un mínimo igual a 0.

4. Demostrar que la función $y = x^3 - 8$ no tiene máximos ni mínimos.

$y' = 3x^2$. De la ecuación $y' = 0$, se obtiene $x = 0$.
Para $x < 0$ y $x > 0$, $y' > 0$. Por tanto, no hay máximos ni mínimos.
En $x = 0$ la curva presenta un punto de inflexión.

5. Hallar los máximos y mínimos de la función $y = f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, determinando los intervalos en los que la función es creciente y decreciente.

$f'(x) = -\dfrac{1}{(x-2)^2}$. Como $f(2)$ no está definida (e.d., $f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a 2) no hay valores críticos. Sin embargo, para determinar los intervalos en los que la función es creciente y decreciente se acude al punto $x = 2$.

$f'(x) < 0$ siempre que $x \neq 2$. Por tanto, $f(x)$ es decreciente en los intervalos $x < 2$ y $x > 2$.

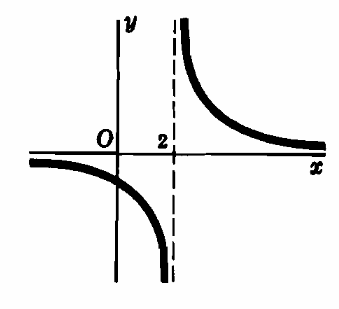


Fig. 8-4

6. Hallar los máximos y mínimos de la función $f(x) = 2 + x^{2/3}$ determinando los intervalos en los que la función es creciente y decreciente.

$f'(x) = \dfrac{2}{3x^{1/3}}$. El valor crítico es $x = 0$, ya que $f'(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a 0.

Para $x < 0, f'(x) < 0$, y $f(x)$ es decreciente.
Para $x > 0, f'(x) > 0$, y $f(x)$ es creciente.
Por tanto, en $x = 0$, la función tiene un mínimo igual a 2.

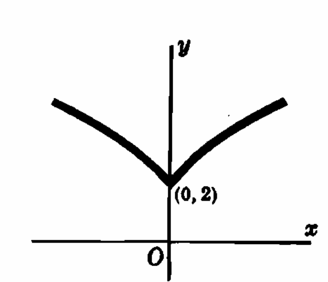


Fig. 8-5

7. Hallar los máximos y mínimos de la función $y = x^{4/3}(1-x)^{1/3}$.

Derivando, $y' = \dfrac{x^{1/3}(4-5x)}{3(1-x)^{2/3}}$ y los valores críticos son $x = 0$, 4/5 y 1.

Para $x < 0$, $y' < 0$; en el intervalo $0 < x < 4/5$, $y' > 0$; en $4/5 < x < 1$, $y' < 0$.
Para $x > 1$, $y' < 0$. La función tiene un mínimo (igual a 0) en $x = 0$ y un máximo (igual a $\frac{4}{25}\sqrt[3]{20}$) en $x = 4/5$.

8. Hallar los máximos y mínimos de la función $y = |x|$.

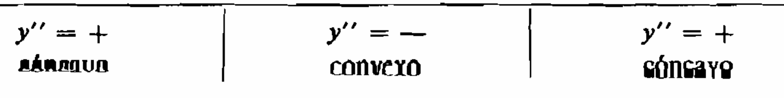
La función está definida para todos los valores de x y existe su derivada en todos ellos excepto en $x = 0$. (Ver Problema 11, Capítulo 4). Por tanto, $x = 0$ es un valor crítico. Para $x < 0$, $f'(x) = -1$, mientras que para $x > 0$, $f'(x) = +1$. La función tiene un mínimo $(= 0)$ en $x = 0$. Dibujando la función se llegaría de forma inmediata a este resultado.

9. Determinar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función $y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$.

$$y' = 12x^3 - 30x^2 - 24x + 12$$
$$y'' = 36x^2 - 60x - 24 = 12(3x + 1)(x - 2)$$

Resolviendo $y'' = 0$ obtenemos los posibles puntos de inflexión $x = -1/3, 2$.

Cuando $x < -1/3$, $y'' = +$, y el arco es cóncavo.
Cuando $-1/3 < x < 2$, $y'' = -$, y el arco es convexo.
Cuando $x > 2$, $y'' = +$, y el arco es cóncavo.



$x < -1/3$	$x = -1/3$	$-1/3 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$y'' = +$ cóncavo		$y'' = -$ convexo		$y'' = +$ cóncavo

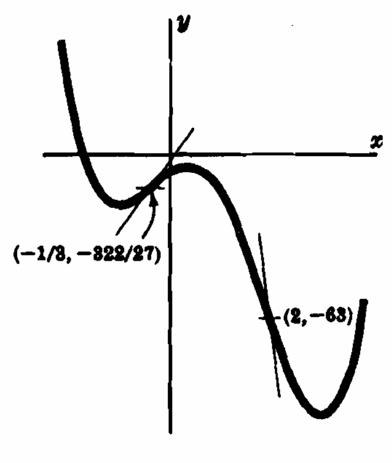


Fig. 8-6

Los puntos de inflexión son $(-1/3, -322/27)$ y $(2, -63)$, ya que y'' cambia de signo en $x = -1/3$ y $x = 2$.

10. Determinar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función $y = x^4 - 6x + 2$. Ver Fig. 8-7.

$y'' = 12x^2$. En $x = 0$ puede presentar un punto de inflexión.

En los intervalos $x < 0$ y $x > 0$, $y'' > 0$; los arcos son cóncavos. El punto $P(0, 2)$ no es de inflexión.

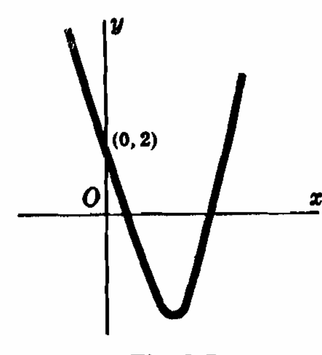


Fig. 8-7

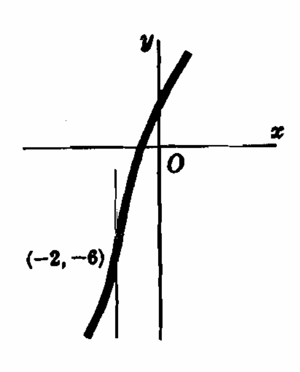


Fig. 8-8

11. Determinar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función $y = 3x + (x + 2)^{3/5}$. Ver Fig. 8-8.

$$y' = 3 + \frac{3}{5(x + 2)^{2/5}} \qquad y'' = \frac{-6}{25(x + 2)^{7/5}}$$

En $x = -2$, puede presentar un punto de inflexión.

Para $x > -2$, $y'' < 0$; el arco es convexo.
Para $x < -2$, $y'' > 0$; el arco es cóncavo.

El punto $(-2, -6)$ es un punto de inflexión.

12. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la curva $y = f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$ en sus puntos de inflexión.

$$y = f(x) = x^4 - 6x^3 + 12^2 - 8x$$

Para $x = x_0$ existe un punto de inflexión si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$.

$$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8$$
$$f''(x) = 12x^2 - 36x + 24 = 12(x-1)(x-2)$$
$$f'''(x) = 24x - 36 = 12(2x-3)$$

Los posibles puntos de inflexión son $x = 1, 2$. Como $f'''(1) \neq 0$ y $f'''(2) \neq 0$, los puntos $(1, -1)$ y $(2, 0)$ son de inflexión:

En el punto $(1, -1)$, la pendiente $m = f'(1) = 2$ y la ecuación de la tangente es

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{o sea} \quad y + 1 = 2(x-1) \quad \text{o} \quad y = 2x - 3$$

En el punto $(2, 0)$, la pendiente $m = f'(2) = 0$, y la ecuación de la tangente es $y = 0$.

13. Demostrar que los puntos de inflexión de $y = \dfrac{a-x}{x^2+a^2}$ están situados sobre una recta y deducir su ecuación.

$$y' = \frac{x^2 - 2ax - a^2}{(x^2+a^2)^2} \quad \text{e} \quad y'' = -2\,\frac{x^3 - 3ax^2 - 3a^2x + a^3}{(x^2+a^2)^3}$$

Los valores de $x = -a, a(2 \pm \sqrt{3})$, son las raíces de la ecuación $x^3 - 3ax^2 - 3a^2x + a^3 = 0$; los puntos de inflexión son: $[-a, 1/a]$, $[a(2+\sqrt{3}), (1-\sqrt{3})/4a]$, $[a(2-\sqrt{3}), (1+\sqrt{3})/4a]$. La pendiente de la recta que pasa por dos cualesquiera de estos puntos es $-1/4a^2$, y la ecuación de la recta que los une, $x + 4a^2y = 3a$.

14. Hallar los máximos y mínimos de la función $f(x) = x(12 - 2x)^2$ aplicando el criterio de la segunda derivada.

(*a*) $f'(x) = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x-2)(x-6)$. Los valores críticos son $x = 2, 6$.

(*b*) $f''(x) = 12(2x - 8) = 24(x - 4)$.

(*c*) $f''(2) < 0$. Por tanto $f(x)$ tiene un máximo igual a 128 para $x = 2$.
$f''(6) > 0$. Por tanto $f(x)$ tiene un mínimo igual a 0 para $x = 6$.

15. Hallar los máximos y mínimos de la función $y = x^2 + \dfrac{250}{x}$ aplicando el criterio de la segunda derivada.

(*a*) $y' = 2x - \dfrac{250}{x^2} = \dfrac{2(x^3 - 125)}{x^2}$. El valor crítico es $x = 5$.

(*b*) $y'' = 2 + \dfrac{500}{x^3}$

(*c*) $y'' > 0$ para $x = 5$. Por tanto tiene un mínimo igual a 75 para $x = 5$.

16. Hallar los máximos y mínimos de la función $y = (x-2)^{2/3}$.

(*a*) $y' = \dfrac{2}{3}(x-2)^{-1/3} = \dfrac{2}{3(x-2)^{1/3}}$. El valor crítico es $x = 2$.

(*b*) $y'' = -\dfrac{2}{9}(x-2)^{-4/3} = -\dfrac{2}{9(x-2)^{4/3}}$

(*c*) Como y'' tiende a infinito cuando x tiende a 2, hay que acudir al criterio de la primera derivada. Para $x < 2$, $y' < 0$; para $x > 2$, $y' > 0$. Por tanto, y presenta un mínimo relativo, igual a 0, en el punto $x = 2$.

17. Una función $f(x)$ es creciente en el punto $x = x_0$, si, dado un $h > 0$ y suficientemente pequeño, se verifica: $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$.

Demostrar que si $f'(x_0) > 0$, la función $f(x)$ es creciente en el punto $x = x_0$.

Como $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) > 0$, tendremos $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$ para un $|\Delta x|$ suficientemente pequeño, Problema 4, Capítulo 3.

Si $\Delta x < 0$, $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$, y haciendo $\Delta x = -h$, $f(x_0 - h) < f(x_0)$. Si $\Delta x > 0$, por ejemplo $\Delta x = h$, $f(x_0 + h) > f(x_0)$. Es decir, $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$, que es lo establecido en la definición.

Ver Problema 33 para una función decreciente.

18. Demostrar que si $y = f(x)$ admite derivada en el intervalo $a \leq x \leq b$, y $f(x)$ presenta un máximo relativo en el punto $x = x_0$, siendo $a < x_0 < b$, se verifica $f'(x_0) = 0$.

Como $f(x)$ presenta un máximo relativo en $x = x_0$, para todo Δx, siendo $|\Delta x|$ suficientemente pequeño,

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0) \quad \text{y} \quad f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$$

Ahora bien cuando $\Delta x < 0$, $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$ y $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0$.

y cuando $\Delta x > 0$, $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$ y $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0$.

Por tanto, $0 \leq f'(x_0) \leq 0$, y $f'(x_0) = 0$, como se quería demostrar. Ver Problema 34 para el mínimo relativo.

19. Demostrar el criterio de la segunda derivada para hallar máximos y mínimos: Si $f(x)$ y $f'(x)$ admiten derivada en el intervalo $a \leq x \leq b$, el punto $x = x_0$, siendo $a < x_0 < b$, representa un valor crítico de $f(x)$, y $f''(x_0) > 0$, la función $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = x_0$.

Como $f''(x_0) > 0$, $f'(x)$ es creciente en $x = x_0$ y existirá un $h > 0$ tal, que $f'(x_0 - h) < f'(x_0) < f'(x_0 + h)$. Por tanto, para valores de x inferiores a x_0, $f'(x) < f'(x_0)$, y para valores de x superiores a x_0, $f'(x) > f'(x_0)$. Ahora bien, como $f'(x_0) = 0$, $f'(x) < 0$ para $x < x_0$, y $f'(x) > 0$ para $x > x_0$. Estas son las condiciones (ver Problema 18) que aseguran la existencia de un mínimo relativo de la función $f(x)$ en el punto $x = x_0$. Se deja para el alumno, la demostración del teorema análogo para el máximo relativo.

20. Consideremos el problema de situar sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ un punto (X, Y) cuya distancia a uno dado $P(a, 0)$, siendo $a > 0$, sea mínima. De la expresión que da la distancia entre dos puntos, se deduce $D^2 = (X - a)^2 + Y^2$, y por pertenecer el punto (X, Y) a la hipérbola, $X^2 - Y^2 = 1$.

Expresando D^2 en función X solamente, resulta:

$$f(X) = (X - a)^2 + X^2 - 1 = 2X^2 - 2aX + a^2 - 1$$

cuyo valor crítico de esta función es $X = \frac{1}{2}a$.

Si tomamos $a = \frac{1}{2}$, no habrá ningún punto sobre la hipérbola, porque Y se hace imaginario para el valor crítico $X = \frac{1}{4}$. Dibujando la figura correspondiente se vería claramente que el punto de la hipérbola más próximo al $P(\frac{1}{2}, 0)$ es el $V(1, 0)$. Por tanto, lo que se trata en este caso es hallar el mínimo de la función $f(X) = (X - \frac{1}{2})^2 + X^2 - 1$ con la condición de que $X \geq 1$. (Obsérvese que esta condición no la lleva implícitamente la función $f(X)$. Esta función, sin poner condición alguna, presenta un mínimo relativo en el punto $X = \frac{1}{4}$.) En el intervalo $X \geq 1$, $f(X)$ tiene un mínimo absoluto en el extremo $X = 1$, que no es un mínimo relativo. Se deja como ejercicio para el alumno el estudio del problema cuando (i) $a = \sqrt{2}$ y (ii) $a = 3$.

Problemas propuestos

21. Determinar los intervalos en los que son crecientes y decrecientes cada una de las funciones del Problema 1.
Sol. (*a*) Crec. $x < 0$; Dec. $x > 0$. (*b*) Crec. $x > 3$, Dec. $x < 3$. (*c*) Crec. $-5/2 < x < 0$; Dec. $0 < x < 5/2$. (*d*) Crec. $x > 4$.

22. (*a*) Demostrar que $y = x^5 + 20x - 6$ es una función creciente para todos los valores de x.
(*b*) Demostrar que $y = 1 - x^3 - x^7$ es una función decreciente para todos los valores de x.

23. Hallar los máximos y mínimos, aplicando el criterio de la primera derivada, de las funciones siguientes:

(*a*) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ — *Sol.* $x = -1$ mínimo relativo $= -4$
(*b*) $f(x) = 3 + 2x - x^2$ — *Sol.* $x = 1$ máximo relativo $= 4$
(*c*) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ — *Sol.* $x = \frac{2}{3}$ mínimo relativo $= -256/27$; $x = -2$ máximo relativo $= 0$
(*d*) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$ — *Sol.* $x = 1$ máximo relativo $= -4$; $x = 3$ máximo relativo $= -8$
(*e*) $f(x) = (2 - x)^3$ — *Sol.* No tiene ni máx. ni mín. relativos
(*f*) $f(x) = (x^2 - 4)^2$ — *Sol.* $x = 0$ máximo relativo $= 16$; $x = \pm 2$ mínimo relativo $= 0$

(*g*) $f(x) = (x - 4)^4 (x + 3)^3$ *Sol.* $x = 0$ máximo relativo $= 6\,912$
$x = 4$ mínimo relativo $= 0$
$x = -3$ ni máximo ni mínimo

(*h*) $f(x) = x^3 + 48/x$ *Sol.* $x = -2$ máximo relativo $= -32$
$x = 2$ mínimo relativo $= 32$

(*i*) $f(x) = (x - 1)^{1/3} (x + 2)^{2/3}$ *Sol.* $x = -2$ máximo relativo $= 0$
$x = 0$ mínimo relativo $= -\sqrt[3]{4}$
$x = 1$ ni máximo ni mínimo

24. Hallar los máximos y mínimos de las funciones del Problema 23 (*a*)-(*f*) aplicando el criterio de la segunda derivada. Determinar, asimismo, los puntos de inflexión y los intervalos en los que la curva es cóncava o convexa.

Sol. (*a*) No tiene P.I.; es siempre cóncava.
(*b*) No tiene P.I.; es siempre convexa.
(*c*) P.I. en $x = -2/3$; cóncava para $x > -2/3$; convexa para $x < -2/3$.
(*d*) P.I. en $x = 2$; cóncava para $x > 2$; convexa para $x < 2$.
(*e*) P.I. en $x = 2$; convexa para $x > 2$; cóncava para $x < 2$.
(*f*) P.I en $x = \pm 2\sqrt{3}/3$; cóncava para $x > 2\sqrt{3}/3$ y $x < -2\sqrt{3}/3$; convexa en $-2\sqrt{3}/3 < x < 2\sqrt{3}/3$.

25. Demostrar que la función $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, carece de máximos y mínimos relativos.

26. Hallar los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^3 - 3px + q$.
Sol. Mín. $= q - 2p^{3/2}$, Máx. $= q + 2p^{3/2}$ si $p > 0$; en los demás casos, ni máximo ni mínimo.

27. Demostrar que $y = (a_1 - x)^2 + (a^2 - x)^2 + \cdots + (a_n - x)^2$ tiene un mínimo relativo cuando $x = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$.

28. Demostrar que si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$ hay un punto de inflexión en el punto $x = x_0$.

29. Demostrar que si $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene dos puntos críticos, en el punto medio del segmento que une los correspondientes valores críticos la función presenta un punto de inflexión, y que si solo tiene un punto crítico, éste es de inflexión.

30. Una función tiene un máximo (mínimo) absoluto en un punto $x = x_0$, cuando $f(x_0)$ es mayor (menor) o igual a cualquier otro valor de la función en su dominio de definición. Comprobar, gráficamente que (*a*) $y = -x^2$ tiene un máximo absoluto en el punto $x = 0$; (*b*) $y = (x - 3)^2$ tiene un mínimo absoluto ($= 0$) en el punto $x = 3$; (*c*) $y = \sqrt{25 - 4x^2}$ tiene un máximo absoluto ($= 5$) en $x = 0$ y un mínimo absoluto ($= 0$) en $x = \pm 5/2$; (*d*) $y = \sqrt{x - 4}$ tiene un mínimo absoluto ($= 0$) en $x = 4$.

31. Hallar los máximos y mínimos de las funciones siguientes en los intervalos dados:

(*a*) $y = -x^2$ en $-2 < x < 2$ *Sol.* Máx. ($= 0$) en $x = 0$
(*b*) $y = (x - 3)^2$ en $0 \leq x \leq 4$ *Sol.* Máx. ($= 9$) en $x = 0$
Mín. ($= 0$) en $x = 3$
(*c*) $y = \sqrt{25 - 4x^2}$ en $-2 \leq x \leq 2$ *Sol.* Máx. ($= 5$) en $x = 0$
Mín. ($= 3$) en $x = \pm 2$
(*d*) $y = \sqrt{x - 4}$ en $4 \leq x \leq 29$ *Sol.* Máx. ($= 5$) en $x = 29$
Mín. ($= 0$) en $x = 4$

Nota. Estos son los valores máximos y mínimos de los que se habla en la Propiedad II, Capítulo 3, de las funciones continuas.

32. Demostrar que una función $f(x)$ es creciente (decreciente) en un punto $x = x_0$, si el ángulo de inclinación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = x_0$ es agudo (obtuso).

33. Enunciar y demostrar el teorema análogo al del Problema 17 para una función decreciente.

34. Enunciar y demostrar el teorema análogo al del Problema 18 para el mínimo relativo.

35. Hallar los máximos y mínimos de la función $2x^2 - 4xy + 3y^2 - 8x + 8y - 1 = 0$.
Sol. Máx. en (5,3); mín en (—1, —3).

36. La fuerza ejercida por el campo magnético creado por la corriente eléctrica que circula por una bobina de radio r sobre un pequeño imán situado a una distancia x del centro de dicha bobina viene dado por $F = \dfrac{kx}{(x^2 + r^2)^{5/2}}$. Demostrar que F es máximo en $x = \frac{1}{2}r$.

37. El trabajo realizado por una pila de fuerza electromotriz constante E y resistencia interna r conectada a una resistencia de carga R, es proporcional a $E^2R/(r + R)^2$. Demostrar que dicho trabajo es máximo para $R = r$.

Capítulo 9

Problemas de aplicación de máximos y mínimos

PROBLEMAS DE MAXIMOS Y MINIMOS. Normalmente, en los problemas de aplicación no será necesario demostrar la existencia de un máximo o de un mínimo relativo. De un estudio previo se puede obtener la elección adecuada del valor crítico.

A veces, un máximo o un mínimo relativo de una función son un máximo o un mínimo *absolutos.* En estos casos están justificados los términos *máximo*, mayor que, menor que, etc., que figuran en los enunciados de los problemas.

Problemas resueltos

1. Hallar dos números cuya suma sea 120 y de forma que el producto P de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

Sean x y $120 - x$ dichos números. Por consiguiente, $P = (120 - x)x^2$. $dP/dx = 3x(80 - x)$. Los valores críticos son $x = 0$ y $x = 80$.

Prescindiendo de la solución trivial $x = 0$, los números pedidos son $x = 80$ y $120 - x = 40$.

2. El área de una superficie rectangular es de 18 m². Sabiendo que en su interior hay otra de forma que los márgenes superior e inferior son de 3/4 m y que los márgenes laterales son de 1/2 m, hallar las dimensiones de la superficie exterior para que el área comprendida entre los márgenes sea máxima.

Sean x = longitud $18/x$ = anchura de la superficie, en metros. (Ver figura 9-1.)

El área entre márgenes es $A = (x - 1)\left(\dfrac{18}{x} - \dfrac{3}{2}\right)$.

$\dfrac{dA}{dx} = \dfrac{18}{x^2} - \dfrac{3}{2}$. De la ecuación $\dfrac{dA}{dx} = 0$, se obtiene el valor crítico $x = 2\sqrt{3}$.

Las dimensiones de la superficie exterior son $x = 2\sqrt{3}$ y $18/x = 3\sqrt{3}$ m.

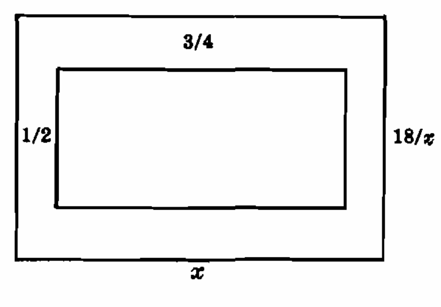


Fig. 9-1

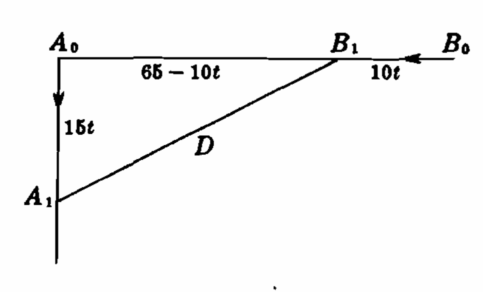


Fig. 9-2

3. En un instante determinado, un barco B se encuentra a 65 millas al este de otro barco A. El barco B empieza a navegar hacia el oeste con una velocidad de 10 millas hora, mientras que el A lo hace hacia el Sur con una velocidad de 15 millas/h. Sabiendo que las rutas iniciadas no se modifican, calcular el tiempo que transcurrirá hasta que la distancia que los separe sea mínima y hallar dicha distancia.

Sean A_0 y B_0 las posiciones de los barcos A y B en el instante inicial, y A_1 y B_1 sus respectivas posiciones t horas más tarde. La distancia recorrida por A en t horas es 15 t millas y la recorrida por B, 10 t millas.

La distancia D entre los barcos viene dada por $D^2 = (15t)^2 + (65 - 10t)^2$.

$\frac{dD}{dt} = \frac{325t - 650}{D}$. De la ecuación $\frac{dD}{dt} = 0$, se obtiene el valor crítico $t = 2$ para el cual la distancia es mínima.

Para $t = 2$, la función $D^2 = (15t)^2 + (65 - 10t)^2$ toma el valor $D = 15\sqrt{13}$ millas.

La distancia mínima entre los dos barcos es de $15\sqrt{13}$ millas y se produce 2 horas después de iniciarse el movimiento.

4. Se quiere construir un recipiente cilíndrico metálico de base circular y de 64 centímetros cúbicos de volumen. Hallar las dimensiones que debe tener para que la cantidad de metal (área total) sea mínima, en el caso en que (*a*) el recipiente sea abierto y (*b*) sea cerrado.

Sean r y h el radio de la base y la altura en centímetros, A la cantidad de metal y V el volumen del recipiente.

(*a*) $V = \pi r^2 h = 64$ y $A = 2\pi rh + \pi r^2$.

Para expresar A en función de una sola variable se despeja h de la primera relación y se sustituye en la segunda; resulta $A = 2\pi r(64/\pi r^2) + \pi r^2 = 128/r + \pi r^2$.

$\frac{dA}{dr} = -\frac{128}{r^2} + 2\pi r = \frac{2(\pi r^3 - 64)}{r^2}$, y el valor crítico es $r = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$.

Por tanto, $h = 64/\pi r^2 = 4/\sqrt[3]{\pi}$, y $r = h = 4\sqrt[3]{\pi}$ cm.

(*b*) $V = \pi r^2 h = 64$, y $A = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(64/\pi r^2) + 2\pi r^2 = 128/r + 2\pi r^2$.

$\frac{dA}{dr} = -\frac{128}{r^2} + 4\pi r = \frac{4(\pi r^3 - 32)}{r^2}$, y el valor crítico es $r = 2\sqrt[3]{4/\pi}$

Por tanto, $h = 64/\pi r^2 = 4\sqrt[3]{4/\pi}$, y $h = 2r = 4\sqrt[3]{4/\pi}$ cm.

5. El coste total de producción de x unidades diarias de un producto es de $(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25)$ pesetas, y el precio de venta de una de ellas es de $(50 - \frac{1}{2}x)$ pesetas.

(*a*) Hallar el número de unidades que se deben vender diariamente para que el beneficio sea máximo.
(*b*) Demostrar que el coste de producción de una unidad tiene un mínimo relativo.

(*a*) El beneficio de la venta de x unidades diarias es $P = x(50 - \frac{1}{2}x) - (\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25)$.

$\frac{dP}{dx} = 15 - \frac{3x}{2}$. Resolviendo $dP/dx = 0$ obtenemos el valor crítico $x = 10$.

Por tanto, la producción que proporciona el mayor beneficio es de 10 unidades al día.

(*b*) El coste de producción de una unidad es $C = \frac{(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25)}{x} = \left(\frac{1}{4}x + 35 + \frac{25}{x}\right)$ pts.

$\frac{dC}{dx} = \frac{1}{4} - \frac{25}{x^2}$. Resolviendo $dC/dx = 0$ resulta $x = 10$, un mínimo.

6. El coste del combustible que consume una locomotora es proporcional al cuadrado de la velocidad y vale 1 600 pesetas por hora cuando la velocidad es de 40 kilómetros por hora. Independientemente de la velocidad, el coste por hora se incrementa, por otras causas, en 3 600 pesetas por hora. Calcular la velocidad a la que debe ir la locomotora para que el coste por kilómetro sea mínimo.

Sea v = velocidad buscada y C = coste total por kilómetro.

Coste de combustible por hora $= kv^2$, siendo k una constante que podemos determinar sabiendo que para $v = 40$, $kv^2 = 1\,600\ v^2 = 1\,600$, de donde resulta $k = 1$.

$C(\text{pts/km}) = \frac{\text{coste (pts/h)}}{\text{velocidad (km/h)}} = \frac{v^2 + 3\,600}{v} = v + \frac{3\,600}{v}$

$\frac{dc}{dv} = 1 - \frac{3\,600}{v^2} = \frac{(v - 60)(v + 60)}{v^2}$. Como $v > 0$, la única solución posible para el valor crítico es $v = 60$.

Así pues, la velocidad más económica es la de 60 kilómetros por hora.

7. Un hombre, sobre un bote de remos, está situado en un punto P a una distancia de 5 kilómetros de un punto A de la costa (rectilínea) y desea llegar a un punto B de la costa a 6 kilómetros de A en el menor tiempo posible. Determinar el camino que debe seguir sabiendo que puede remar a una velocidad de 2 kilómetros por hora y andar a una velocidad de 4 kilómetros por hora.

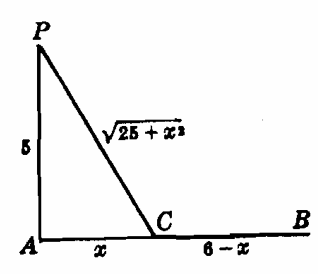


Fig. 9-3

Sea C el punto situado entre A y B al que se dirige el hombre, y llamemos x a la distancia AC

El espacio que ha de recorrer en bote es $PC = \sqrt{25 + x^2}$ y el tiempo empleado, $t_1 = \dfrac{\text{espacio}}{\text{velocidad}} = \dfrac{\sqrt{25 + x^2}}{2}$.

El espacio que ha de recorrer andando por la costa es $CB = 6 - x$ y el tiempo empleado, $t_2 = (6 - x)\frac{1}{4}$.

El tiempo total es $t = t_1 + t_2 = \frac{1}{2}\sqrt{25 + x^2} + \frac{1}{4}(6 - x)$.

$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{x}{2\sqrt{25 + x^2}} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{2x - \sqrt{25 + x^2}}{4\sqrt{25 + x^2}}$ y el valor crítico, obtenido de la ecuación $2x - \sqrt{25 + x^2} = 0$, es $x = \frac{5}{3}\sqrt{3} = 2{,}89$. Por tanto, deberá dirigirse a un punto situado entre A y B, a 2,89 kilómetros de A.

8. Se quiere poner una alambrada para proteger el contorno de un campo rectangular de área dada y uno de cuyos bordes lo constituye el cauce de un río. Sabiendo que en este borde no hay que colocar alambrada, demostrar que la menor cantidad de alambrada que se necesita es cuando la longitud del campo es igual al doble de su anchura.

Sea x = longitud e y = anchura del campo. Area $= xy$. Alambrada necesaria, $F = x + 2y$.

$dF/dx = 1 + 2\,dy/dx$. Para que $dF/dx = 0$ deberá ser $dy/dx = -\frac{1}{2}$.

$dA/dx = 0 = y + x\,dy/dx$. Por tanto, $y - \frac{1}{2}x = 0$, esto es $x = 2y$ como se quería demostrar.

9. Hallar las dimensiones del cono recto circular de volumen mínimo que se puede circunscribir a una esfera de 8 cm de diámetro.

Sea x = radio de la base del cono e $y + 8$ = altura del cono.

De los triángulos rectángulos semejantes ABC y AED, deducimos

$\dfrac{x}{8} = \dfrac{y + 8}{\sqrt{y^2 - 64}}$. De donde $x^2 = \dfrac{64(y + 8)^2}{y^2 - 64} = \dfrac{64(y + 8)}{y - 8}$.

Volumen del cono, $V = \dfrac{(\pi x^2)(y + 8)}{3} = \dfrac{64\pi(y + 8)^2}{3(y - 8)}$.

$\dfrac{dV}{dy} = \dfrac{64\pi(y + 8)(y - 24)}{3(y - 8)^2}$. El valor crítico es $y = 24$.

Altura del cono $= y + 8 = 32$ cm; radio de la base $= x = 8\sqrt{2}$ cm.

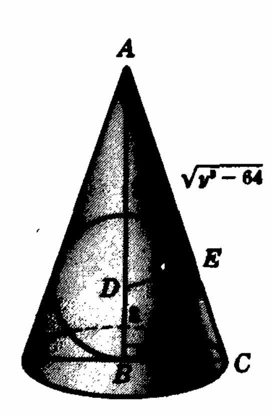


Fig. 9-4

10. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en la porción de parábola $y^2 = 4px$ limitada por la recta $x = a$.

Sea $PBB'P'$ el rectángulo y (x,y) las coordenadas de P. (Ver Fig. 9-5).

Area del rectángulo, $A = 2y(a - x) = 2y(a - y^2/4p) = 2ay - y^3/2p$.

$dA/dy = 2a - 3y^2/2p$. Resolviendo $dA/dy = 0$, el valor crítico es $y = \sqrt{4ap/3}$.

Las dimensiones del rectángulo son $2y = \frac{4}{3}\sqrt{3ap}$ y $a - x = a - y^2/4p = 2a/3$.

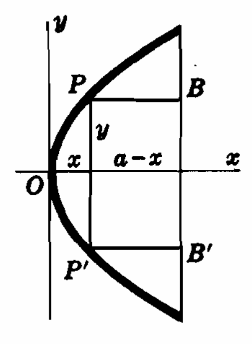
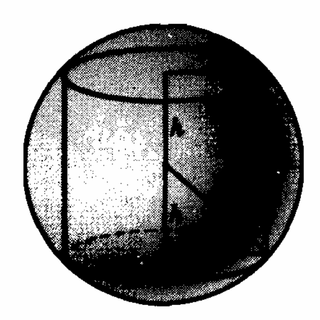


Fig. 9-5


Fig. 9-6

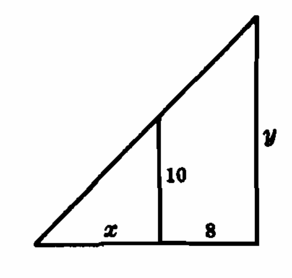


Fig. 9-7

11. Hallar la altura del cilindro circular recto de volumen máximo V que se puede inscribir en una esfera de radio R (Ver Fig. 9-6.)

Sea r el radio de la base y $2h$ la altura del cilindro.

$V = 2\pi r^2 h$ y $r^2 + h^2 = R^2$. Por tanto, $dV/dr = 2\pi(r^2\,dh/dr + 2rh)$ y $2r + 2h\,dh/dr = 0$.

De la última relación, $dh/dr = -r/h$. Por tanto, $dV/dr = 2\pi(-r^3/h + 2rh)$.

Cuando V es máximo, $dV/dr = 2\pi(-r^3/h + 2\pi h) = 0$ y $r^2 = 2h^2$.

Como $r^2 + h^2 = R^2$, $2h^2 + h^2 = R^2$ y $h = R/\sqrt{3}$. Altura del cilindro $= 2h = 2R/\sqrt{3}$.

12. Se quiere apuntalar la pared de un edificio por medio de una viga apoyada sobre una pared paralela, de 10 m de altura, situada a una distancia de 8 m de la primera. Hallar la longitud L de la viga más corta que se puede emplear al efecto.

Sea x la distancia del pie de la viga al de la pared paralela, e y la distancia metros del suelo al extremo superior. de la viga. (Ver Fig. 9-7.)

$L = \sqrt{(x+8)^2 + y^2}$. De los triángulos semejantes, $\dfrac{y}{10} = \dfrac{x+8}{x}$ e $y = \dfrac{10(x+8)}{x}$.

Por tanto $L = \sqrt{(x+8)^2 + \dfrac{100(x+8)^2}{x^2}} = \dfrac{x+8}{x}\sqrt{x^2+100}$ y

$$\frac{dL}{dx} = \frac{x[(x^2+100)^{1/2} + x(x+8)(x^2+100)^{-1/2}] - (x+8)(x^2+100)^{1/2}}{x^2} = \frac{x^3 - 800}{x^2\sqrt{x^2+100}}$$

El valor crítico es $x = 2\sqrt[3]{100}$. La longitud de la viga más corta es

$$\frac{2\sqrt[3]{100}+8}{2\sqrt[3]{100}}\sqrt{4\sqrt[3]{10\,000} + 100} = (\sqrt[3]{100}+4)^{3/2} \text{ m}$$

Problemas propuestos

13. Hallar dos números positivos cuya suma sea 20 y (*a*) su producto sea máximo, (*b*) la suma de sus cuadrados sea mínima, (*c*) el producto del cuadrado de uno de ellos por el cubo del otro sea máximo. *Sol.* (*a*) 10,10; (*b*) 10,10; (*c*) 8,12.

14. Hallar dos números positivos cuyo producto sea 16 y (*a*) su suma sea mínima. (*b*) la suma de uno de ellos con el cuadrado del otro sea mínima. *Sol.* (*a*) 4,4; (*b*) 8,2.

15. Hallar las dimensiones de una caja rectangular abierta de 6 400 centímetros cúbicos para que resulte la más económica, teniendo en cuenta que el precio de coste de la base es de 75 pesetas y el de las superficies laterales de 25 pesetas por centímetro cuadrado.
Sol. 20 × 22 × 16 cm.

16. Una pared de 3,2 metros de altura está situada a una distancia de 1,35 metros de una casa. Hallar la longitud de la escalera más corta de manera que, apoyándose en el suelo y en la pared, llegue a la cima de la casa. *Sol.* 6,25 metros.

17. Una entidad bancaria tiene las siguientes tarifas: 30 pesetas por cada mil para operaciones de hasta 50 000 pesetas; para la cantidad que sobrepase esta cifra, disminuye la tasa anterior en 0,375 pesetas por cada mil. Hallar la operación óptima de manera que el beneficio del banco sea máximo. *Sol.* 90 000 pesetas.

18. Hallar la ecuación de la recta que, pasando por el punto (3, 4), determina en el primer cuadrante con los ejes coordenados, un triángulo de área mínima. *Sol.* $4x + 3y - 24 = 0$.

19. Hallar un punto de la parábola $y = 4 - x^2$ en el que la tangente determine en el primer cuadrante con los ejes coordenados un triángulo de área mínima. *Sol.* $(2\sqrt{3}/3, 8/3)$.

20. Hallar la mínima distancia del punto (4, 2) a la parábola $y^2 = 8x$. *Sol.* $2\sqrt{2}$ unidades.

21. Se traza la tangente en un punto de la elipse $x^2/25 + y^2/16 = 1$ de forma que el segmento de ella interceptado por los ejes coordenados sea mínimo. Demostrar que la longitud de este segmento es de 9 unidades.

22. Se inscribe un rectángulo en la elipse $x^2/400 + y^2/225 = 1$ con sus lados paralelos a los ejes. Hallar las dimensiones de dicho rectángulo para que (*a*) el área sea máxima, (*b*) el perímetro sea máximo. *Sol.* (*a*) $20\sqrt{2} \times 15\sqrt{2}$, (*b*) 32 × 18.

23. Hallar el radio R del cono circular recto de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de radio r.
Sol. $R = \frac{2}{3}r\sqrt{2}$.

24. En un cono circular recto r, se inscribe un cilindro circular recto. Hallar el radio R del cilindro para que (*a*) su volumen sea máximo (*b*) su área lateral sea máxima. *Sol.* (*a*) $R = \frac{2}{3}r$, (*b*) $R = \frac{1}{2}r$.

25. Demostrar que la menor cantidad de lona empleada en confeccionar una tienda de campaña cónica de un volumen determinado ocurre cuando su altura sea dos veces el radio de la base.

26. Demostrar que todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio r, el de área mínima es el equilátero de lado $3r$.

27. Determinar las dimensiones del cilindro circular recto de área lateral máxima que se puede inscribir en una esfera de 8 centímetros de radio. *Sol.* $h = 2r = 8\sqrt{2}$ centímetros.

28. Estudiar la posibilidad de inscribir un cilindro circular recto de área total máxima en un cono circular recto de radio r y altura h. *Sol.* Si $h > 2r$, radio del cilindro $= \frac{1}{2}hr/(h - r)$.

Capítulo 10

Movimientos rectilíneo y circular

MOVIMIENTO RECTILINEO

El movimiento de una partícula P a lo largo de una línea recta queda completamente definido por la ecuación $s = f(t)$, ley del movimiento, siendo $t \geqq 0$ el tiempo y s la distancia de P a un punto fijo O de la trayectoria.

La velocidad de P, en un instante t, es: $v = \dfrac{ds}{dt}$.

Si $v > 0$, P se mueve en la dirección creciente de s.

Si $v < 0$, P se mueve en la dirección decreciente de s.

Si $v = 0$, P está en reposo en dicho instante.

La aceleración de P, en un instante t, es: $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2}$.

Si $a > 0$, v aumenta; si $a < 0$, v disminuye.

Si v y a tienen el mismo signo, la celeridad (módulo de la velocidad) de P aumenta.

Si v y a tienen signo contrario, la celeridad de P disminuye.

(Ver Problemas 1-5.)

MOVIMIENTO CIRCULAR

El movimiento de una partícula P a lo largo de una circunferencia queda completamente definido por la ecuación $\theta = f(t)$, ley de movimiento, siendo θ el ángulo en el centro (radianes) barrido en el tiempo t por la recta que une P con el centro de la circunferencia.

La velocida angular de P en el instante t es $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$.

La aceleración angular de P, en el instante t es $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$.

Si α es constante para todos los valores de t, P se mueve con una aceleración angular constante.

Si $\alpha = 0$ para todos los valores de t, P se mueve con una velocidad angular constante.

(Ver Problema 6.)

Problemas resueltos

En los problemas que siguen sobre el movimiento rectilíneo el espacio s se mide en metros y el tiempo t en segundos.

1. La ley del movimiento rectilíneo de un cuerpo viene dada por $s = \frac{1}{2}t^3 - 2t$. Hallar su velocidad y aceleración al cabo de 2 segundos.

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{3}{2}t^2 - 2 \qquad \text{Para } t = 2, \quad v = \frac{3}{2}(2)^2 - 2 = 4 \text{ m/s}.$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 3t \qquad \text{Para } t = 2, \quad a = 3(2) = 6 \text{ m/s}.$$

2. El espacio recorrido por un móvil en línea recta viene dado por la ecuación $s = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$ (ley del movimiento).

(*a*) Hallar s y a cuando $v = 0$.
(*b*) Hallar s y v cuando $a = 0$.
(*c*) ¿Cuándo aumenta s?
(*d*) ¿Cuándo aumenta v?
(*e*) ¿Cuándo cambia el sentido del movimiento?

$$v = ds/dt = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3) \qquad a = dv/dt = 6(t-2)$$

(*a*) Para $v = 0$, $t = 1$ y 3. Para $t = 1$, $s = 8$ y $a = -6$. Para $t = 3$, $s = 4$ y $a = 6$.

(*b*) Para $a = 0$, $t = 2$. Para $t = 2$, $s = 6$ y $v = -3$.

(*c*) s aumenta cuando $v > 0$, e.d, cuando $t < 1$ y $t > 3$.

(*d*) v aumenta cuando $a > 0$, e.d., cuando $t > 2$.

(*e*) El sentido del movimiento cambia cuando $v = 0$ y $a \neq 0$. De (*a*) se deduce que el sentido cambia cuando $t = 1$ y $t = 3$.

3. La ley del movimiento rectilíneo de un cuerpo viene dada por $s = f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$. Determinar cuando aumenta y disminuye:

(*a*) El espacio s.

(*b*) La velocidad v.

(*c*) La celeridad del cuerpo.

(*d*) La distancia total recorrida en los primeros 5 segundos del movimiento.

$$v = ds/dt = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t-2)(t-4) \qquad a = dv/dt = 6(t-3)$$

(*a*) s aumenta cuando $v > 0$, esto es, cuando $t < 2$ y $t > 4$.
s disminuye cuando $v < 0$, esto es, cuando $2 < t < 4$.

(*b*) v aumenta cuando $a > 0$, esto es, cuando $t > 3$.
v disminuye cuando $a < 0$, esto es, cuando $t < 3$.

(*c*) La celeridad aumenta cuando v y a tienen el mismo signo y disminuye cuando v y a son de signos contrarios. Como v cambia de signo en $t = 2$ y $t = 4$ y a lo hace en $t = 3$, hemos de comparar los signos en los intervalos $t < 2$, $2 < t < 3$, $3 < t < 4$ y $t > 4$.

En el intervalo $t < 2$, $v > 0$ y $a < 0$; la celeridad disminuye.
En el intervalo $2 < t < 3$, $v < 0$ y $a < 0$; la celeridad aumenta.
En el intervalo $3 < t < 4$, $v < 0$ y $a > 0$; la celeridad disminuye.
En el intervalo $t > 4$, $v > 0$ y $a > 0$; la celeridad aumenta.

(*d*) Para $t = 0$, $s = 0$, y el cuerpo se encuentra en el origen O. Al principio, el cuerpo se mueve hacia la derecha ($v > 0$), durante los dos primeros segundos, alcanzando una distancia del origen O de $s = f(2) = 20$ metros.

Durante los dos segundos siguientes se mueve hacia la izquierda, y al final de este tiempo, se encuentra en $s = f(4) = 16$ metros de O.

A continuación, se mueve hacia la derecha y, después de transcurridos 5 segundos desde que se inició el movimiento, $s = f(5) = 20$ metros de O.

El espacio total recorrido es $20 + 4 + 4 = 28$ metros.

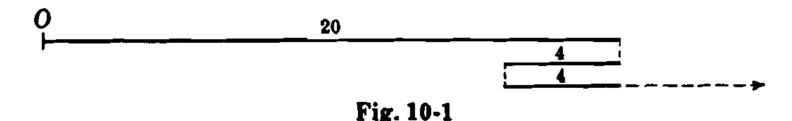


Fig. 10-1

4. Una partícula se mueve a lo largo de una línea horizontal de acuerdo con la ley $s = f(t) = t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 10t + 3$ Determinar:

(*a*) Cuándo aumenta la velocidad y cuándo disminuye.

(*b*) En qué instante cambia el sentido del movimiento.

(*c*) El espacio total recorrido en los 3 primeros segundos del movimiento.

$$v = ds/dt = 4t^3 - 18t^2 + 24t - 10 = 2(t-1)^2(2t-5) \qquad a = dv/dt = 12(t-1)(t-2)$$

(*a*) v cambia de signo cuando $t = 1$ y $t = 2{,}5$; a cambia de signo cuando $t = 1$ y $t = 2$.

En el intervalo $t < 1$, $v < 0$ y $a > 0$; la celeridad disminuye.
En el intervalo $1 < t < 2$, $v < 0$ y $a < 0$; la celeridad aumenta.
En el intervalo $2 < t < 2{,}5$, $v < 0$ y $a > 0$; la celeridad disminuye.
En el intervalo $t > 2{,}5$ $v > 0$ y $a > 0$; la celeridad aumenta.

(*b*) El sentido del movimiento cambia en el instante $t = 2{,}5$ en el que $v = 0$, $a \neq 0$; pero no se invierte en $t = 1$, puesto que v no cambia de signo al ir aumentando t al pasar por $t = 1$. Obsérvese que para $t = 1$, $v = 0$ y $a = 0$ y, por tanto, no se posee información alguna.

(*c*) Para $t = 0$, $s = 3$, y la partícula se encuentra 3 metros a la derecha del origen O.

El movimiento se efectúa hacia la izquierda durante los 2,5 primeros segundos, al final de los cuales la partícula se encuentra a 27/16 metros a la izquierda de O.
Para $t = 3$, $s = 0$; la partícula se ha desplazado 27/16 metros hacia la derecha.
El espacio total recorrido es $3 + 27/16 = 51/8$ metros.

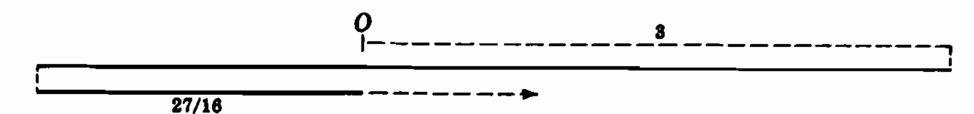


Fig. 10-2

5. Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 112 metros por segundo. Sabiendo que la ley del movimiento es $s = 112t - 16t^2$, siendo s la distancia al punto de partida, calcular (*a*) la velocidad y la aceleración en los instantes $t = 3$ y $t = 4$, (*b*) la máxima altura alcanzada y (*c*) el tiempo que tardará en llegar a una altura de 96 metros.

$$v = ds/dt = 112 - 32t \qquad a = dv/dt = -32$$

(*a*) Para $t = 3$, $v = 16$ y $a = -32$. La piedra está subiendo a 16 m/seg.
Para $t = 4$, $v = -16$ y $a = -32$. La piedra está bajando a 16 m/seg.
(*b*) En el punto más alto, $v = 0$.
Resolviendo $v = 0 = 112 - 32t$, $t = 3,5$. Para este tiempo, $s = 196$ m.
(*c*) $96 = 112t - 16t^2$, $t^2 - 7t + 6 = 0$, $(t - 1)(t - 6) = 0$, $t = 1,6$.

Al cabo de 1 seg de iniciarse el movimiento, la piedra está a una altura de 96 metros y además está subiendo, puesto que $v > 0$. Al cabo de 6 seg también se encuentra a esa altura, pero en este caso está bajando, ya que $v < 0$.

6. Una partícula posee un movimiento de rotación en sentido contrario al de las agujas del reloj, partiendo del reposo, según la ley $\theta = t^3/50 - t$, en donde θ se expresa en radianes y t en segundos. Calcular el desplazamiento angular θ, la velocidad angular ω, y la aceleración angular al cabo de 10 segundos.

$$\theta = t^3/50 - t = 10 \text{ rad}, \quad \omega = d\theta/dt = 3t^2/50 - 1 = 5 \text{ rad/seg}, \quad \alpha = d\omega/dt = 6t/50 = 6/5 \text{ rad/seg}^2$$

Problemas propuestos

7. La ley del movimiento rectilíneo de una partícula viene dada por $s = t^3 - 6t^2 + 9t$, en donde las unidades son el metro y el segundo. Hallar la situación de la partícula con respecto a su posición inicial ($t = 0$) en O, determinar el sentido y la velocidad del movimiento y averiguar si la velocidad está aumentando o disminuyendo en los instantes (*a*) $t = 1/2$, (*b*) $t = 3/2$, (*c*) $t = 5/2$, (*d*) $t = 4$.
Sol. (*a*) 25/8 metros a la derecha de O; se mueve hacia la derecha con una $v = 15/4$ metros por segundo; disminuyendo.
(*b*) 27/ metros a la derecha de O; se mueve hacia la izquierda con una $v = 9/4$ metros por segundo; aumentando.
(*c*) 5/8 metros a la derecha de O; se mueve hacia la izquierda con una $v = -9,4$ metros por segundo; disminuyendo.
(*d*) 4 metros a la derecha de O; se mueve hacia la izquierda con una $v = 9$ metros por segundo; aumentando.

8. El espacio recorrido por una locomotora sobre una vía horizontal, con respecto a un punto fijo, viene dado, en función del tiempo t, por $s = 3t^4 - 44t^3 + 144t^2$. Calcular el intervalo de tiempo en el que la locomotora marcha en sentido contrario al inicial. *Sol.* $3 < t < 8$.

9. Estudiar, tal como se hizo en el Problema 2, los movimientos rectilíneos siguientes:
(*a*) $s = t^3 - 9t^2 + 24t$, (*b*) $s = t^3 - 3t^2 + 3t + 3$, (*c*) $s = 2t^3 - 12t^2 + 18t - 5$, (*d*) $s = 3t^4 - 28t^3 + 90t^2 - 108t$.
Sol. (*a*) Se detiene en $t = 2$ y en $t = 4$ con cambio de sentido.
(*b*) Se detiene en $t = 1$ y no hay cambio de sentido.
(*c*) Se detiene en $t = 1$ y en $t = 3$ con cambio de sentido.
(*d*) Se detiene en $t = 1$ con cambio de sentido y en $t = 3$ sin cambio de sentido.

10. La ley del movimiento rectilíneo ascendente de un cuerpo es $s = 64t - 16t^2$. Demostrar que a los 48 metros de altura, su velocidad es igual a la mitad de la inicial.

11. Desde un tejado de 112 metros de altura, se lanza verticalmente hacia arriba una pelota que, finalmente, regresa al suelo. Sabiendo que el espacio s metros recorrido desde el tejado en función del tiempo t viene dado por $s = 96t - 16t^2$, calcular (*a*) la posición de la pelota, su velocidad y el sentido del movimiento en el instante $t = 2$ y (*b*) su velocidad al llegar al suelo.
Sol. (*a*) 240 metros desde el suelo, 32 metros por segundo, hacia arriba. (*b*) $= -128$ metros por segundo.

12. El ángulo θ (radianes) girado por una rueda en función del tiempo t(seg) viene dado por $\theta = 128t - 12t^2$. Calcular la velocidad angular y la aceleración al cabo de 3 segundos. *Sol.* $\omega = 56$ radianes por segundo, $\alpha = -24$ radianes por segundo al cuadrado.

13. Demostrar, en los Problemas 2 y 9, que cuando el móvil se detiene con cambio de sentido del movimiento, el valor de t en el que ocurre es el que hace a la función $s = f(t)$ máxima o mínima, mientras que si la detención es sin cambio de sentido, se verifica en un punto de inflexión.

Capítulo 11

Variaciones con respecto al tiempo

VARIACION CON RESPECTO AL TIEMPO. Si una variable x es función del tiempo t, la *variación* de x en la unidad de tiempo viene dada por dx/dt.

Cuando dos o más variables, todas funciones de t, están relacionadas por una ecuación, se puede obtener la relación entre sus variaciones derivando la ecuación con respecto a t.

Problemas resueltos

1. Un gas escapa de un globo esférico a razón de 2 metros cúbicos por minuto. Hallar la disminución de su superficie en la unidad de tiempo, sabiendo que el radio es de 12 metros.

Sea r el radio de la esfera en el instante t. El volumen correspondiente es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y la superficie, $S = 4\pi r^2$.

Tendremos, $\dfrac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \dfrac{dr}{dt}$, $\dfrac{dS}{dt} = 8\pi r \dfrac{dr}{dt}$, $\dfrac{dS/dt}{dV/dt} = \dfrac{2}{r}$, de donde, $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{2}{r}\left(\dfrac{dV}{dt}\right) = \dfrac{2}{12}(-2) = -\dfrac{1}{3}$ m²/min

2. De un embudo cónico sale agua a razón de 1 centímetro cúbico por segundo. Sabiendo que el radio de la base es de 4 centímetros y la altura de 8 centímetros, calcular el descenso del nivel en la unidad de tiempo en el instante en que la superficie libre se encuentra a una distancia de [illegible] centímetros de la base del embudo.

Sea r el radio, h la altura de la superficie del agua en el instante t y V el volumen de agua que contiene el cono.

De los triángulos semejantes, $r/4 = h/8$ ó $r = \frac{1}{2}h$.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{12}\pi h^3$ y $dV/dt = \frac{1}{4}\pi h^2\, dh/dt$.

Cuando $dV/dt = -1$ y $h = 8 - 2 = 6$, tendremos $dh/dt = -1/9\pi$ cm/seg

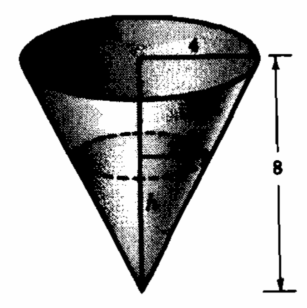


Fig. 11-1

3. Se forma un montículo cónico de arena cuya altura es constantemente, igual a los 4/3 del radio de la base. Hallar: (*a*) el incremento del volumen en la unidad de tiempo cuando el radio de la base es de 3 metros, sabiendo además que éste aumenta a razón de 25 cm cada minuto; (*b*) el incremento del radio en la unidad de tiempo cuando éste es de 6 metros y el volumen aumenta a razón de 24 metros cúbicos por minuto.

Sea r = radio de la base y h = altura del cono en el tiempo t.

Como $h = \dfrac{4}{3}r$, $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{4}{9}\pi r^3$, y $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{4}{3}\pi r^2 \dfrac{dr}{dt}$.

(*a*) Cuando $r = 3$ y $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{4}$, $\dfrac{dV}{dt} = 3\pi$ m³/min. (*b*) Cuando $r = 6$ y $\dfrac{dV}{dt} = 24$, $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{2\pi}$ m/min.

4. Un barco A navega hacia el sur a una velocidad de 16 millas por hora, y otro B, situado 32 millas al sur de A, lo hace hacia el este con una velocidad de 12 millas por hora. Hallar (*a*) la velocidad a la que dichos barcos se aproximan o separan al cabo de una hora de haberse iniciado el movimiento. (*b*) Idem, después de 2 horas; (*c*) el momento en que dejan de aproximarse y comienzan a separarse así como la distancia a que se encuentran en dicho instante.

Sean A_0 y B_0 las posiciones iniciales de los barcos, y A_t y B_t las correspondientes al cabo de t horas. Llamemos D a la distancia que los separa t horas después de iniciado el movimiento.

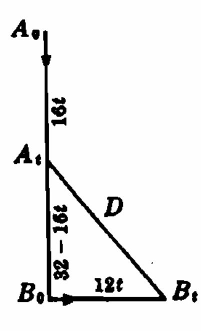


Fig. 11-2

$$D^2 = (32 - 16t)^2 + (12t)^2 \quad \text{y} \quad \frac{dD}{dt} = \frac{400t - 512}{D}$$

(*a*) Cuando $t = 1$, $D = 20$ y $dD/dt = -5{,}6$. Se aproximan a razón de 5,6 min/h.

(*b*) Cuando $t = 2$, $D = 24$ y $dD/dt = 12$. Se separan a razón de 12 min/h.

(*c*) Dejarán de aproximarse cuando $dD/dt = 0$, e.d. cuando $t = 512/400 = 1{,}28$ h, en cuyo momento $D = 19{,}2$ millas.

5. Dos lados paralelos de un rectángulo se alargan a razón de 2 centímetros cada segundo, mientras que los otros 2, se acortan de manera que la figura resultante, en todo momento, es un rectángulo de área constante e igual a 50 centímetros cuadrados. Calcular la variación en la unidad de tiempo del perímetro P cuando la longitud de los lados extensibles es de (*a*) 5 centímetros (*b*) 10 centímetros. (*c*) Hallar las dimensiones del rectángulo cuando el perímetro deja de disminuir.

Sea x = longitud de los lados que se alargan e y = longitud de los otros lados en el tiempo t.

$$P = 2(x + y) \text{ y } \frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right). \quad A = xy = 50 \text{ y } x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 0.$$

(*a*) Cuando $x = 5$, $y = 10$ y $dx/dt = 2$.

Por tanto $5\frac{dy}{dt} + 10(2) = 0$ ó $\frac{dy}{dt} = -4$, y $\frac{dP}{dt} = 2(2 - 4) = -4$ cm/s (disminuyendo).

(*b*) Cuando $x = 10$, $y = 5$ y $dx/dt = 2$.

Por tanto $10\frac{dy}{dt} + 5(2) = 0$ ó $\frac{dy}{dt} = -1$, y $\frac{dP}{dt} = 2(2 - 1) = 2$ cm/s (aumentando).

(*c*) El perímetro dejará de disminuir cuando $dP/dt = 0$, e.d., cuando $dy/dt = -dx/dt = -2$.

Por tanto $x(-2) + y(2) = 0$, y el rectángulo es un cuadrado de lado $x = y = 5\sqrt{2}$ cm.

6. Sea r el radio de una esfera en el instante t. Hallar dicho radio cuando su incremento en la unidad de tiempo es igual, numéricamente, al de la superficie.

Superficie de la esfera, $S = 4\pi r^2$. $\frac{dS}{dt} = 8\pi r\frac{dr}{dt}$.

Cuando $\frac{dS}{dt} = \frac{dr}{dt}$, $\frac{dr}{dt} = 8\pi r\frac{dr}{dt}$, y el radio es $r = \frac{1}{8\pi}$ cm.

7. Un peso W está unido a una cuerda de 50 metros de longitud que pasa por una polea P situada a una altura de 20 metros con respecto al suelo. El otro extremo de la cuerda, se encuentra unido a un vehículo en el punto A, situado a una altura de 2 metros como indica la Fig. 11-3. Sabiendo que el vehículo se mueve a una velocidad de 9 metros segundo, calcular la velocidad a la que se eleva el cuerpo cuando se halle a una altura de 6 metros.

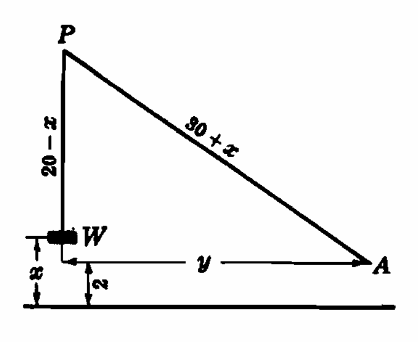


Fig. 11-3

Sea x el espacio recorrido por el cuerpo e y la distancia horizontal hasta el punto A en el instante t.

Tenemos que calcular $\frac{dx}{dt}$ cuando $\frac{dy}{dt} = 9$ y $x = 6$.

Ahora bien, $y^2 = (30 + x)^2 - (18)^2$ y $\frac{dy}{dt} = \frac{30 + x}{y} \cdot \frac{dx}{dt}$.

Para $x = 6$, $y = 18\sqrt{3}$ y $\frac{dy}{dt} = 9$. Por tanto, $9 = \frac{30 + 6}{18\sqrt{3}} \cdot \frac{dx}{dt}$ de donde $\frac{dx}{dt} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$ m/s.

8. Un foco de luz está situado a una altura de H metros sobre la calle. Un objeto de h metros de altura se encuentra en el punto O justamente debajo del foco y se mueve en línea recta, a partir de esta posición inicial, a lo largo de la calle a una velocidad de v metros por segundo. Hallar la velocidad V del extremo de la sombra sobre la calle al cabo de t segundos. (Ver Fig. 11-4.)

Al cabo de t segundos el objeto ha recorrido una distancia vt. Sea y = distancia del extremo de la sombra a O.

$$\frac{y-vt}{y}=\frac{h}{H} \text{ o sea } y=\frac{Hvt}{H-h} \text{ y } V=\frac{dy}{dt}=\frac{Hv}{H-h}=\frac{1}{1-h/H}\,v$$

Por consiguiente, la velocidad del extremo de la sombra es proporcional a la velocidad del objeto, y el factor de proporcionalidad depende de la relación h/H. Cuando $h \to 0$, $V \to v$, mientras que si $h \to H$, V aumenta mucho más rápidamente.

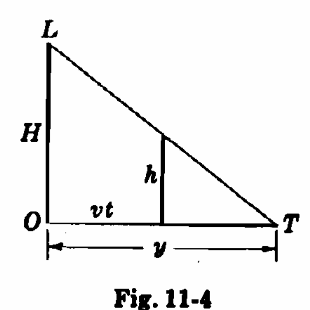


Fig. 11-4

Problemas propuestos

9. Las dimensiones de un depósito paralelepipédico son en metros, 8 largo, 2 de ancho y 4 de profundidad. Se llena de agua a razón de 2 metros cúbicos por minuto, hallar la variación de la altura del nivel, con respecto al tiempo, cuando la profundidad del agua es de 1 metro. *Sol.* 1/8 m/min.

10. Un líquido penetra en un tanque cilíndrico vertical de 6 metros de radio a razón de 8 metros cúbicos por minuto. Hallar la variación de la altura del nivel del agua con respecto al tiempo. *Sol.* $2/9\pi$ m/min.

11. Un objeto de 5 metros de altura se encuentra justamente debajo de un foco de luz de la calle situado a 20 metros de altura. Suponiendo que el objeto se mueve a una velocidad de 4 metros por segundo, calcular: (*a*) la velocidad del extremo de la sombra, (*b*) la variación de la longitud de la sombra en la unidad de tiempo.
Sol. (*a*) 16/3 m/s. (*b*) 4/3 m/s.

12. Un globo se eleva desde un punto A de la tierra a una velocidad de 15 metros por segundo y su ascenso se observa desde otro punto B situado en la horizontal que pasa por A y a una distancia de este punto de 30 metros. Hallar la variación de la distancia del punto B al globo cuando la altura de éste es de 40 metros. *Sol.* 12 metros/segundo.

13. Una escalera de 20 metros se apoya contra un edificio. Hallar (*a*) la velocidad a la que se mueve el extremo superior cuando el inferior se aleja del edificio a una velocidad de 2 metros por segundo y se encuentra a una distancia de él de 12 metros, (*b*) la velocidad a la que disminuye la pendiente. *Sol.* (*a*) 3/2 m/s., (*b*) 25/72 cada segundo.

14. De un recipiente cónico de 3 metros de radio y 10 de profundidad sale agua a razón de 4 metros cúbicos por minuto. Hallar la variación, con respecto al tiempo, de la altura de la superficie libre y del radio de ésta cuando la profundidad del agua es de 6 metros. *Sol.* $100/81\pi$ m/min, $10/27\pi$ m/min.

15. Un barco, cuya cubierta está a una distancia de 10 metros por debajo de la superficie de un muelle, es arrastrado hacia éste por medio de un cable unido a la cubierta y que pasa por una argolla situada en el muelle. Sabiendo que cuando el barco se encuentra a una distancia del muelle de 24 metros, aproximándose con una velocidad de 3/4 metros por segundo, hallar la velocidad del extremo del cable. *Sol.* 9/13 m/s.

16. Un muchacho lanza una cometa a una altura de 150 metros. Sabiendo que la cometa se aleja del muchacho a una velocidad de 20 metros por segundo, hallar la velocidad a la que suelta el hilo cuando la cometa se encuentra a una distancia de 250 metros del muchacho. *Sol.* 16 m/s.

17. Un tren que sale a las 11 horas de la mañana se dirige hacia el este a una velocidad de 45 kilómetros por hora, mientras que otro, que sale al mediodía desde la misma estación, se dirige hacia el sur a una velocidad de 60 kilómetros por hora. Hallar la velocidad a que se separan ambos trenes a las tres de la tarde. *Sol.* $150\sqrt{2}/2$ km/h.

18. Un foco de luz está situado en la cúspide de una torre de 80 metros de altura. Desde un punto situado a 20 metros del foco y a su misma altura, se deja caer una pelota. Suponiendo que ésta cae según la ley $s = 16t^2$, hallar la velocidad a la que se mueve la sombra de la pelota sobre el suelo, un segundo después de empezar a caer. *Sol.* 200 m/s.

19. Un barco A se encuentra a una distancia de 15 millas al este de un punto O, y se mueve hacia el oeste a una velocidad de 20 millas por hora. Otro barco B, a 60 millas de O, se mueve hacia el norte a una velocidad de 15 millas por hora. Determinar: (*a*) si los barcos se aproximan o se separan al cabo de 1 hora y a qué velocidad, (*b*) ídem al cabo de 3 horas, (*c*) el momento en que están más próximos.
Sol. (*a*) Aprox., $115\sqrt{82}$ millas/h; (*b*) Sep. $9\sqrt{10}/2$ millas/h; (*c*) 1 h. 55 min.

20. Un depósito cónico, de 8 metros de diámetro y 16 de profundidad, se llena de agua a razón de 10 metros cúbicos por minuto. Sabiendo que el depósito en cuestión tiene una fuga y que cuando la profundidad del agua es de 1 metro el nivel se eleva a razón de 1/3 metros por minuto, hallar la cantidad de agua que abandona el depósito en la unidad de tiempo. *Sol.* $(10 - 3\pi)$ m³/min.

21. Una solución llega a un depósito cilíndrico de 30 centímetros de diámetro después de haber pasado por un filtro cónico de 60 centímetros de profundidad y 40 de diámetro. Hallar la velocidad a la que se eleva la superficie libre de la solución en el cilindro, sabiendo que cuando su profundidad en el filtro es de 30 centímetros, su nivel desciende a razón de 2,5 centímetros por minuto. *Sol.* 10/9 cm/min.

Capítulo 12

Derivada de las funciones trigonométricas

MEDIDA EN RADIANES. Sea s la longitud de un arco AB correspondiente al ángulo AOB de una circunferencia de radio r, y S el área del sector AOB. (Si s corresponde a 1/360 de circunferencia, $\angle AOB = 1°$; si $s = r$, $\angle AOB = 1$ radián.) Suponiendo que $\angle AOB$ es de α grados, tendremos

(i) $$s = \frac{\pi}{180}\alpha r \quad \text{y} \quad S = \frac{\pi}{360}\alpha r^2$$

Supongamos ahora que $\angle AOB$ es de θ radianes; en este caso,

(ii) $$s = \theta r \quad \text{y} \quad S = \tfrac{1}{2}\theta r^2$$

Fig. 12-1

Comparando (i) con (ii) se aprecia, claramente, la enorme ventaja que representa la medida de un ángulo en radianes.

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS. Sea θ un número real cualquiera. Tracemos un ángulo cuya medida sea θ radianes de forma que su vértice esté situado en el origen de un sistema cartesiano de coordenadas, siendo el eje x el origen de ángulos. Tomando un punto $P(x, y)$ sobre el otro lado del ángulo, a una unidad de O, se verifica: sen $\theta = y$ y cos $\theta = x$. El dominio de definición de sen θ y de cos θ es el conjunto de los números reales; el campo de variación de sen θ es $-1 \leq y \leq 1$ y el de cos θ, $-1 \leq x \leq 1$. De las expresiones

$$\operatorname{tag}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \quad \text{y} \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

Fig. 12-2

se deduce que el campo de variación de las funciones tag θ y sec θ es el conjunto de los números reales, mientras que el dominio de definición (cos $\theta \neq 0$) es $\theta \neq \pm \frac{2n-1}{2}\pi$, ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Se deja como ejercicio para el alumno la consideración, desde este punto de vista, de las funciones cot θ y csc θ.

En el Problema 1 se demuestra que

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

(Si el ángulo se mide en grados, este límite vale $\pi/180$. Por esta razón se utiliza la medida en radianes, en los cálculos.)

REGLAS DE DERIVACION. Sea u una función derivable de x; en estas condiciones,

14. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u \frac{du}{dx}$

15. $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}$

16. $\frac{d}{dx}(\operatorname{tag} u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$

17. $\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$

18. $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \operatorname{tag} u \frac{du}{dx}$

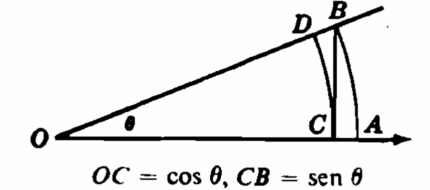
19. $\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$

(Ver Problemas 2-23).

Problemas resueltos

1. Demostrar que: $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\text{sen }\theta}{\theta} = 1.$

Como $\dfrac{\text{sen}(-\theta)}{-\theta} = \dfrac{\text{sen }\theta}{\theta}$, consideraremos solamente $\lim\limits_{\theta\to 0+} \dfrac{\text{sen }\theta}{\theta}$.



$OC = \cos\theta,\ CB = \text{sen }\theta$

Fig. 12-3

En la Fig. 12-3, sea $\theta = \angle AOB$ un ángulo en el centro, positivo y pequeño, de radio $OA = 1$. Llamando C al pie de la perpendicular trazada desde B a OA y D la intersección de OB con un arco de radio OC, tendremos,

$$\text{sector } COD \;\leqslant\; \Delta COB \;\leqslant\; \text{sector } AOB$$

con lo que
$$\tfrac{1}{2}\theta\cos^2\theta \;\leqslant\; \tfrac{1}{2}\text{sen }\theta\cos\theta \;\leqslant\; \tfrac{1}{2}\theta$$

Dividiendo por $\frac{1}{2}\theta\cos\theta > 0$, tenemos

$$\cos\theta \;\leqslant\; \frac{\text{sen }\theta}{\theta} \;\leqslant\; \frac{1}{\cos\theta}$$

Si $\theta\to 0^+$; se tendrá $\cos\theta\to 1$, $\dfrac{1}{\cos\theta}\to 1$, y $1 \leqslant \lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\text{sen }\theta}{\theta} \leqslant 1$; de donde, $\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\text{sen }\theta}{\theta} = 1$,

2. Derivar $\dfrac{d}{dx}(\text{sen } u) = \cos u\,\dfrac{du}{dx}$, siendo u una función derivable de x.

Sea
$$y = \text{sen } u$$
tendremos
$$y + \Delta y = \text{sen}(u + \Delta u)$$
$$\Delta y = \text{sen}(u + \Delta u) - \text{sen } u = 2\cos(u + \tfrac{1}{2}\Delta u)\,\text{sen }\tfrac{1}{2}\Delta u$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \cos(u + \tfrac{1}{2}\Delta u)\,\frac{\text{sen }\frac{1}{2}\Delta u}{\frac{1}{2}\Delta u}$$
$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u\to 0}\cos(u + \tfrac{1}{2}\Delta u)\cdot\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\text{sen }\frac{1}{2}\Delta u}{\frac{1}{2}\Delta u} = \cos u$$

y derivando la función de función,

$$\frac{d}{dx}(\text{sen } u) = \frac{d}{du}(\text{sen } u)\cdot\frac{du}{dx} = \cos u\,\frac{du}{dx}$$

3. $$\frac{d}{dx}(\cos u) = \frac{d}{dx}[\text{sen}(\tfrac{1}{2}\pi - u)] = \frac{d}{du}[\text{sen}(\tfrac{1}{2}\pi - u)]\,\frac{du}{dx} = -\cos(\tfrac{1}{2}\pi - u)\,\frac{du}{dx} = -\text{sen } u\,\frac{du}{dx}.$$

4. $$\frac{d}{dx}(\text{tag } u) = \frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{\text{sen } u}{\cos u}\right) = \frac{\cos u\cdot\cos u\,\dfrac{du}{dx} - \text{sen } u\left(-\text{sen } u\,\dfrac{du}{dx}\right)}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u}\,\frac{du}{dx} = \sec^2 u\,\frac{du}{dx}.$$

Hallar la primera derivada de las funciones de los Problemas 5-12.

5. $y = \text{sen } 3x + \cos 2x.$ $\quad y' = \cos 3x\,\dfrac{d}{dx}(3x) - \text{sen } 2x\,\dfrac{d}{dx}(2x) = 3\cos 3x - 2\,\text{sen } 2x$

6. $y = \text{tag } x^2.$ $\quad y' = \sec^2 x^2\,\dfrac{d}{dx}(x^2) = 2x\sec^2 x^2$

7. $y = \text{tag}^2 x = (\text{tag } x)^2.$ $\quad y' = 2\,\text{tag } x\,\dfrac{d}{dx}(\text{atg } x) = 2\,\text{tag } x\sec^2 x$

8. $y = \cot(1 - 2x^2).$ $\quad y' = -\csc^2(1 - 2x^2)\,\dfrac{d}{dx}(1 - 2x^2) = 4x\csc^2(1 - 2x^2)$

9. $y = \sec^3\sqrt{x} = \sec^3 x^{1/2}.$

$$y' = 3\sec^2 x^{1/2}\,\frac{d}{dx}(\sec x^{1/2}) = 3\sec^2 x^{1/2}\cdot\sec x^{1/2}\,\text{tag } x^{1/2}\cdot\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{3}{2\sqrt{x}}\sec^3\sqrt{x}\,\text{tag}\sqrt{x}$$

10. $\varrho = \sqrt{\csc 2\theta} = (\csc 2\theta)^{1/2}.$

$$\varrho' = \tfrac{1}{2}(\csc 2\theta)^{-1/2}\,\frac{d}{dx}(\csc 2\theta) = -\tfrac{1}{2}(\csc 2\theta)^{-1/2}\cdot\csc 2\theta\cot 2\theta\cdot 2 = -\sqrt{\csc 2\theta}\cdot\cot 2\theta$$

11. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x.$ $\quad f'(x) = x^2 \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x \dfrac{d}{dx}(x^2) = x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x$

12. $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}.$ $\quad f'(x) = \dfrac{x \dfrac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \dfrac{d}{dx}(x)}{x^2} = \dfrac{-x \operatorname{sen} x - \cos x}{x^2}$

Hallar las derivadas indicadas en los Problemas 13-16.

13. $y = x \operatorname{sen} x;\ y'''.$

$$y' = x \cos x + \operatorname{sen} x$$

$$y'' = x(-\operatorname{sen} x) + \cos x + \cos x = -x \operatorname{sen} x + 2 \cos x$$

$$y''' = -x \cos x - \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x = -x \cos x - 3 \operatorname{sen} x$$

14. $y = \operatorname{tag}^2(3x-2);\ y''.$

$$y' = 2 \operatorname{tag}(3x-2) \sec^2(3x-2) \cdot 3 = 6 \operatorname{tag}(3x-2) \sec^2(3x-2)$$

$$y'' = 6[\operatorname{tag}(3x-2) \cdot 2 \sec(3x-2) \cdot \sec(3x-2) \operatorname{tag}(3x-2) \cdot 3 + \sec^2(3x-2) \sec^2(3x-2) \cdot 3]$$

$$= 36 \operatorname{tag}^2(3x-2) \sec^2(3x-2) + 18 \sec^4(3x-2)$$

15. $y = \operatorname{sen}(x+y);\ y'.$ $\quad y' = \cos(x+y) \cdot (1+y')$ e $y' = \dfrac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$

16. $\operatorname{sen} y + \cos x = 1;\ y''.$

$$\cos y \cdot y' - \operatorname{sen} x = 0 \text{ e } y' = (\operatorname{sen} x)/(\cos y)$$

$$y'' = \frac{\cos y \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} y) \cdot y'}{\cos^2 y} = \frac{\cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cdot y'}{\cos^2 y}$$

$$= \frac{\cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y (\operatorname{sen} x)/(\cos y)}{\cos^2 y} = \frac{\cos x \cos^2 y + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} y}{\cos^3 y}$$

17. Hallar $f'(\pi/3), f''(\pi/3), f'''(\pi/3)$, en la función $f(x) = \operatorname{sen} x \cos 3x$.

$$f'(x) = -3 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x + \cos 3x \cos x$$

$$= (\cos 3x \cos x - \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x) - 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x$$

$$= \cos 4x - 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x. \qquad f'(\pi/3) = -\tfrac{1}{2} - 2(\sqrt{3}/2)(0) = -\tfrac{1}{2}$$

$$f''(x) = -4 \operatorname{sen} 4x - 2(3 \operatorname{sen} x \cos 3x + \operatorname{sen} 3x \cos x)$$

$$= -4 \operatorname{sen} 4x - 2(\operatorname{sen} x \cos 3x + \operatorname{sen} 3x \cos x) - 4 \operatorname{sen} x \cos 3x$$

$$= -6 \operatorname{sen} 4x - 4f(x). \qquad f''(\pi/3) = -6(-\sqrt{3}/2) - 4(\sqrt{3}/2)(-1) = 5\sqrt{3}$$

$$f'''(x) = -24 \cos 4x - 4f'(x). \qquad f'''(\pi/3) = -24(-\tfrac{1}{2}) - 4(-\tfrac{1}{2}) = 14$$

18. Hallar los ángulos agudos de intersección de las curvas *(1)* $y = \operatorname{sen}^2 x$ y *(2)* $y = \cos 2x$, en el intervalo $0 < x < 2\pi$.

(a) De la ecuación $2 \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$, se obtiene $\pi/6$, $5\pi/6$, $7\pi/6$ y $11\pi/6$, que son las abscisas de los puntos de intersección pedidos.

(b) $y' = 4 \operatorname{sen} x \cos x$ en *(1)*, e $y' = -2 \operatorname{sen} 2x$ en *(2)*.

En el punto $\pi/6$, $m_1 = \sqrt{3}$ y $m_2 = -\sqrt{3}$.

(c) $\operatorname{tag} \phi = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3}$; el ángulo agudo de intersección es de 60°. En los demás puntos los ángulos de intersección también son de 60°.

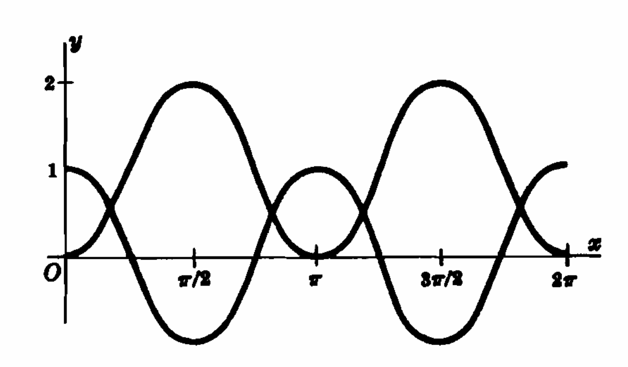


Fig. 12-4

19. Un terreno rectangular está limitado por dos caminos M y N, y en uno de sus vértices P se encuentra el extremo de un pequeño lago. Sabiendo que la distancia de P a los caminos M y N es de 108 y 256 metros, respectivamente, hallar la longitud de la trayectoria más corta por la que se puede ir de un camino al otro cruzando el terreno y pasando por el extremo del lago.

Sea s la longitud de la trayectoria buscada y θ el ángulo que forma con el camino M.

$$s = AP + PB = 108 \csc\theta + 256 \sec\theta$$

$$ds/d\theta = -108 \csc\theta \cot\theta + 256 \sec\theta \operatorname{tag}\theta$$

$$= \frac{-108\cos^3\theta + 256 \operatorname{sen}^3\theta}{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}$$

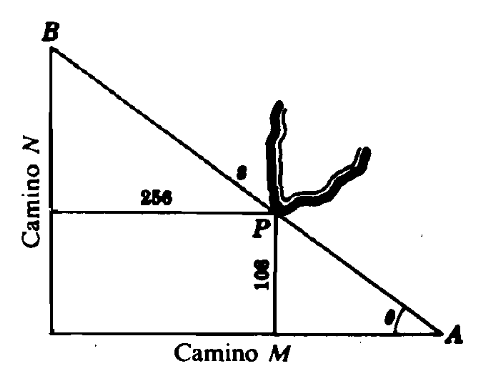


Fig. 12-5

De $-108\cos^3\theta + 256\operatorname{sen}^3\theta = 0$, $\quad \operatorname{tag}^3\theta = 27/64$ y el valor crítico es $\theta = \operatorname{arc\,tag} 3/4$.

Por tanto, $s = 108\csc\theta + 256\sec\theta = 108(5/3) + 256(5/4) = 500$ m.

20. Estudiar la función $y = f(x) = 4 \operatorname{sen} x - 3 \cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Cuando $x = 0$, $y = f(0) = 4(0) - 3(1) = -3$.

$f(x) = 4 \operatorname{sen} x - 3\cos x$. De la ecuación $f(x) = 0$, resulta $\operatorname{tag} x = 3/4$, con lo que los puntos de intersección con el eje x son $x = 0{,}64$ radianes y $x = \pi + 0{,}64 = 3{,}78$ radianes.

$f'(x) = 4\cos x + 3 \operatorname{sen} x$. De la ecuación $f'(x) = 0$, se deduce $\operatorname{tag} x = -4/3$, con lo que los valores críticos son $x = \pi - 0{,}93 = 2{,}21$ y $x = 2\pi - 0{,}93 = 5{,}35$.

$f''(x) = -4 \operatorname{sen} x + 3\cos x$. De la ecuación $f''(x) = 0$, se deduce $\operatorname{tag} x = 3/4$, con lo que los valores críticos son $x = \pi - 0{,}93 = 2{,}21$ y $x = \pi + 0{,}64 = 3{,}78$.

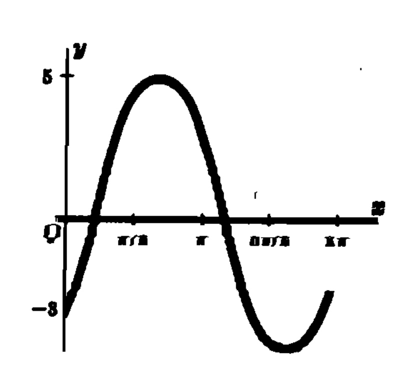


Fig. 12-6

$f'''(x) = -4\cos x - 3 \operatorname{sen} x$.

(*a*) Para $x = 2{,}21$, $\operatorname{sen} x = 4/5$ y $\cos x = -3/5$; $f''(x) < 0$ y, por tanto, en $x = 2{,}21$ hay un mínimo relativo e igual a 5. En $x = 5{,}35$, se tiene un mínimo relativo igual a -5.

(*b*) $f'''(0{,}64) \neq 0$ y $f'''(3{,}78) \neq 0$. Los puntos de inflexión son $(0{,}64; 0)$ y $(3{,}78; 0)$.

(*c*) La curva es cóncava desde $x = 0$ a $x = 0{,}64$; convexa desde $x = 0{,}64$ a $3{,}78$, y cóncava desde $x = 3{,}78$ a 2π.

21. Cuatro barras de longitudes a, b, c, d están articuladas formando un cuadrilátero. Demostrar que el área A es máxima cuando los ángulos opuestos son suplementarios.

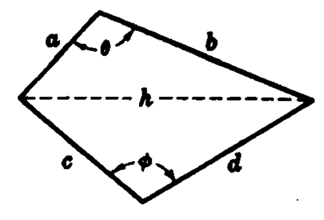


Fig. 12-7

Sea θ el ángulo formado por las barras de longitudes a y b, ϕ el ángulo opuesto y h la longitud de la diagonal opuesta a dicho ángulo.

Hemos de calcular el máximo de la función.

(*1*) $A = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}cd \operatorname{sen}\phi$ con la condición

(*2*) $h^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = c^2 + d^2 - 2cd\cos\phi$. Derivando con respecto a θ:

$$(1') \quad \frac{dA}{d\theta} = \tfrac{1}{2}ab\cos\theta + \tfrac{1}{2}cd\cos\phi\,\frac{d\phi}{d\theta} = 0 \qquad \text{y} \qquad (2') \quad ab \operatorname{sen}\theta = cd \operatorname{sen}\phi\,\frac{d\phi}{d\theta}$$

Despejando $d\phi/d\theta$ en (*2′*) y sustituyendo en (*1′*), resulta,

$$ab\cos\theta + cd\cos\phi\,\frac{ab \operatorname{sen}\theta}{cd \operatorname{sen}\phi} = 0 \qquad \text{ó} \qquad \operatorname{sen}\phi\cos\theta + \cos\phi \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\phi + \theta) = 0$$

de donde $\phi + \theta = 0$ ó π, con lo que queda demostrado prescindiendo de la primera solución.

22. El piloto de un bombardero, que vuela a 2 kilómetros de altura y a una velocidad de 240 kilómetros por hora, observa un blanco terrestre hacia el que se dirige. Calcular la velocidad a la que debe girar el instrumento óptico cuando el ángulo entre la ruta del avión y la línea de mira es de 30°.

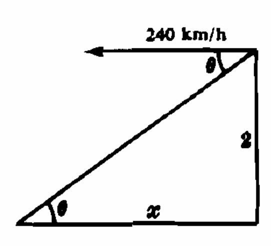


Fig. 12-8

$\frac{dx}{dt} = -240$ km/h, $\theta = 30°$, y $x = 2\cot\theta$.

$\frac{dx}{dt} = -2\csc^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}$ o sea $-240 = -2(4)\,\frac{d\theta}{dt}$, y $\frac{d\theta}{dt} = 30$ rad/h $= \frac{3}{2\pi}$ grados/s.

23. Un rayo de luz parte de un punto P y se propaga por el aire a una velocidad v_1 incidiendo sobre un punto O de una superficie de agua situada a unidades de longitud por debajo de P. Sabiendo que en el interior del agua se propaga a una velocidad v_2 y que pasa por otro punto Q a una distancia de b unidades de la superficie, demostrar que el paso de luz de P a Q se verifica de la manera más rápida cuando $\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$, siendo θ_1 y θ_2 los ángulos de incidencia y refracción con la normal a la superficie.

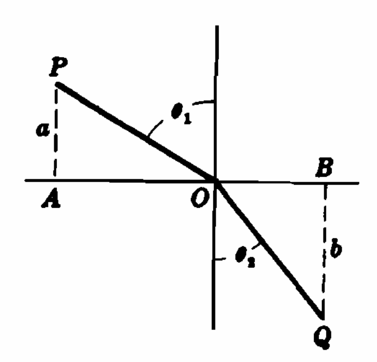


Fig. 12-9

Sea t el tiempo que emplea la luz en ir de P a Q y c la distancia de A a B; en estas condiciones,

$$t = \frac{a\sec\theta_1}{v_1} + \frac{b\sec\theta_2}{v_2} \quad \text{y} \quad c = a\operatorname{tag}\theta_1 + b\operatorname{tag}\theta_2$$

Derivando con respecto a θ_1,

$$\frac{dt}{d\theta_1} = \frac{a\sec\theta_1\operatorname{tag}\theta_1}{v_1} + \frac{b\operatorname{tag}\theta_2\sec\theta_2}{v_2}\cdot\frac{d\theta_2}{d\theta_1} \quad \text{y} \quad 0 = a\sec^2\theta_1 + b\sec^2\theta_2\cdot\frac{d\theta_2}{d\theta_1}$$

De la última ecuación, $\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = -\frac{a\sec^2\theta_1}{b\sec^2\theta_2}$. Para que t sea mínimo se precisa que

$$\frac{dt}{d\theta_1} = \frac{a\sec\theta_1\operatorname{tag}\theta_1}{v_1} + \frac{b\sec\theta_2\operatorname{tag}\theta_2}{v_2}\left(-\frac{a\sec^2\theta_1}{b\sec^2\theta_2}\right) = 0$$

de donde se obtiene la relación pedida.

Problemas propuestos

24. Hallar: (*a*) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}2x}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}$, (*b*) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}ax}{\operatorname{sen}bx}$, (*c*) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x\operatorname{sen}^2 3x}$, (*d*) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$.
Sol. (*a*) 2, (*b*) a/b, (*c*) 8/9, (*d*) 0.

25. Deducir la fórmula 17 de derivación utilizando las relaciones (*a*) $\cot u = \frac{\cos u}{\operatorname{sen}u}$ y (*b*) $\cot u = \frac{1}{\operatorname{tag}u}$. Deducir asimismo las fórmulas de derivación 18 y 19.

Hallar las derivadas dy/dx o $d\rho/d\theta$ en los Problemas 26-45.

26. $y = 3\operatorname{sen}2x$ *Sol.* $6\cos 2x$

27. $y = 4\cos\frac{1}{2}x$ *Sol.* $-2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x$

28. $y = 4\operatorname{tag}5x$ *Sol.* $20\sec^2 5x$

29. $y = \frac{1}{4}\cot 8x$ *Sol.* $-2\csc^2 8x$

30. $y = 9\sec\frac{1}{3}x$ *Sol.* $3\sec\frac{1}{3}x\operatorname{tag}\frac{1}{3}x$

31. $y = \frac{1}{4}\csc 4x$ *Sol.* $y = -\csc 4x\cot 4x$

32. $y = \operatorname{sen} x - x\cos x + x^2 + 4x + 3$ *Sol.* $x \operatorname{sen} x + 2x + 4$

33. $\varrho = \sqrt{\operatorname{sen}\theta}$ *Sol.* $(\cos\theta)/(2\sqrt{\operatorname{sen}\theta})$

34. $y = \operatorname{sen} 2/x$ *Sol.* $(-2\cos 2/x)/x^2$

35. $y = \cos(1 - x^2)$ *Sol.* $2x \operatorname{sen}(1 - x^2)$

36. $y = \cos(1 - x)^2$ *Sol.* $y = 2(1 - x)\operatorname{sen}(1 - x)^2$

37. $y = \operatorname{sen}^2(3x - 2)$ *Sol.* $3 \operatorname{sen}(6x - 4)$

38. $y = \operatorname{sen}^3(2x - 3)$ *Sol.* $-\frac{3}{2}\{\cos(6x - 9) - \cos(2x - 3)\}$

39. $y = \frac{1}{2}\operatorname{tag} x \operatorname{sen} 2x$ *Sol.* $\operatorname{sen} 2x$

40. $\varrho = \dfrac{1}{(\sec 2\theta - 1)^{3/2}}$ *Sol.* $\dfrac{-3\sec 2\theta \operatorname{tag} 2\theta}{(\sec 2\theta - 1)^{5/2}}$

41. $\varrho = \dfrac{\operatorname{tag} 2\theta}{1 - \cot 2\theta}$ *Sol.* $2\,\dfrac{\sec^2 2\theta - 4\csc 4\theta}{(1 - \cot 2\theta)^2}$

42. $y = x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x$ *Sol.* $x^2\cos x$

43. $\operatorname{sen} y = \cos 2x$ *Sol.* $-\dfrac{2\operatorname{sen} 2x}{\cos y}$

44. $\cos 3y = \operatorname{tag} 2x$ *Sol.* $-\dfrac{2\sec^2 2x}{3\operatorname{sen} 3y}$

45. $x\cos y = \operatorname{sen}(x + y)$ *Sol.* $\dfrac{\cos y - \cos(x + y)}{x\operatorname{sen} y + \cos(x + y)}$

46. Si $x = A \operatorname{sen} kt + B\cos kt$, siendo A, B, k constantes, demostrar que $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k^2x$ y $\dfrac{d^{2n}x}{dt^{2n}} = (-1)^n k^{2n} x$.

47. Demostrar: (*a*) $y'' + 4y = 0$ siendo $y = 3\operatorname{sen}(2x + 3)$, (*b*) $y''' + y'' + y' + y = 0$ siendo $y = \operatorname{sen} x + 2\cos x$.

48. Estudiar las funciones siguientes en el intervalo $0 \leq x < 2\pi$:

(*a*) $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$ (*c*) $y = x - 2\operatorname{sen} x$ (*e*) $y = 4\cos^3 x - 3\cos x$
(*b*) $y = \cos^2 x - \cos x$ (*d*) $y = \operatorname{sen} x(1 + \cos x)$

Sol. (*a*) Max. en $x = \pi/4, 5\pi/4$; min. en $x = 3\pi/4, 7\pi/4$; P.I. en $x = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$
(*b*) Max. en $x = 0, \pi$; min. en $x = \pi/3, 5\pi/3$; P.I. en x = 32°32′, 126°23′, 233°37′, 327°28′
(*c*) Max. en $x = 5\pi/3$; min. en $x = \pi/3$; P.I. en $x = 0, \pi$
(*d*) Max. en $x = \pi/3$; min en $x = 5\pi/3$; P.I. en $x = 0, \pi$, 104°29′, 255°31′
(*e*) Max. en $x = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$; min. en $x = \pi/3, \pi, 5\pi/3$; P.I. en $x = \pi/2, 3\pi/2, \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11/\pi6$

49. Sabiendo que el ángulo de elevación del sol es de 45° y que va disminuyendo a razón de $\frac{1}{4}$ radianes por hora, hallar la velocidad a que se desplaza la sombra de una torre de 50 metros de altura sobre la tierra. *Sol.* 25 m/h.

50. Un cometa, a una altura de 120 metros sobre la tierra, se mueve horizontalmente a una velocidad de 10 metros por segundo. Hallar la velocidad a la que disminuye el ángulo de inclinación del hilo con la horizontal cuando la longitud de éste sea de 240 metros. *Sol.* 1/48 rad/s.

51. La luz de un foco situado a una distancia de 3 600 metros de una costa rectilínea gira a una velocidad de 4π radianes por minuto. Hallar la velocidad a la que se desplaza un rayo de luz sobre la costa (*a*) en el punto más próximo, (*b*) en un punto situado a 4 800 metros del punto más próximo. *Sol.* (*a*) 240π m/s, (*b*) $2\,000\pi/3$ m/s.

52. Las longitudes de dos lados de un triángulo son 15 y 20 metros. Hallar (*a*) la velocidad de variación del tercer lado cuando el ángulo formado por los otros dos es de 60° y aumenta a razón de 2° por segundo (*b*) la velocidad a la que aumenta el área. *Sol.* (*a*) $\pi/\sqrt{39}$ m/s, (*b*) $\frac{5}{6}\pi$ m²/s.

Capítulo 13

Derivada de las funciones trigonométricas inversas

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS. La función inversa de $x = \text{sen } y$ es $y = \text{arc sen } x$ (o bien, $\text{sen}^{-1}x$). El dominio de definición del arc sen x es $-1 \leq x \leq 1$, es decir, el campo de variación de y; el campo de variación de arc sen x es el conjunto de los números reales, es decir el dominio de la definición de sen y. El dominio de definición y el campo de variación de las restantes funciones trigonométricas inversas se establece de forma análoga.

Las funciones trigonométricas inversas son multiformes. Con objeto de evitar confusiones de referirnos a una determinada parte de estas funciones, se define para cada una de ellas un arco llamado *rama principal*. En los gráficos que figuran a continuación la rama principal se representa con un trazo más grueso.

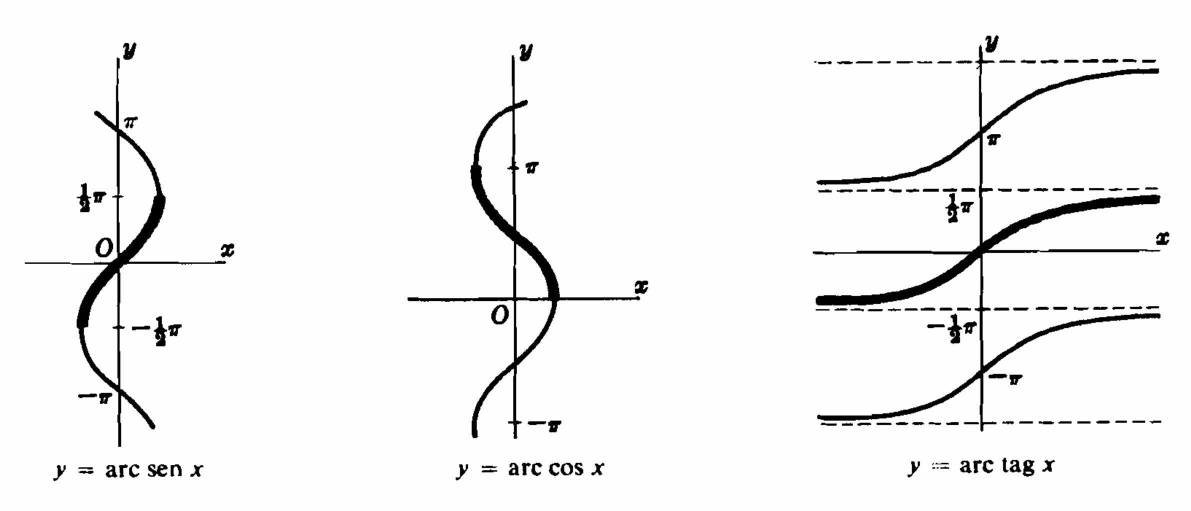


Fig. 13-1

Función	**Rama Principal**
$y = \text{arc sen } x$	$-\frac{1}{2}\pi \leqq y \leqq \frac{1}{2}\pi$
$y = \text{arc cos } x$	$0 \leqq y \leqq \pi$
$y = \text{arc tag } x$	$-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$
$y = \text{arc cot } x$	$0 < y < \pi$
$y = \text{arc sec } x$	$-\pi \leqq y < -\frac{1}{2}\pi, \quad 0 \leqq y < \frac{1}{2}\pi$
$y = \text{arc csc } x$	$-\pi < y \leqq -\frac{1}{2}\pi, \quad 0 < y \leqq \frac{1}{2}\pi$

REGLAS DE DERIVACION. Sea u una función derivable de x; entonces

20. $\dfrac{d}{dx}(\text{arc sen } u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$

21. $\dfrac{d}{dx}(\text{arc cos } u) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$

22. $\dfrac{d}{dx}(\text{arc tag } u) = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$

23. $\dfrac{d}{dx}(\text{arc cot } u) = -\dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$

24. $\dfrac{d}{dx}(\text{arc sec } u) = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

25. $\dfrac{d}{dx}(\text{arc csc } u) = -\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

Problemas resueltos

1. Derivar: (*a*) $\frac{d}{dx}(\text{arc sen } u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$, (*b*) $\frac{d}{dx}(\text{arc sec } u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$.

(*a*) Sea $y = \text{arc sen } u$, siendo u una función derivable de x. Tendremos $u = \text{sen } y$ y

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\text{sen } y) = \frac{d}{dy}(\text{sen } y)\frac{dy}{dx} = \cos y\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-u^2}\frac{dy}{dx}$$

tomamos el signo positivo porque $\cos y \geq 0$ en el intervalo $-\frac{1}{2}\pi \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$. Por tanto, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$.

(*b*) Sea $y = \text{arc sec } u$, siendo u una función derivable de x. Tendremos $u = \sec y$ y

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dy}(\sec y)\frac{dy}{dx} = \sec y \text{ tag } y\frac{dy}{dx} = u\sqrt{u^2-1}\frac{dy}{dx}$$

tomamos el signo positivo porque $\text{tag } y \geq 0$ en los intervalos $0 \leq y < \frac{1}{2}\pi$ y $-\pi \leq y < -\frac{1}{2}\pi$. Por tanto,

$\frac{d}{dx}(\text{arc sec } u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$.

Hallar la primera derivada en los problemas 2-9.

2. $y = \text{arc sen}(2x-3)$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}\frac{d}{dx}(2x-3) = \frac{1}{\sqrt{3x-x^2-2}}$

3. $y = \text{arc cos } x^2$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\frac{d}{dx}(x^2) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

4. $y = \text{arc tag } 3x^2$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(3x^2)^2}\frac{d}{dx}(3x^2) = \frac{6x}{1+9x^4}$

5. $f(x) = \text{arc cot}\frac{1+x}{1-x}$

$$f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

6. $f(x) = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \text{ arc sen}\frac{x}{a}$

$$f'(x) = x\cdot\tfrac{1}{2}(a^2-x^2)^{-1/2}(-2x) + (a^2-x^2)^{1/2} + a^2\frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}\cdot\frac{1}{a} = 2\sqrt{a^2-x^2}$$

7. $y = x \text{ arc csc}\frac{1}{x} + \sqrt{1-x^2}$

$$y' = x\left[\frac{-1}{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\right] + \text{arc csc}\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}(x) + \tfrac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x) = \text{arc csc}\frac{1}{x}$$

8. $y = \frac{1}{ab}\text{ arc tag}\left(\frac{b}{a}\text{ tag } x\right)$

$$y' = \frac{1}{ab}\frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\text{ tag } x\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{b}{a}\text{ tag } x\right)] = \frac{1}{ab}\cdot\frac{a^2}{a^2+b^2\text{ tag}^2 x}\cdot\frac{b}{a}\sec^2 x$$

$$= \frac{\sec^2 x}{a^2+b^2\text{ tag}^2 x} = \frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2\text{ sen}^2 x}$$

9. $y^2 \text{ sen } x + y = \text{arc tag } x$ $\qquad 2yy'\text{ sen } x + y^2\cos x + y' = \frac{1}{1+x^2}$

$$y'(2y\text{ sen } x + 1) = \frac{1}{1+x^2} - y^2\cos x \quad \text{y} \quad y' = \frac{1-(1+x^2)y^2\cos x}{(1+x^2)(2y\text{ sen } x+1)}$$

10. En un terreno circular hay un foco de luz L situado como indica la figura. Un objeto parte de B y se mueve hacia el centro O a una velocidad de 10 metros por segundo. Hallar la velocidad de su sombra sobre la circunferencia cuando el objeto se encuentra en el punto medio de BO.

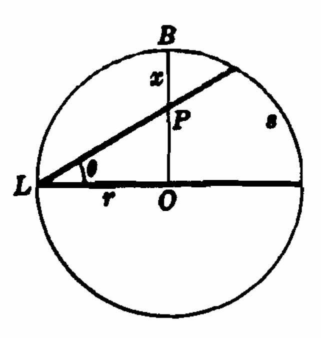


Fig. 13-2

Sea x (metros) la distancia de P a B en el instante t; llamando r al radio del círculo, θ el ángulo OLP y s el arco interceptado por θ, tendremos

$$s = r(2\theta), \text{ y } \theta = \text{arc tag } OP/LO = \text{arc tag}\,(r - x)/r.$$

$$\frac{ds}{dt} = 2r\frac{d\theta}{dt} = 2r\cdot\frac{1}{1+[(r-x)/r]^2}\cdot\left(-\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{-2r^2}{x^2-2rx+2r^2}\cdot\frac{dx}{dt}$$

Cuando $x = \frac{1}{2}r$ y $dx/dt = 10$, será $ds/dt = -16$ m/s.

La sombra se mueve a una velocidad de 16 m/s.

11. La arista inferior de un cartel de 12 metros de altura, está situado a 6 metros por encima de los ojos de un observador. Suponiendo que la visión más favorable se obtiene cuando el ángulo subtendido por el cartel y los ojos es máximo, calcular la distancia de la pared a la que se debe situar el observador.

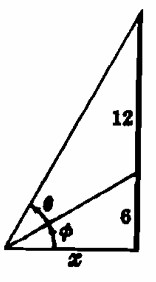


Fig. 13-3

Sea θ el ángulo subtendido y x la distancia a la pared. De la Fig. 13-3, se deduce $\text{tag}\,(\theta + \phi) = 18/x$, $\text{tag}\,\phi = 6/x$ y

$$\text{tag}\,\theta = \text{tag}\,\{(\theta+\phi)-\phi\} = \frac{\text{tag}\,(\theta+\phi) - \text{tag}\,\phi}{1+\text{tag}\,(\theta+\phi)\,\text{tag}\,\phi} = \frac{18/x - 6/x}{1+(18/x)(6/x)} = \frac{12x}{x^2+108}$$

$$\theta = \text{arc tag}\,\frac{12x}{x^2+108} \quad \text{y} \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{12(-x^2+108)}{x^4+360x^2+11.664}.$$ El valor crítico es

$x = 6\sqrt{3} = 10{,}4$. El observador se debe situar a una distancia de 10,4 m de la pared.

Problemas propuestos

12. Deducir las fórmulas de derivación 21, 22, 23 y 25.

Hallar dy/dx en los Problemas 13-20.

13. $y = \text{arc sen}\,3x$ *Sol.* $\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$

14. $y = \text{arc cos}\,\frac{1}{2}x$ *Sol.* $-\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

15. $y = \text{arc tag}\,3/x$ *Sol.* $-\dfrac{3}{x^2+9}$

16. $y = \text{arc sen}\,(x-1)$ *Sol.* $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

17. $y = x^2\,\text{arc cos}\,2/x$ *Sol.* $2x\left(\text{arc cos}\,\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right)$

18. $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \text{arc sen}\,\dfrac{x}{a}$ *Sol.* $\dfrac{x^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$

19. $y = (x-a)\sqrt{2ax-x^2} + a^2\,\text{arc sen}\,\dfrac{x-a}{a}$ *Sol.* $2\sqrt{2ax-x^2}$

20. $y = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x^2} + \dfrac{1}{2}\,\text{arc sec}\,\dfrac{x}{2}$ *Sol.* $\dfrac{8}{x^3\sqrt{x^2-4}}$

21. En la vertical del centro de un terreno circular de 30 metros de radio se quiere situar un foco de luz a una altura tal que la iluminación en el perímetro sea máxima. Sabiendo que la intensidad en un punto cualquiera del contorno es directamente proporcional al coseno del ángulo de incidencia (ángulo entre el rayo luminoso y la vertical) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco, hallar la altura que debe tener este.

Ind: Sea x la altura, y la distancia del foco a un punto de la circunferencia exterior y θ el ángulo de incidencia. Tendremos $I = k\dfrac{\cos\theta}{y^2} = \dfrac{kx}{(x^2+900)^{3/2}}$. *Sol.* $15\sqrt{2}$ metros.

22. Dos barcos parten de un mismo punto A, uno se dirige hacia el Sur a una velocidad de 15 millas por hora y el otro hacia el Este a una velocidad de 25 millas por hora, durante 1 hora, volviendo después hacia el Norte. Hallar la velocidad de rotación de la línea que los une al cabo de 3 horas de iniciado el movimiento. *Sol.* 20/193 rad/h.

Capítulo 14

Derivada de las Funciones Exponenciales y Logarítmicas

NUMERO $e = \lim_{h\to+\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h = \lim_{k\to 0}(1+k)^{1/k}$

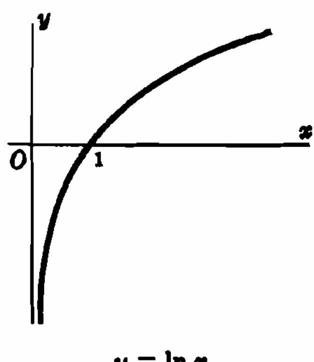
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = 2{,}71828\ldots$$

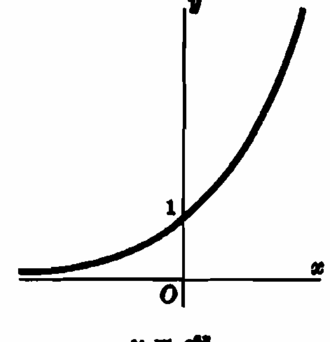
(Ver Problema 1.)

NOTACION. Si $a > 0$ y $a \neq 1$, y si $a^y = x$, entonces $y = \log_a x$.

$$y = \log_e x = \ln x \qquad y = \log_{10} x = \log x$$

El dominio de definición es $x > 0$; el intervalo de variación es el conjunto de los números reales.





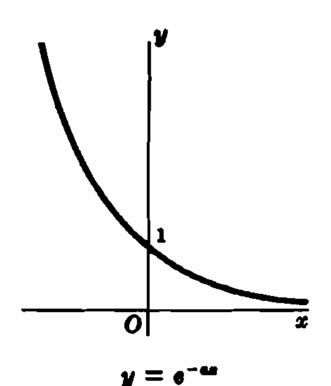


Fig. 14-1

REGLAS DE DERIVACION. Si u es una función derivable de x,

26. $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u}\log_a e\,\frac{du}{dx}, \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

27. $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

28. $\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a\,\frac{du}{dx}, \quad (a > 0)$

29. $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\,\frac{du}{dx}$

(Ver Problemas 2-17.)

DERIVADA LOGARITMICA. Cuando una función derivable, $y = f(x)$, es un producto de factores, el proceso de derivación se simplifica tomando previamente logaritmos neperianos, o lo que es igual, aplicando la fórmula

30. $$\frac{d}{dx}(y) = y\,\frac{d}{dx}(\ln y)$$

(Ver Problemas 18-19.)

Problemas resueltos

1. Demostrar que: $2 < \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Desarrollando por el binomio de Newton, siendo n un número entero positivo,

$$\text{(i)}\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!} + \cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n!}$$

Evidentemente, para cualquier valor de $n \neq 1$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$. También, si en (i) cada diferencia $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{n}\right)$, ... se sustituye por un número mayor 1, tendremos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \quad \left(\text{ya que } \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$< 3 \quad \left(\text{puesto que } \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1\right)$$

Por tanto, $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Si $n \to \infty$ tomando valores positivos enteros; tendremos

$$1-\frac{1}{n}\to 1,\quad 1-\frac{2}{n}\to 1,\quad \ldots,\qquad \text{y}\qquad \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!} \to \frac{1}{k!}$$

Esto conduce a $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots = 2{,}71828\ldots$

2. Derivar $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u}\log_a e\,\frac{du}{dx}$ y $\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$.

Sea $y = \log_a u$, siendo u una función derivable de x. Tendremos

$$y + \Delta y = \log_a(u+\Delta u)$$

$$\Delta y = \log_a(u+\Delta u) - \log_a u = \log_a\frac{u+\Delta u}{u} = \log_a\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{1}{\Delta u}\log_a\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right) = \frac{1}{u}\cdot\frac{u}{\Delta u}\log_a\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right) = \frac{1}{u}\log_a\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{u/\Delta u}$$

y

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}\lim_{\Delta u\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{u/\Delta u} = \frac{1}{u}\log_a\left\{\lim_{\Delta u\to 0}\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{u/\Delta u}\right\} = \frac{1}{u}\log_a e$$

Así pues, derivando como función de función $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{d}{du}(\log_a u)\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\log_a e\,\frac{du}{dx}$.

Cuando $a = e$, $\log_a e = \log_e e = 1$ y $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$.

3. $y = \log_a(3x^2-5)$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^2-5}\log_a e\cdot\frac{d}{dx}(3x^2-5) = \frac{6x}{3x^2-5}\log_a e$

4. $y = \ln(x+3)^2 = 2\ln(x+3)$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 2\frac{1}{x+3}\cdot\frac{d}{dx}(x+3) = \frac{2}{x+3}$

5. $y = \ln^2(x+3)$

$$y' = 2\ln(x+3)\cdot\frac{d}{dx}[\ln(x+3)] = 2\ln(x+3)\cdot\frac{1}{x+3}\cdot\frac{d}{dx}(x+3) = \frac{2\ln(x+3)}{x+3}$$

6. $y = \ln(x^3+2)(x^2+3) = \ln(x^3+2) + \ln(x^2+3)$

$$y' = \frac{1}{x^3+2}\cdot\frac{d}{dx}(x^3+2) + \frac{1}{x^2+3}\cdot\frac{d}{dx}(x^2+3) = \frac{3x^2}{x^3+2} + \frac{2x}{x^2+3}$$

7. $f(x) = \ln\dfrac{x^4}{(3x-4)^2} = \ln x^4 - \ln(3x-4)^2 = 4\ln x - 2\ln(3x-4)$

$$f'(x) = 4\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x) - 2\frac{1}{3x-4}\frac{d}{dx}(3x-4) = \frac{4}{x} - \frac{6}{3x-4}$$

8. $y = \ln \operatorname{sen} 3x \qquad y' = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 3x}\cdot\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} 3x) = 3\dfrac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x} = 3\cot 3x$

9. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

$$y' = \frac{1+\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}(2x)}{x+(1+x^2)^{1/2}} = \frac{1+x(1+x^2)^{-1/2}}{x+(1+x^2)^{1/2}}\cdot\frac{(1+x^2)^{1/2}}{(1+x^2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

10. Deducir $\dfrac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a\,\dfrac{du}{dx}$ y $\dfrac{d}{dx}(e^u) = e^u\dfrac{du}{dx}$.

Sea $y = a^u$, siendo u una función derivable de x. Tendremos $\ln y = u\ln a$,

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln a\frac{du}{dx}, \qquad \frac{dy}{dx} = y\ln a\frac{du}{dx} \qquad \text{o} \qquad \frac{d}{dx}(a^u) = a^u\ln a\frac{du}{dx}$$

Cuando $a = e$, $\ln a = \ln e = 1$, con lo cual $\dfrac{d}{dx}(e^u) = e^u\dfrac{du}{dx}$.

11. $y = e^{-\frac{1}{2}x} \qquad y' = e^{-\frac{1}{2}x}\dfrac{d}{dx}(-\frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$

12. $y = e^{x^2} \qquad y' = e^{x^2}\cdot\dfrac{d}{dx}(x^2) = 2xe^{x^2}$

13. $y = a^{3x^2} \qquad y' = a^{3x^2}\ln a\cdot\dfrac{d}{dx}(3x^2) = 6xa^{3x^2}\ln a$

14. $y = x^2 3^x \qquad y' = x^2\cdot\dfrac{d}{dx}(3^x) + 3^x\cdot\dfrac{d}{dx}(x^2) = x^2 3^x\ln 3 + 3^x 2x = x3^x(x\ln 3 + 2)$

15. $y = \dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{ax}+e^{-ax}}$

$$y' = \frac{(e^{ax}+e^{-ax})\frac{d}{dx}(e^{ax}-e^{-ax}) - (e^{ax}-e^{-ax})\frac{d}{dx}(e^{ax}+e^{-ax})}{(e^{ax}+e^{-ax})^2}$$

$$= \frac{(e^{ax}+e^{-ax})[a(e^{ax}+e^{-ax})] - (e^{ax}-e^{-ax})[a(e^{ax}-e^{-ax})]}{(e^{ax}+e^{-ax})^2}$$

$$= a\frac{(e^{2ax}+2+e^{-2ax}) - (e^{2ax}-2+e^{-2ax})}{(e^{ax}+e^{-ax})^2} = \frac{4a}{(e^{ax}+e^{-ax})^2}$$

16. Hallar y'', en la función $y = e^{-x}\ln x$.

$$y' = e^{-x}\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{x} - e^{-x}\ln x = \frac{e^{-x}}{x} - y$$

$$y'' = \frac{x\frac{d}{dx}(e^{-x}) - e^{-x}\frac{d}{dx}(x)}{x^2} - y' = \frac{-xe^{-x}-e^{-x}}{x^2} - \frac{e^{-x}}{x} + e^{-x}\ln x = -e^{-x}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\ln x\right)$$

17. Hallar y'', en la función $y = e^{-2x}\operatorname{sen} 3x$.

$$y' = e^{-2x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} 3x) + \operatorname{sen} 3x\frac{d}{dx}(e^{-2x}) = 3e^{-2x}\cos 3x - 2e^{-2x}\operatorname{sen} 3x = 3e^{-2x}\cos 3x - 2y$$

$$y'' = 3e^{-2x}\frac{d}{dx}(\cos 3x) + 3\cos 3x\frac{d}{dx}(e^{-2x}) - 2y'$$

$$= -9e^{-2x}\operatorname{sen} 3x - 6e^{-2x}\cos 3x - 2(3e^{-2x}\cos 3x - 2e^{-2x}\operatorname{sen} 3x)$$

$$= -e^{-2x}(12\cos 3x + 5\operatorname{sen} 3x)$$

Hallar la primera derivada aplicando la derivación logarítmica.

18. $y = (x^2+2)^3(1-x^3)^4 \qquad \ln y = \ln (x^2+2)^3(1-x^3)^4 = 3\ln(x^2+2) + 4\ln(1-x^3)$

$$y' = y\frac{d}{dx}[3\ln(x^2+2)+4\ln(1-x^3)] = (x^2+2)^3(1-x^3)^4\left[\frac{6x}{x^2+2} - \frac{12x^2}{1-x^3}\right]$$

$$= 6x(x^2+2)^2(1-x^3)^3(1-4x-3x^3)$$

19. $y = \dfrac{x(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{1/2}} \qquad \ln y = \ln x + 2\ln(1-x^2) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

$$y' = \frac{x(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{1/2}}\left[\frac{1}{x} - \frac{4x}{1-x^2} - \frac{x}{1+x^2}\right] = \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{1/2}} - \frac{4x^2(1-x^2)}{(1+x^2)^{1/2}} - \frac{x^2(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{(1-5x^2-4x^4)(1-x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}$$

20. Hallar (*a*) los máximos y mínimos relativos y (*b*) los puntos de inflexión de la curva $y = f(x) = x^2e^x$.

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(2+x)$$
$$f''(x) = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x = e^x(2+4x+x^2)$$
$$f'''(x) = 6e^x + 6xe^x + x^2e^x = e^x(6+6x+x^2)$$

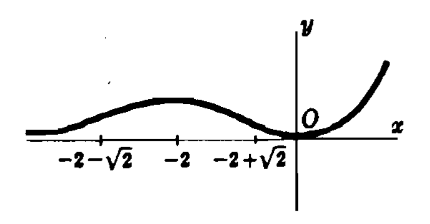


Fig. 14-2

(*a*) Resolviendo $f'(x) = 0$ obtenemos los valores críticos $x = 0$ y $x = -2$.

$f''(0) > 0$ y $(0, 0)$ es un mínimo relativo.
$f''(-2) < 0$ y $(-2, 4/e^2)$ es un máximo relativo.

(*b*) Resolviendo $f''(x) = 0$ obtenemos los posibles puntos de inflexión en $x = -2 \pm \sqrt{2}$.
$f'''(-2-\sqrt{2}) \neq 0$ y $f'''(-2+\sqrt{2}) \neq 0$; los puntos $x = -2 \pm \sqrt{2}$ son puntos de inflexión.

21. Estudiar la curva de probabilidades $y = ae^{-b^2x^2}$, $a > 0$.

(*a*) La curva está situada por encima del eje x, puesto que $e^{-b^2x^2} > 0$ para todos los valores de x. Cuando $x \to \pm\infty$, $y \to 0$, con lo que el eje x es una asíntota horizontal.

(*b*) $y' = -2ab^2xe^{-b^2x^2}$ e $y'' = 2ab^2(2b^2x^2 - 1)e^{-b^2x^2}$.

Cuando $y' = 0$, $x = 0$; y cuando $x = 0$, $y'' < 0$. El punto $(0, a)$ es un máximo de la curva.

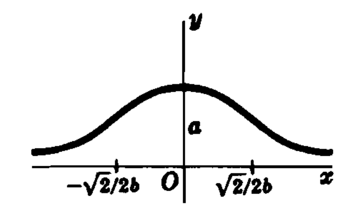
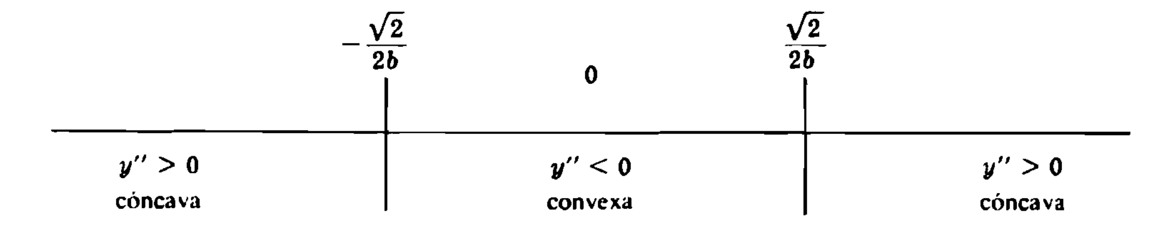


Fig. 14-3

(*c*) Cuando $y'' = 0$, $2b^2x^2 - 1 = 0$, y $x = \pm\sqrt{2}/2b$ son posibles puntos de inflexión.



Los puntos $(\pm\sqrt{2}/2b, ae^{-1/2})$ son puntos de inflexión.

22. La constante de equilibrio K de una reacción química, varía con la temperatura absoluta T según la ley $K = K_0 e^{-\frac{1}{2}q(T-T_0)/T_0T}$, siendo K_0, q y T_0 constantes. Hallar la variación de K por grado de variación de T expresando el resultado en tantos por ciento.

El tanto por ciento de la variación de K por grado de variación de T viene dado por $\dfrac{1}{K}\dfrac{dK}{dT} = \dfrac{d(\ln K)}{dT}$

Por tanto $\ln K = \ln K_0 - \frac{1}{2}q\dfrac{T - T_0}{T_0T}$ y $\dfrac{d(\ln K)}{dT} = -\dfrac{q}{2T^2} = -\dfrac{50q}{T^2}\,\%$.

23. Estudiar la función de las vibraciones forzadas $y = f(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{sen} 2\pi t$.

(*a*) Cuando $t = 0$, $y = 0$. La intersección con el eje y es 0.

Cuando $y = 0$, $\operatorname{sen} 2\pi t = 0$ y $t = \ldots, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ Estos son los puntos de intersección con el eje t.

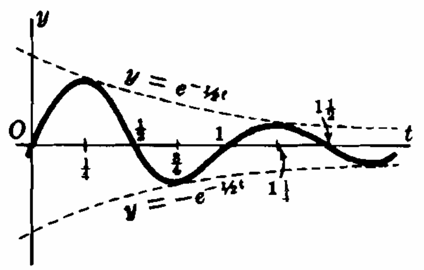
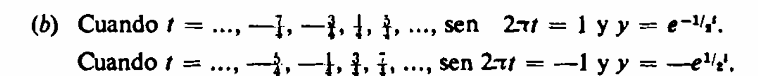


Fig. 14-4


(*b*) Cuando $t = \ldots, -\frac{7}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \ldots$, $\operatorname{sen}\ 2\pi t = 1$ y $y = e^{-\frac{1}{2}t}$.
Cuando $t = \ldots, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \ldots$, $\operatorname{sen} 2\pi t = -1$ y $y = -e^{\frac{1}{2}t}$.

La función dada oscila entre las dos curvas $y = e^{-\frac{1}{2}t}$ e $y = -e^{-\frac{1}{2}t}$, siendo tangente a ellas en los puntos mencionados.

(*c*)
$$y' = f'(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(2\pi\cos 2\pi t - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi t)$$
$$y'' = f''(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\{(\tfrac{1}{4} - 4\pi^2)\operatorname{sen} 2\pi t - 2\pi\cos 2\pi t\}$$

Cuando $y' = 0$, $2\pi\cos 2\pi t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi t = 0$, esto es, $\operatorname{tag} 2\pi t = 4\pi$.

Si $t = \xi = 0{,}237$ es el ángulo positivo más pequeño que satisface esta relación, tendremos que $t = \ldots, \xi - \frac{3}{2}$ $\xi - 1, \xi - \frac{1}{2}, \xi, \xi + \frac{1}{2}, \xi + 1, \ldots$ son los valores críticos.

Para $n = 0,1,2,\ldots, f''(\xi \pm \frac{1}{2}n)$ y $f''\left(\xi \pm \dfrac{n+1}{2}\right)$ tienen signo contrario y $f''(\xi \pm \frac{1}{2}n)$ y $f''\left(\xi \pm \dfrac{n+2}{2}\right)$ tienen el mismo signo; por tanto, los valores críticos dan lugar, alternativamente, a máximos y mínimos de la función. Estos puntos están situados ligeramente a la izquierda de los puntos de contacto con las curvas $y = e^{-\frac{1}{2}t}$ e $y = -e^{-\frac{1}{2}t}$.

(*d*) Cuando $y'' = 0$, $\operatorname{tag} 2\pi t = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{4} - 4\pi^2} = \dfrac{8\pi}{1 - 16\pi^2}$.

Si $t = \eta = 0{,}475$ es el menor ángulo positivo que satisface esta relación, tendremos, $t = \ldots, \eta - 1, \eta - \frac{1}{2}, \eta, \eta + \frac{1}{2}, \eta + 1, \ldots$ son los posibles puntos de inflexión. Estos puntos, situados ligeramente a la izquierda de los puntos de intersección de la curva con el eje x, son puntos de inflexión.

24. En la ecuación $s = ce^{-bt}\operatorname{sen}(kt + \theta)$ del movimiento de vibración amortiguado y en la que c, b, k y θ son constantes, demostrar que $a = -2bv - (k^2 + b^2)s$.

$$v = ds/dt = ce^{-bt}[-b\operatorname{sen}(kt + \theta) + k\cos(kt + \theta)]$$

$$\begin{aligned} a = dv/dt &= ce^{-bt}[(b^2 - k^2)\operatorname{sen}(kt + \theta) - 2bk\cos(kt + \theta)] \\ &= ce^{-bt}[-2b\{-b\operatorname{sen}(kt + \theta) + k\cos(kt + \theta)\} - (k^2 + b^2)\operatorname{sen}(kt + \theta)] \\ &= -2bv - (k^2 + b^2)s \end{aligned}$$

Problemas propuestos

Hallar dy/dx en los Problemas 25-35.

25. $y = \ln(4x - 5)$ *Sol.* $4/(4x - 5)$

26. $y = \ln\sqrt{3 - x^2}$ *Sol.* $x/(x^2 - 3)$

27. $y = \ln 3x^5$ *Sol.* $5/x$

28. $y = \ln(x^2 + x - 1)^3$ *Sol.* $(6x + 3)/(x^2 + x - 1)$

29. $y = x \cdot \ln x - x$ *Sol.* $\ln x$

30. $y = \ln(\sec x + \tan x)$ *Sol.* $\sec x$

31. $y = \ln(\ln \tan x)$ *Sol.* $2/(\operatorname{sen} 2x \ln \tan x)$

32. $y = (\ln x^2)/x^2$ *Sol.* $(2 - 4\ln x)/x^3$

33. $y = \frac{1}{6}x^6(\ln x - \frac{1}{6})$ *Sol.* $x^4 \ln x$

34. $y = x(\operatorname{sen}\ln x - \cos\ln x)$ *Sol.* $2\operatorname{sen}\ln x$

35. $y = x\ln(4 + x^2) + 4\arctan\frac{1}{2}x - 2x$
Sol. $\ln(4 + x^2)$

36. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = \ln x$ en uno de sus puntos (x_0, y_0). Deducir un procedimiento para trazar la tangente a la curva utilizando la intersección con el eje y.

37. Estudiar la función: $y = x^2 \ln x$. *Sol.* Min. en $x = 1/\sqrt{e}$, P.I. en $x = 1/e^{3/2}$.

38. Demostrar que el ángulo de intersección de las curvas $y = \ln(x - 2)$ e $y = x^2 - 4x + 3$ en el punto (3, 0) es $\phi = \arctan 1/3$.

Hallar dy/dx en los Problemas 39-46.

39. $y = e^{5x}$ *Sol.* $5e^{5x}$

40. $y = e^{x^3}$ *Sol.* $3x^2e^{x^3}$

41. $y = e^{\operatorname{sen} 3x}$ *Sol.* $3e^{\operatorname{sen} 3x}\cos 3x$

42. $y = 3^{-x^2}$ *Sol.* $-2x \cdot 3^{-x^2}\ln 3$

43. $y = e^{-x}\cos x$ *Sol.* $-e^{-x}(\cos x + \operatorname{sen} x)$

44. $y = \operatorname{arc\,sen} e^x$ *Sol.* $e^x/\sqrt{1 - e^{2x}}$

45. $y = \tan^2 e^{3x}$ *Sol.* $6e^{3x}\tan e^{3x}\sec^2 e^{3x}$

46. $y = e^{e^x}$ *Sol.* $e^{(x + e^x)}$

47. Si $y = x^2e^x$, demostrar que $y''' = (x^2 + 6x + 6)e^x$.

48. Si $y = e^{-2x}(\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)$, demostrar que $y'' + 4y' + 8y = 0$.

49. Estudiar la función: (*a*) $y = x^2e^{-x}$, (*b*) $y = x^2e^{-x^2}$.
Sol. (*a*) Max. en $x = 2$; min. en $x = 0$; P.I. en $x = 2 \pm \sqrt{2}$
(*b*) Max. en $x = \pm 1$; min. en $x = 0$; P.I. en $x = \pm 1{,}51$, $x = \pm 0{,}47$.

50. Hallar el rectángulo de área máxima que tiene uno de sus vértices sobre la curva $y = e^{-x^2}$ y uno de sus lados sobre el eje x.
Ind: $A = 2xy = 2xe^{-x^2}$, siendo $P(x,y)$ un vértice del rectángulo sobre la curva. *Sol.* $A = \sqrt{2/e}$.

51. Demostrar que las curvas $y = e^{ax}$ e $y = e^{ax}\cos ax$ son tangentes en los puntos $x = 2n\pi/a$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ y que las curvas $y = e^{-ax}/a^2$ e $y = e^{ax}\cos ax$ son mutuamente perpendiculares en los mismos puntos.

52. Dada la curva $y = xe^x$, demostrar (*a*) que el punto $(-1, -1/e)$ es un número relativo, (*b*) que el punto $(-2\ -2/e^2)$ es un punto de inflexión y (*c*) que la curva es convexa a la izquierda y cóncava a la derecha del punto de inflexión.

Hallar dy/dx en los Problemas 53-56, aplicando la derivación logarítmica.

53. $y = x^x$ *Sol.* $x^x(1 + \ln x)$

54. $y = x^{\ln x}$ *Sol.* $2\,x^{(\ln x - 1)}\ln x$

55. $y = x^2 e^{2x}\cos 3x$ *Sol.* $x^2 e^{2x}\cos 3x\,\{2/x + 2 - 3\tan 3x\}$

56. $y = x^{e^{-x^2}}$ *Sol.* $e^{-x^2}x^{e^{-x^2}}(1/x - 2x\ln x)$

57. Demostrar (*a*) $\frac{d^n}{dx^n}(xe^x) = (x + n)e^x$, (*b*) $\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1}\ln x) = \frac{(n-1)!}{x}$.

Capítulo 15

Derivada de las funciones hiperbólicas

DEFINICION DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS. Supondremos que u es un número real, mientras que no se advierta otra cosa:

$$\operatorname{senh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \qquad \coth u = \frac{1}{\operatorname{tagh} u} = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}}, \quad (u \neq 0)$$

$$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \qquad \operatorname{sech} u = \frac{1}{\cosh u} = \frac{2}{e^u + e^{-u}}$$

$$\operatorname{tagh} u = \frac{\operatorname{senh} u}{\cosh u} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} \qquad \operatorname{csch} u = \frac{1}{\operatorname{senh} u} = \frac{2}{e^u - e^{-u}}, \quad (u \neq 0)$$

FORMULAS DE DERIVACION. Si u es una función derivable de x,

31. $\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} u) = \cosh u \frac{du}{dx}$
32. $\frac{d}{dx}(\cosh u) = \operatorname{senh} u \frac{du}{dx}$
33. $\frac{d}{dx}(\operatorname{tagh} u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$
34. $\frac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$
35. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \operatorname{tagh} u \frac{du}{dx}$
36. $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$

Ver Problemas 1-12.

DEFINICION DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS INVERSAS.

$\operatorname{senh}^{-1} u = \ln(u + \sqrt{1 + u^2})$, para todos los valores de u

$\coth^{-1} u = \frac{1}{2} \ln \frac{u+1}{u-1}, \quad (u^2 > 1)$

$\cosh^{-1} u = \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}), \quad (u \geqq 1)$

$\operatorname{sech}^{-1} u = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - u^2}}{u}, \quad (0 < u \leqq 1)$

$\operatorname{tagh}^{-1} u = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}, \quad (u^2 < 1)$

$\operatorname{csch}^{-1} u = \ln\left(\frac{1}{u} + \frac{\sqrt{1+u^2}}{|u|}\right), \quad (u \neq 0)$

(Unicamente figuran los valores principales de $\cosh^{-1} x$ y $\operatorname{sech}^{-1} x$.)

FORMULAS DE DERIVACION. Si u es una función derivable de x,

37. $\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}$
38. $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}, \quad (u > 1)$
39. $\frac{d}{dx}(\operatorname{tagh}^{-1} x) = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad (u^2 < 1)$
40. $\frac{d}{dx}(\coth^{-1} u) = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad (u^2 > 1)$
41. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} u) = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}, \quad (0 < u < 1)$
42. $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} u) = \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}, \quad (u \neq 0)$

Ver Problemas 13-19.

Problemas resueltos

1. Demostrar: $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$.

$$\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}(e^{2u} + 2 + e^{-2u}) - \tfrac{1}{4}(e^{2u} - 2 + e^{-2u}) = 1$$

2. Derivar: $\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} u) = \cosh u \frac{du}{dx}$, siendo u una función derivable de x.

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}\frac{du}{dx} = \cosh u \frac{du}{dx}$$

Hallar $\frac{dy}{dx}$ en los Problemas 3-12.

3. $y = \operatorname{senh} 3x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \cosh 3x \cdot \frac{d}{dx}(3x) = 3\cosh 3x$

4. $y = \cosh \frac{1}{2}x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{senh} \frac{1}{2}x \cdot \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}\operatorname{senh}\frac{1}{2}x$

5. $y = \operatorname{tagh}(1 + x^2)$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{sech}^2(1 + x^2) \cdot \frac{d}{dx}(1 + x^2) = 2x\operatorname{sech}^2(1 + x^2)$

6. $y = \coth \frac{1}{x}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{csch}^2\frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\operatorname{csch}^2\frac{1}{x}$

7. $y = x\operatorname{sech} x^2$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x^2) + \operatorname{sech} x^2 \cdot \frac{d}{dx}(x)\\ &= x(-\operatorname{sech} x^2 \operatorname{tagh} x^2)2x + \operatorname{sech} x^2\\ &= -2x^2\operatorname{sech} x^2 \operatorname{tagh} x^2 + \operatorname{sech} x^2\end{aligned}$$

8. $y = \operatorname{csch}^2(x^2 + 1)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2\operatorname{csch}(x^2 + 1) \cdot \frac{d}{dx}[\operatorname{csch}(x^2 + 1)]\\ &= 2\operatorname{csch}(x^2 + 1)[-\operatorname{csch}(x^2 + 1)\coth(x^2 + 1) \cdot 2x]\\ &= -4x\operatorname{csch}^2(x^2 + 1)\coth(x^2 + 1)\end{aligned}$$

9. $y = \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2x - \frac{1}{2}x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}(\cosh 2x)2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1) = \operatorname{senh}^2 x$

10. $y = \ln \operatorname{tagh} 2x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{tagh} 2x}(2\operatorname{sech}^2 2x) = \frac{2}{\operatorname{senh} 2x \cosh 2x} = 4\operatorname{csch} 4x$

11. Hallar las coordenadas del punto mínimo de la catenaria $y = a\cosh\frac{x}{a}$.

$$f'(x) = \frac{1}{a}\left(a\operatorname{senh}\frac{x}{a}\right) = \operatorname{senh}\frac{x}{a}, \qquad f''(x) = \frac{1}{a}\cosh\frac{x}{a} = \frac{1}{a}\left(\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}\right)$$

Cuando $f'(x) = \frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2} = 0$, $x = 0$; $f''(0) > 0$. El punto $(0, a)$ es el mínimo.

12. Hallar los puntos de inflexión de las funciones (*a*) $y = \operatorname{senh} x$, (*b*) $y = \cosh x$, (*c*) $y = \operatorname{tagh} x$.

(*a*) $f'(x) = \cosh x, f''(x) = \operatorname{senh} x$, y $f'''(x) = \cosh x$.

$f''(x) = \operatorname{senh} x = 0$, cuando $x = 0$; $f'''(0) \neq 0$. El punto (0, 0) es un punto de inflexión.

(*b*) $f'(x) = \operatorname{senh} x, f''(x) = \cosh x \neq 0$ para todos los valores de x. No tiene punto de inflexión.

(*c*) $f'(x) = \operatorname{sech}^2 x, f''(x) = -2\operatorname{sech}^2 x \operatorname{tagh} x = -2\dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh^3 x}$, y $f'''(x) = \dfrac{4\operatorname{senh}^2 x - 2}{\cosh^4 x}$.

$f''(x) = 0$ cuando $x = 0$; $f'''(0) \neq 0$. El punto (0, 0) es un punto de inflexión.

13. Deducir: (*a*) $\operatorname{senh}^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$,

(*b*) $\operatorname{sech}^{-1}x = \cosh^{-1}\dfrac{1}{x} = \ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$, $0 < x \leq 1$.

(*a*) Sea $\operatorname{senh}^{-1} x = y$; tendremos $x = \operatorname{senh} y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ o sea $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$.

Despejando e^y: $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$, puesto que $e^y > 0$. Por tanto, $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

(*b*) Sea $\operatorname{sech}^{-1} x = y$; tendremos $x = \operatorname{sech} y = \dfrac{1}{\cosh y}$, $\cosh y = \dfrac{1}{x}$, e $y = \cosh^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \operatorname{sech}^{-1} x$.

También, $x = \operatorname{sech} y = \dfrac{2}{e^y + e^{-y}}$ o $e^{2y}x - 2e^y + x = 0$.

Despejando e^y: $e^y = \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$, cuando $y \geq 0$. Por tanto, $y = \ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$, $0 < x \leq 1$.

14. Deducir: $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1} u) = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}\dfrac{du}{dx}$.

Sea $y = \operatorname{senh}^{-1} u$, siendo u una función derivable de x. Tendremos $\operatorname{senh} y = u$,

$$\cosh y \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y}\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{senh}^2 y}}\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}$$

Hallar dy/dx en los Problemas 15-19.

15. $y = \operatorname{senh}^{-1} 3x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(3x)^2+1}}\cdot\frac{d}{dx}(3x) = \frac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$$

16. $y = \cosh^{-1} e^x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\cdot\frac{d}{dx}(e^x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}$$

17. $y = 2\operatorname{tagh}^{-1}(\tan\frac{1}{2}x)$

$$\frac{dy}{dx} = 2\,\frac{1}{1-\operatorname{tag}^2\frac{1}{2}x}\cdot\frac{d}{dx}(\operatorname{tag}\tfrac{1}{2}x)$$
$$= 2\,\frac{1}{1-\operatorname{tag}^2\frac{1}{2}x}\sec^2\tfrac{1}{2}x\cdot\tfrac{1}{2} = \frac{\sec^2\frac{1}{2}x}{1-\operatorname{tag}^2\frac{1}{2}x} = \sec x$$

18. $y = \coth^{-1}\dfrac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{-1}{x^2-1}$$

19. $y = \operatorname{sech}^{-1}(\cos x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\cos x\sqrt{1-\cos^2 x}}\cdot\frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x\sqrt{1-\cos^2 x}} = \sec x$$

Problemas propuestos

20. (*a*) Representar las funciones $y = e^x$ e $y = -e^{-x}$ y promediar las ordenadas de las dos curvas para todos los valores de x con objeto de obtener puntos de la función $y = \text{senh}\, x$. Trazar esta curva.

    (*b*) Representar la función $y = \cosh x$ aplicando (*a*) a las funciones $y = e^x$ e $y = e^{-x}$.

21. Dada la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$, demostrar: (*a*) que el punto $P(\cosh u, \text{senh}\, u)$ es un punto de la hipérbola, (*b*) que la tangente en A corta a la recta OP en el punto $T(1, \text{tagh}\, u)$. (Ver Fig. 15-1.)

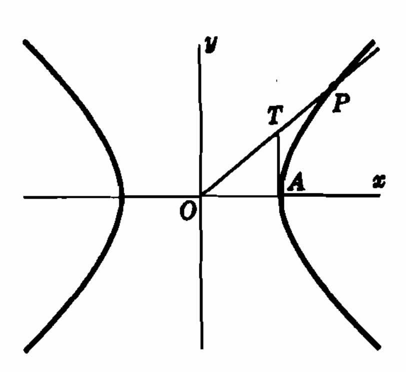


Fig. 15-1

22. Demostrar: (*a*) $\text{senh}\,(x + y) = \text{senh}\, x \cosh y + \cosh x\, \text{senh}\, y$

    (*b*) $\cosh (x + y) = \cosh x \cosh y + \text{senh}\, x\, \text{senh}\, y$

    (*c*) $\text{senh}\, 2x = 2\, \text{senh}\, x \cosh x$

    (*d*) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \text{senh}^2 x = 2 \cosh^2 x - 1 = 2\, \text{senh}^2 x + 1$

    (*e*) $\text{tagh}\, 2x = \dfrac{2\, \text{tagh}\, x}{1 + \text{tagh}^2 x}$

Hallar dy/dx en los Problemas 23-28.

23. $y = \text{senh}\, \frac{1}{4}x$ *Sol.* $\frac{1}{4} \cosh \frac{1}{4}x$

24. $y = \cosh^2 3x$ *Sol.* $3\, \text{senh}\, 6x$

25. $y = \text{tagh}\, 2x$ *Sol.* $2\, \text{sech}^2\, 2x$

26. $y = \ln \cosh x$ *Sol.* $\text{tagh}\, x$

27. $y = \text{arc tag senh}\, x$ *Sol.* $\text{sech}\, x$

28. $y = \ln \sqrt{\text{tagh}\, 2x}$ *Sol.* $2\, \text{csch}\, 4x$

29. Demostrar: (*a*) Si $y = a \cosh \dfrac{x}{a}$, se verifica $y'' = \dfrac{1}{a} \sqrt{1 + (y')^2}$.

    (*b*) Si $y = A \cosh bx + B\, \text{senh}\, bx$, siendo b, A, B constante, se verifica $y'' = b^2 y$.

30. Demostrar: (*a*) $\cosh^{-1} u = \ln (u + \sqrt{u^2 - 1})$, $u \geq 1$.

    (*b*) $\text{tagh}^{-1} u = \frac{1}{2} \ln \dfrac{1 + u}{1 - u}$, $u^2 < 1$.

31. (*a*) Representar la curva $y = \text{senh}^{-1} x$, trazando la simétrica de la función $y = \text{senh}\, x$ con respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

    (*b*) Representar la rama principal de la función $y = \cosh^{-1} x$ trazando la simétrica de la mitad derecha de la función $y \cosh x$ con respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

32. Deducir las fórmulas de derivación 32-36 y 38-40,42.

Hallar dy/dx en los Problemas 33-36.

33. $y = \text{senh}^{-1} \frac{1}{2}x$ *Sol.* $1/\sqrt{x^2 + 4}$

34. $y = \cosh^{-1} (1/x)$ *Sol.* $-1/x\sqrt{1 - x^2}$

35. $y = \text{tagh}^{-1} (\text{sen}\, x)$ *Sol.* $\sec x$

36. $x = a\, \text{sech}^{-1} (y/a) - \sqrt{a^2 - y^2}$ *Sol.* $-y/\sqrt{a^2 - y^2}$

Capítulo 16

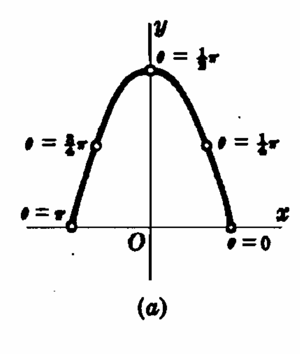
Representación de curvas en forma paramétrica

ECUACIONES PARAMETRICAS. Las coordenadas (x, y) de un punto P de una curva pueden ser funciones, $x = f(u)$, $y = g(u)$, de una tercera variable o parámetro u; las ecuaciones $x = f(u)$ $y = g(u)$ reciben el nombre de *ecuaciones paramétricas* de la curva dada.

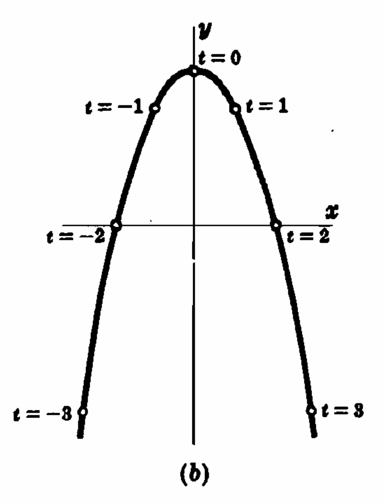
Ejemplo:

(*a*) $x = \cos\theta$, $y = 4\,\text{sen}^2\,\theta$ son las ecuaciones paramétricas, siendo el parámetro θ, de la parábola $4x^2 + y = 4$, ya que, $4x^2 + y = 4\cos^2\theta + 4\,\text{sen}^2\,\theta = 4$.

(*b*) $x = \frac{1}{2}t$, $y = 4 - t^2$ es otra representación paramétrica de la curva, en la que el parámetro es t.



(*a*)



(*b*)

Fig. 16-1

Obsérvese, sin embargo, que el primer sistema de ecuaciones paramétricas solo representa una porción de la curva, mientras que el segundo representa la totalidad de ella.

LA PRIMERA DERIVADA $\dfrac{dy}{dx}$ viene dada por $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/du}{dx/du}$.

LA SEGUNDA DERIVADA $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ viene dada por $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{du}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{du}{dx}$.

Problemas resueltos

1. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, siendo $x = \theta - \text{sen}\,\theta$, $y = 1 - \cos\theta$.

$$\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta,\quad \frac{dy}{d\theta} = \text{sen}\,\theta,\quad \text{y}\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\text{sen}\,\theta}{1 - \cos\theta}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\text{sen}\,\theta}{1 - \cos\theta}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx} = \frac{\cos\theta - 1}{(1 - \cos\theta)^2}\cdot\frac{1}{1 - \cos\theta} = -\frac{1}{(1 - \cos\theta)^2}$$

2. Hallar $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$, siendo $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$.

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \operatorname{sen} t), \quad \frac{dy}{dt} = e^t(\operatorname{sen} t + \cos t), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\operatorname{sen} t + \cos t}{\cos t - \operatorname{sen} t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\operatorname{sen} t + \cos t}{\cos t - \operatorname{sen} t}\right) \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{2}{(\cos t - \operatorname{sen} t)^2} \cdot \frac{1}{e^t(\cos t - \operatorname{sen} t)} = \frac{2}{e^t(\cos t - \operatorname{sen} t)^3}$$

3. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $x = \sqrt{t}$, $y = t - 1/\sqrt{t}$ en el punto para $t = 4$.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad \frac{dy}{dt} = 1 + \frac{1}{2t\sqrt{t}}, \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = 2\sqrt{t} + \frac{1}{t}$$

Para $t = 4$: $x = 2$, $y = 7/2$, y $m = dy/dx = 17/4$.

La ecuación de la tangente es $(y - 7/2) = (17/4)(x - 2)$ o sea $17x - 4y = 20$.

4. La posición de una partícula que se mueve a lo largo de una curva viene dada, en función del tiempo t, por las ecuaciones paramétricas $x = 2 - 3\cos t$, $y = 3 + 2\operatorname{sen} t$, en donde x se expresa en metros y t en segundos. Hallar la variación en la unidad de tiempo y el cambio de dirección (*a*) de la abscisa en el instante $t = \pi/3$, (*b*) de la ordenada en el instante $t = 5\pi/3$, (*c*) del ángulo θ de inclinación de la tangente en el instante $t = 2\pi/3$.

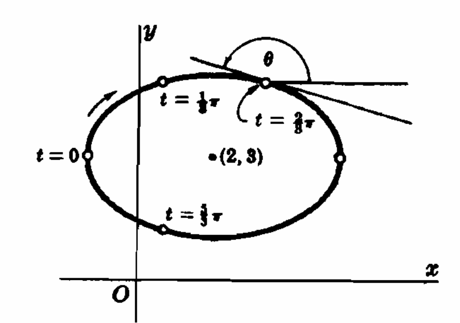


Fig. 16-2

$dx/dt = 3\operatorname{sen} t, \quad dy/dt = 2\cos t, \quad \operatorname{tag}\theta = dy/dx = \frac{2}{3}\cot t$

(*a*) Cuando $t = \pi/3$, $dx/dt = 3\sqrt{3}/2$. La abscisa aumenta a razón de $3\sqrt{3}/2$ m/seg.

(*b*) Cuando $t = 5\pi/3$, $dy/dt = 2(\frac{1}{2}) = 1$. La ordenada aumenta a razón de 1 m/seg.

(*c*) $\theta = \operatorname{arc\,tag}(\frac{2}{3}\cot t)$, y $\frac{d\theta}{dt} = \frac{-6\csc^2 t}{9 + 4\cot^2 t}$. Para $t = 2\pi/3$, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{-6(2/\sqrt{3})^2}{9 + 4(-1/\sqrt{3})^2} = -\frac{24}{31}$. El ángulo de inclinación de la tangente disminuye a razón de 24/31 radianes/segundo.

Problemas propuestos

Hallar dy/dx y d^2y/dx^2 en los Problemas 6-9.

5. $x = 2 + t$, $y = 1 + t^2$ *Sol.* $dy/dx = 2t$, $d^2y/dx^2 = 2$

6. $x = t + 1/t$, $y = t + 1$ *Sol.* $dy/dx = t^2/(t^2 - 1)$, $d^2y/dx^2 = -2t^3/(t^2 - 1)^3$

7. $x = 2\operatorname{sen} t$, $y = \cos 2t$ *Sol.* $dy/dx = -2\operatorname{sen} t$, $d^2y/dx^2 = -1$

8. $x = \cos^3\theta$, $y = \operatorname{sen}^3\theta$ *Sol.* $dy/dx = -\operatorname{tag}\theta$, $d^2y/dx^2 = 1/(3\cos^4\theta\operatorname{sen}\theta)$

9. $x = a(\cos\phi + \phi\operatorname{sen}\phi)$, $y = a(\operatorname{sen}\phi - \phi\cos\phi)$ *Sol.* $dy/dx = \operatorname{tag}\phi$, $d^2y/dx^2 = 1/(a\phi\cos^3\phi)$

10. Hallar la pendiente de la tangente a la curva $x = e^{-t}\cos 2t$, $y = e^{-2t}\operatorname{sen} t$ en el punto $t = 0$. *Sol.* -2.

11. Hallar las coordenadas cartesianas del punto de mayor ordenada de la curva $x = 96t$, $y = 96t - 16t^2$. Ind: Calcular t para que y sea máximo. *Sol.* (288, 144).

12. Hallar la ecuación de la tangente y de la normal a la curva (*a*) $x = 3e^t$, $y = 5e^{-t}$ en el punto $t = 0$, (*b*) $x = a\cos^4\theta$ $y = a\operatorname{sen}^4\theta$ en $\theta = \frac{1}{4}\pi$.
Sol. (*a*) $5x + 3y - 30 = 0$, $3x - 5y + 16 = 0$; (*b*) $2x + 2y - a = 0$, $x - y = 0$.

13. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $x = a\cos^3 t$, $y = a\operatorname{sen}^3 t$ en un punto $P(x, y)$. Demostrar que la longitud, del segmento de tangente interceptado por los ejes coordenados es igual a a.
Sol. $x\operatorname{sen} t + y\cos t = \frac{1}{2}a\operatorname{sen} 2t$.

14. Dada la curva $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$, determinar los puntos en los cuales la tangente es (*a*) horizontal y (*b*) vertical. Demostrar que en los puntos en que la curva se corta consigo mismo, las dos tangentes son mutuamente perpendiculares.
Sol. (*a*) $t = \pm\sqrt{3}/3$, (*b*) $t = 0$.

Capítulo 17

Curvatura

DERIVADA DE LA LONGITUD DE ARCO. Sea $y = f(x)$ una función cuya primera derivada es una función continua. Sean A (ver Fig. 17-1) un punto fijo de la curva, s la longitud del arco comprendido entre A y otro punto cualquiera de ella $P\ (x, y)$, $Q(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ un punto de la curva muy próximo al anterior y Δs la longitud del arco comprendido entre P y Q; la variación de la longitud del arco $s\ (= AP)$ por unidad de variación de x y de y vienen expresadas, respectivamente, por

$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \qquad \frac{ds}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta y} = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

El signo, más o menos de la primera fórmula corresponde a los casos en que s aumenta o disminuye al aumentar x y en la segunda fórmula, según que s aumente o disminuya al aumentar y.

Cuando la función se defina por sus ecuaciones paramétricas, $x = f(u)$, $y = g(u)$, la variación de s con respecto a u viene dada por $\dfrac{ds}{du} = \pm\sqrt{\left(\dfrac{dx}{du}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{du}\right)^2}$. El signo más o menos se tomará según que s aumente o disminuya al aumentar u.

Para evitar la repetición del doble signo supondremos en lo sucesivo que sobre cada arco considerado se ha elegido un sentido tal que la derivada de la longitud de arco sea positiva.

(Ver Problemas 1-5.)

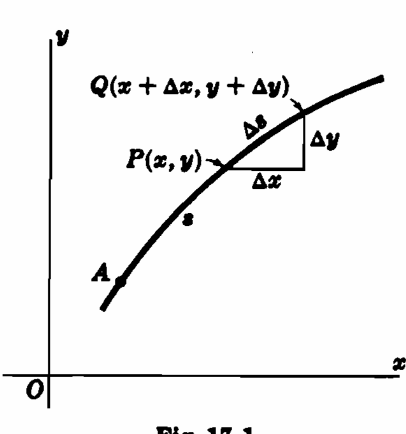


Fig. 17-1

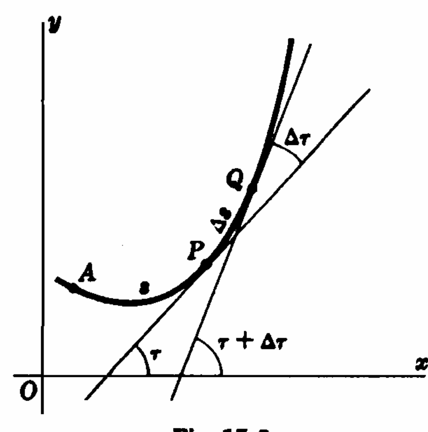


Fig. 17-2

CURVATURA. La curvatura K de una curva $y = f(x)$ en un punto P de ella es igual a la variación del ángulo de inclinación τ de la tangente en P por unidad de longitud de arco s. Es decir,

$$K = \frac{d\tau}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \tau}{\Delta s} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}; \qquad K = \frac{-\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left\{1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2\right\}^{3/2}}$$

De la primera de estas fórmulas se deduce que K es positiva cuando P está sobre un arco cóncavo y negativa cuando pertenezca a un arco convexo.

No es extraño encontrar en otros textos el valor de K definido de manera que siempre resulte positivo, esto es, como el valor absoluto de la fórmula anterior. Por esta razón, en las soluciones de los problemas no tendremos en cuenta el signo de K.

EL RADIO DE CURVATURA R de un punto P de una curva viene dado por $R = |1/K|$ siempre que $K \neq 0$.

EL CIRCULO OSCULADOR o de curvatura de una curva en un punto P es el círculo de radio R situado en la región cóncava de la curva y tangente a ella en P.

Para construir el círculo osculador se procede como sigue: se traza la normal en el punto P hacia región cóncava de la curva y, sobre ella, se lleva una distancia $PC = R$. El punto C es el centro del círculo buscado.

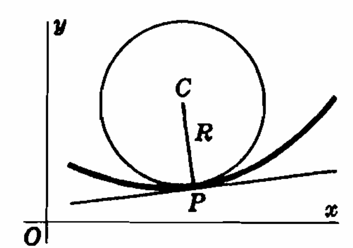


Fig. 17-3

EL CENTRO DE CURVATURA. Correspondiente a un punto $P(x, y)$ de una curva es el centro C del círculo osculador en P. Las coordenadas (α, β) del centro de curvatura vienen dadas por

$$\alpha = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \qquad \beta = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

o bien, $$\alpha = x + \frac{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{\frac{d^2x}{dy^2}}, \qquad \beta = y - \frac{\frac{dx}{dy}\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]}{\frac{d^2x}{dy^2}}$$

LA EVOLUTA de una curva es el lugar geométrico de los centros de curvatura de la misma.

(Ver Problemas 6-13.)

Problemas resueltos

1. Derivar: $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

Sea s (ver Fig. 17-1) la longitud de arco de un punto fijo P a otro variable $P(x, y)$ de una curva $y = f(x)$ cuya derivada es continua. Sea Δs la longitud de arco desde P hasta otro punto muy próximo $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ y PQ la longitud de la cuerda que une P y Q.

Tendremos $\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{PQ} \cdot \frac{PQ}{\Delta x}$, y, como $(PQ)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$, resulta

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\Delta s}{PQ}\right)^2\left(\frac{PQ}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\Delta s}{PQ}\right)^2 \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} = \left(\frac{\Delta s}{PQ}\right)^2\left\{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\}$$

Cuando Q se aproxima a P a lo largo de la curva, $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ y $\frac{\Delta s}{PQ} = \frac{\text{arc } PQ}{\text{cuerda } PQ} \to 1$. (Para demostrar esto último, ver Capítulo 41. Problema 22.) Por tanto,

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \lim_{\Delta x \to 0}\left\{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

2. Hallar $\frac{ds}{dx}$ en el punto $P(x, y)$ de la parábola $y = 3x^2$. $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + (6x)^2} = \sqrt{1 + 36x^2}$

3. Hallar $\frac{ds}{dx}$ y $\frac{ds}{dy}$ en el punto $P(x, y)$ de la elipse $x^2 + 4y^2 = 8$.

(a) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y}$; $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{16y^2} = \frac{x^2 + 16y^2}{16y^2} = \frac{32 - 3x^2}{32 - 4x^2}$ y $\frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{32 - 3x^2}{32 - 4x^2}}$

(b) $\frac{dx}{dy} = -\frac{4y}{x}$; $1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1 + \frac{16y^2}{x^2} = \frac{x^2 + 16y^2}{x^2} = \frac{2 + 3y^2}{2 - y^2}$ y $\frac{ds}{dy} = \sqrt{\frac{2 + 3y^2}{2 - y^2}}$

4. Hallar $\frac{ds}{d\theta}$ en el punto $P(\theta)$ de la curva $x = \sec\theta$, $y = \text{tag}\,\theta$.

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{\sec^2\theta\,\text{tag}^2\theta + \sec^4\theta} = |\sec\theta|\sqrt{\text{tag}^2\theta + \sec^2\theta}$$

5. Las coordenadas (x, y), metros de un móvil P, vienen dadas por $x = \cos t - 1$, $y = 2\,\text{sen}\,t + 1$, en donde t es el tiempo en segundos. Hallar la velocidad de P a lo largo de la curva en el instante (a) $t = 5\pi/6$, (b) $t = 5\pi/3$ y (c) la velocidad máxima y mínima de P.

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\text{tag}^2 t + 4\cos^2 t} = \sqrt{1 + 3\cos^2 t}$$

(a) Para $t = 5\pi/6$, $ds/dt = \sqrt{1 + 3(\frac{3}{4})} = \sqrt{13}/2$ m/s.

(b) Para $t = 5\pi/3$, $ds/dt = \sqrt{1 + 3(\frac{1}{4})} = \sqrt{7}/2$ m/s.

(c) Sea $S = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + 3\cos^2 t}$. Tendremos $\frac{dS}{dt} = \frac{-3\cos t\,\text{sen}\,t}{S}$.

Resolviendo $dS/dt = 0$ obtenemos los valores críticos $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.

Para $t = 0$ y π, la velocidad $ds/dt = \sqrt{1 + 3(1)} = 2$ m/seg es máxima.

Para $t = \pi/2$ y $3\pi/2$, la velocidad $ds/dt = \sqrt{1 + 3(0)} = 1$ m/s. es mínima

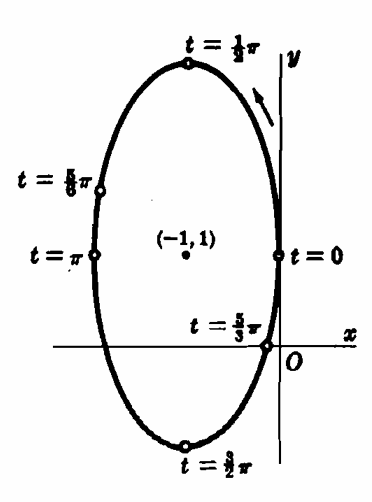


Fig. 17-4

6. Hallar la curvatura de la parábola $y^2 = 12x$ en los puntos (a) (3, 6), (b) $(\frac{3}{4}, -3)$, (c) (0, 0).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{y}, \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{36}{y^2}, \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx} = -\frac{36}{y^3}$$

(a) En (3, 6): $\frac{dy}{dx} = 1$, $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{6}$, y $K = \frac{-1/6}{2^{3/2}} = -\frac{\sqrt{2}}{24}$.

(b) En $(\frac{3}{4}, -3)$: $\frac{dy}{dx} = -2$, $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{3}$, y $K = \frac{4/3}{5^{3/2}} = \frac{4\sqrt{5}}{75}$.

(c) En (0, 0), $\frac{dy}{dx}$ no está definida. Pero $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{6} = 0$, $1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1$, $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{6}$, y $K = -\frac{1}{6}$.

7. Hallar la curvatura de la cicloide cuyas ecuaciones paramétricas son $x = \theta - \text{sen}\,\theta$, $y = 1 - \cos\theta$, en el punto de mayor ordenada —más alto— de un arco.

Hallemos el punto de mayor ordenada en el intervalo $0 < x < 2\pi$: $dy/d\theta = \text{sen}\,\theta$, con lo que el valor crítico en dicho intervalo es $x = \pi$. Como $d^2y/d\theta^2 = \cos\theta < 0$ cuando $\theta = \pi$ es un máximo relativo y, por tanto, el más alto de la curva en el intervalo.

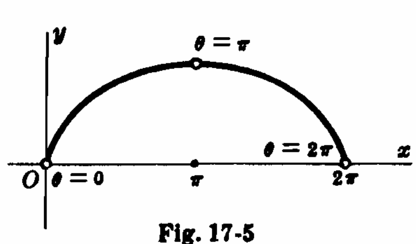


Fig. 17-5

Para calcular la curvatura,

$$\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \text{sen}\,\theta, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen}\,\theta}{1 - \cos\theta}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\text{sen}\,\theta}{1 - \cos\theta}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx} = \frac{-1}{(1 - \cos\theta)^2}$$

Para $\theta = \pi$, $dy/dx = 0$, $d^2y/dx^2 = -1/4$, y $K = -1/4$.

8. Hallar la curvatura de la cisoide $y^2(2-x) = x^3$ en el punto (1, 1).

Derivando la ecuación dada, implícitamente, con respecto a x, tendremos

$$(a)\quad -y^2 + (2-x)2yy' = 3x^2 \quad \text{y}$$
$$(b)\quad -2yy' + (2-x)2yy'' + (2-x)2(y')^2 - 2yy' = 6x$$

De (a), para $x = y = 1$, $-1 + 2y' = 3$ e $y' = 2$.

De (b), para $x = y = 1$ e $y' = 2$, $-4 + 2y'' + 8 - 4 = 6$ e $y'' = 3$

Por tanto $K = 3/(1+4)^{3/2} = 3\sqrt{5}/25$.

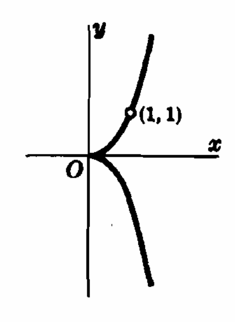


Fig. 17-6

9. Hallar el punto de máxima curvatura de la curva $y = \ln x$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2},\quad \text{y}\quad K = \frac{-x}{(1+x^2)^{3/2}}$$

$\dfrac{dK}{dx} = \dfrac{2x^2-1}{(1+x^2)^{5/2}}$ y el valor crítico es $x = 1/\sqrt{2}$. El punto pedido es $(1/\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\ln 2)$.

10. Determinar el centro de curvatura C de la curva $y = f(x)$ en uno de sus puntos $P(x, y)$ en el cual $y' \neq 0$. (Ver Fig. 17-3.)

El centro de curvatura $C(\alpha, \beta)$ está situado: (*1*) en la normal en P y (*2*) a una distancia R de P sobre la región cóncava de la curva. En consecuencia,

$$(1)\quad \beta - y = -\frac{1}{y'}(\alpha - x) \qquad \text{y} \qquad (2)\quad (\alpha-x)^2 + (\beta-y)^2 = R^2 = \frac{[1+(y')^2]^3}{(y'')^2}$$

De (*1*), $\alpha - x = -y'(\beta - y)$; sustituyendo en (*2*),

$$(\beta-y)^2[1+(y')^2] = \frac{[1+(y')^2]^3}{(y'')^2} \qquad y \qquad \beta - y = \pm\frac{1+(y')^2}{y''}$$

Para determinar el signo, observemos que cuando la curva es cóncava, $y'' > 0$ y, como C debe estar por encima de P, $\beta - y > 0$. Por tanto, el signo es positivo en este caso. (Se deja para el alumno la demostración de que el signo es + cuando $y'' < 0$.) Así pues:

$$\beta = y + \frac{1+(y')^2}{y''} \quad \text{y de } (1),\quad \alpha = x - \frac{y'[1+(y')^2]}{y''}$$

11. Hallar la ecuación del círculo de curvatura de $2xy + x + y = 4$ en el punto (1, 1).

$2y + 2xy' + 1 + y' = 0$; en (1, 1), $y' = -1$. De donde $1 + (y')^2 = 2$.

$4y' + 2xy'' + y'' = 0$; en (1, 1), $y'' = 4/3$.

$$K = \frac{4/3}{2\sqrt{2}} \text{ y } R = \frac{3\sqrt{2}}{2}. \qquad \alpha = 1 - \frac{-1(2)}{4/3} = \frac{5}{2},\quad \beta = 1 + \frac{2}{4/3} = \frac{5}{2}.$$

La ecuación pedida es $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ o $(x-5/2)^2 + (y-5/2)^2 = 9/2$.

12. Hallar la ecuación de la evoluta de la parábola $y^2 = 12x$.

$$\text{En } P(x,y):\ \frac{dy}{dx} = \frac{6}{y} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}},\quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{36}{y^2} = 1 + \frac{3}{x},\quad \text{y}\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{36}{y^3} = -\frac{\sqrt{3}}{2x^{3/2}}.$$

$$\alpha = x - \frac{\sqrt{3/x}\,(1+3/x)}{-\sqrt{3}/2x^{3/2}} = x + \frac{2\sqrt{3}\,(x+3)}{\sqrt{3}} = 3x + 6$$

$$\beta = y + \frac{1+36/y^2}{-36/y^3} = y - \frac{y^3+36y}{36} = -\frac{y^3}{36}$$

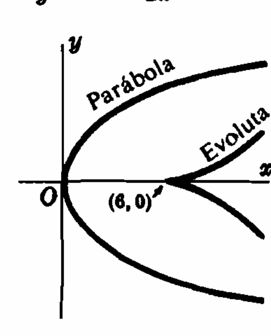


Fig. 17-7

Las ecuaciones $\alpha = 3x + 6$, $\beta = -y^3/36$ se pueden considerar como las ecuaciones paramétricas de la evoluta, estando ligados los parámetros x e y por medio de la ecuación de la parábola. En este caso, la eliminación de los parámetros es sencilla. Despejando, $x = (\alpha - 6)/3$, $y = -\sqrt[3]{36\beta}$ y sustituyendo en la ecuación de la parábola, tendremos:

$$(36\beta)^{2/3} = 4(\alpha - 6) \quad \text{ó} \quad 81\beta^2 = 4(\alpha-6)^3$$

13. Hallar la ecuación de la evoluta de la curva $x = \cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta$.

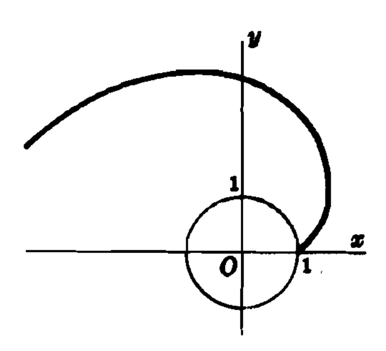


Fig. 17-8

En $P(x, y)$: $\dfrac{dx}{d\theta} = \theta\cos\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta} = \theta \operatorname{sen}\theta$, $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tag}\theta$,

$$\text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sec^2\theta}{\theta\cos\theta} = \frac{\sec^3\theta}{\theta}$$

$$\alpha = x - \frac{\operatorname{tag}\theta\sec^2\theta}{(\sec^3\theta)/\theta} = x - \theta\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$$

$$\beta = y + \frac{\sec^2\theta}{(\sec^3\theta)/\theta} = y + \theta\cos\theta = \operatorname{sen}\theta$$

$\alpha = \cos\theta$, $\beta = \operatorname{sen}\theta$ son las ecuaciones paramétricas de la evoluta

Problemas propuestos

Hallar la derivada de la longitud de arco en los Problemas 14-19.

14. $x^2 + y^2 = 25$ *Sol.* $ds/dx = 5/\sqrt{25 - x^2}$, $ds/dy = 5/\sqrt{25 - y^2}$

15. $y^2 = x^3$ *Sol.* $ds/dx = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 9x}$, $ds/dy = \sqrt{4 + 9y^{2/3}}/3y^{1/3}$

16. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ *Sol.* $ds/dx = (a/x)^{1/3}$, $ds/dy = (a/y)^{1/3}$

17. $6xy = x^4 + 3$ *Sol.* $ds/dx = (x^4 + 1)/2x^2$

18. $27ay^2 = 4(x - a)^3$ *Sol.* $ds/dx = \sqrt{(x + 2a)/3a}$

19. $y = a\cosh x/a$ *Sol.* $ds/dx = \cosh x/a$

20. Dada la curva $x = f(u)$, $y = g(u)$, deducir $(ds/du)^2 = (dx/du)^2 + (dy/du)^2$.

Hallar ds/dt en los Problemas 21-24.

21. $x = t^2$, $y = t^3$ *Sol.* $t\sqrt{4 + 9t^2}$

22. $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ *Sol.* 1

23. $x = 2\cos t$, $y = 3\operatorname{sen} t$ *Sol.* $\sqrt{4 + 5\cos^2 t}$

24. $x = \cos^3 t$, $y = \operatorname{sen}^3 t$ *Sol.* $\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2t$

25. Siendo $dy/dx = \operatorname{tag}\tau$, demostrar que $dx/ds = \cos\tau$, $dy/ds = \operatorname{sen}\tau$.

26. Siendo $\tau = \operatorname{arc\,tag}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ demostrar que $K = \dfrac{d\tau}{ds} = \dfrac{d\tau}{dx}\cdot\dfrac{dx}{ds} = \dfrac{y''}{\{1 + (y')^2\}^{3/2}}$.

27. Hallar la curvatura de las curvas dadas en los puntos indicados.

(*a*) $y = x^3/3$ en $x = 0$, $x = 1$, $x = -2$ *Sol.* $0, \sqrt{2}/2, -4\sqrt{17}/289$

(*b*) $x^2 = 4ay$ en $x = 0$, $x = 2a$ *Sol.* $\dfrac{1}{2a}, \dfrac{\sqrt{2}}{8a}$

(*c*) $y = \operatorname{sen} x$ en $x = 0$, $x = \frac{1}{2}\pi$ *Sol.* $0, -1$

(*d*) $y = e^{-x^2}$ en $x = 0$ *Sol.* -2

28. Demostrar que (*a*) la curvatura de una recta es cero y (*b*) la curvatura de un círculo es el recíproco de su radio.

29. Hallar los puntos de máxima curvatura de las funciones (*a*) $y = e^x$, (*b*) $y = x^3/3$. *Sol.* (*a*) $x = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$, (*b*) $x = 1/\sqrt[4]{5}$.

30. En un cierto sistema de coordenadas, un tramo de vía férrea consta de una parte sobre el eje x negativo hasta el origen O, después pasa por el punto $A(1, \frac{1}{4})$ a través de la curva de transición $y = \frac{1}{4}x^4$ y, finalmente, sigue a lo largo de un arco del círculo $144x^2 + 144y^2 - 96x - 264y + 9 = 0$. Demostrar que (*a*) la curva de transición es tangente al tramo recto y al circular en los puntos de unión y (*b*) la curvatura de la curva de transición es cero en O e igual al recíproco del radio del tramo circular en el punto A.

31. Hallar el radio de curvatura de (*a*) $x^3 + xy^2 - 6y^2 = 0$ en $(3, 3)$, (*b*) $x = a\operatorname{sech}^{-1}y/a - \sqrt{a^2 - y^2}$ en (x, y), (*c*) $x = 2a\operatorname{tag}\theta$, $y = a\operatorname{tag}^2\theta$, (*d*) $x = a\cos^4\theta$, $y = a\operatorname{sen}^4\theta$.
Sol. (*a*) $5\sqrt{5}$, (*b*) $a\sqrt{a^2 - y^2}/|y|$, (*c*) $2a\,|\sec^3\theta|$, (*d*) $2a(\operatorname{sen}^4\theta + \cos^4\theta)^{3/2}$

32. Hallar el centro de curvatura (*a*) en el Problema 31 (*a*), (*b*) de la función $y = \operatorname{sen} x$ en un máximo.
Sol. (*a*) $C(-7, 8)$, (*b*) $C(\frac{1}{2}\pi, 0)$.

33. Hallar la ecuación del círculo osculador de la parábola $y^2 = 12x$ en los puntos $(0, 0)$ y $(3, 6)$.
Sol. $(x - 6)^2 + y^2 = 36$, $(x - 15)^2 + (y + 6)^2 = 288$

34. Hallar la ecuación de la evoluta de
(*a*) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, (*b*) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, (*c*) $x = 2\cos t + \cos 2t$, $y = 2\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t$.
Sol. (*a*) $(a\alpha)^{2/3} + (b\beta)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$ (*b*) $(\alpha + \beta)^{2/3} + (\alpha - \beta)^{2/3} = 2a^{2/3}$
(*c*) $\alpha = \frac{1}{3}(2\cos t - \cos 2t)$, $\beta = \frac{1}{3}(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)$

Capítulo 18

Vectores en el plano

ESCALARES Y VECTORES. Las magnitudes, tales como el tiempo, la temperatura, etc., que se determinan únicamente mediante un número, reciben el nombre de *escalares.* En consecuencia, las magnitudes escalares obedecen a las leyes del álgebra ordinaria; por ejemplo, 5 seg. + 3 seg. = 8 seg.

Sin embargo, existen otras magnitudes, como la fuerza, la velocidad, la aceleración, el ímpetu, etcétera, que, para su determinación, exigen el conocimiento de un módulo, una dirección y un sentido; se denominan magnitudes *vectoriales.* Cualquier magnitud vectorial es susceptible de representarse geométricamente mediante un vector o segmento dirigido quedando definida su dirección por el ángulo que dicho segmento forma con una recta del plano y, dentro de ella, su sentido, por el lugar que señala la flecha, y su módulo por la longitud del segmento respecto de la unidad de medida elegida. Las magnitudes escalares se representan por letras, $a, b, c, \ldots$, en forma ordinaria, mientras que las vectoriales se indican con letras en negrilla, **a**, **b**, **c**, ..., o bien, en la forma **OP** [ver Fig. 18-1(*a*)]. El módulo de un vector, **a** o **OP**, se representa por |**a**| o por |**OP**|, respectivamente.

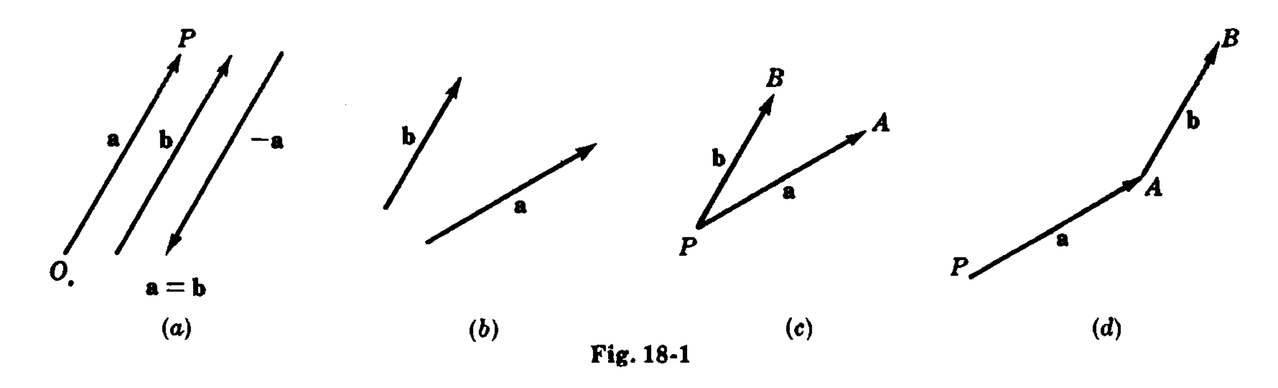


Fig. 18-1

Dos vectores, **a** y **b**, son equipolentes, **a** = **b**, cuando tienen el mismo módulo, dirección y sentido. Dos vectores de igual módulo y dirección, pero de sentido contrario, **a** y −**a**, reciben el nombre de opuestos. Más general, si **a** es un vector y k un escalar positivo, k**a** es un vector de igual dirección y sentido que **a** pero cuyo módulo es k veces el de **a**; si k es negativo, se trata de un vector de igual dirección que **a**, de módulo igual a k veces el de **a** y de sentido opuesto al de **a**.

Un vector, mientras no se advierta lo contrario, carece de una posición fija en el plano, de manera que se puede trasladar o desplazar paralelamente a sí mismo. En particular, si **a** y **b** son dos vectores [Fig. 18-1(*b*)], podremos trasladarlos paralelamente a sí mismos hasta conseguir que tengan un mismo punto inicial P u origen común [ver Fig. 18-1(*c*)] o bien que el extremo de **a** coincida con el origen de **b** [Fig. 18-1(*d*)].

SUMA Y DIFERENCIA DE DOS VECTORES. Sean **a** y **b** los vectores de la Fig. 18-1(*b*); *su suma* o *resultante*, **a** + **b** se halla de una de las maneras siguientes:

(i) Trazando los vectores como se indica en la Fig. 18-1(*c*) y completando el paralelogramo $PAQB$ de la Fig. 18-2(*e*). El vector suma es **PQ**.

(ii) Trazando los vectores como se indica en la Fig. 18-1(*d*) y completando el triángulo PAB de la Fig. 18-2(*f*). En este caso, el vector suma es **PB**.

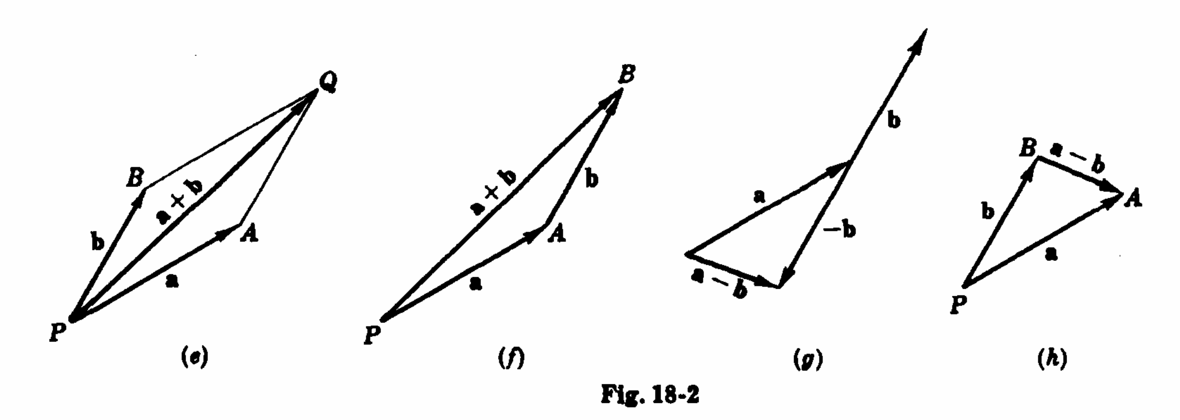


Fig. 18-2

Se deduce, pues, Fig. 18-2(f), que con la suma de tres vectores se puede formar un triángulo siempre que uno de ellos sea igual u opuesto a la suma de los otros dos.

Sean **a** y **b** los vectores de la Fig. 18-1(b); para hallar su diferencia, se procede de una de las formas siguientes:

(iii) Sumando al minuendo el opuesto al sustraendo: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$, ver Fig. 18-2($g$).

(iv) Trazando los vectores como en la Fig. 18-1(c) y completando el triángulo. En la Fig. 18-2(h), el vector $\mathbf{BA} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Sean **a**, **b**, **c** tres vectores y k un escalar; se verifica:

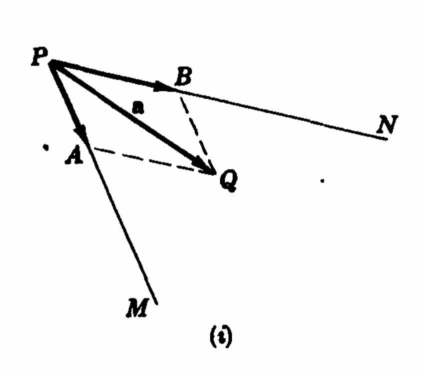
1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (Propiedad conmutativa)
2. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ (Propiedad asociativa)
3. $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ (Propiedad distributiva)

(Ver Problemas 1-4.)

COMPONENTES DE UN VECTOR. Sea $\mathbf{a} = \mathbf{PQ}$, Fig. 18-3(i), un vector y PM y PN dos rectas cualesquiera que pasan por P. Trazando el paralelogramo $PAQB$, tendremos,

$$\mathbf{a} = \mathbf{PA} + \mathbf{PB}$$

De esta manera, el vector **a** se ha *descompuesto* según las direcciones PM y PN, siendo **PA** y **PB** las *componentes de* **a** según dichas direcciones PM y PN.



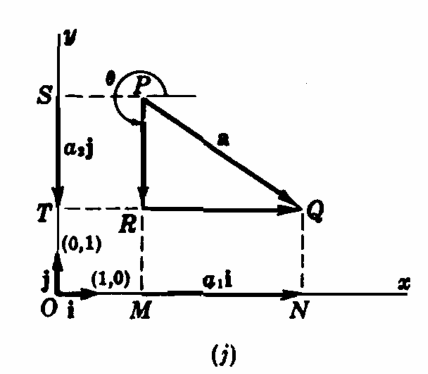


Fig. 18-3

Consideremos ahora un vector **a** en un sistema cartesiano de coordenadas [Fig. 18-3(j)], siendo iguales la unidad de medida sobre los ejes x e y. Los vectores **i** definido por los puntos (0,0) —origen— y (1, 0) —extremo— y **j** por los puntos (0, 0) y (0, 1), cuyos sentidos son los positivos de los ejes, reciben el nombre de *vectores unitarios*, del sistema, y sus módulos son la unidad.

Trazando desde el origen P y desde el extremo Q de **a** las perpendiculares a los ejes x e y y lla-

mando M, N, S y T los respectivos puntos de intersección, tendremos $\mathbf{MN} = a_1\mathbf{i}$, siendo a_1 positivo y $\mathbf{ST} = a_2\mathbf{j}$, siendo a_2 negativo. Así, pues,

$\mathbf{MN} = \mathbf{RQ} = a_1\mathbf{i}$, $\mathbf{ST} = \mathbf{PR}\ a_2\mathbf{j}$, y

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} \qquad (1)$$

Los vectores $a_1\mathbf{i}$ y $a_2\mathbf{j}$ reciben el nombre de ***componentes vectoriales*** de $\mathbf{a}$ en las direcciones indicadas y a_1 y a_2 el de *componentes escalares, componente x* y *componente y*, o, simplemente, *componentes* de $\mathbf{a}$.

Si la dirección de $\mathbf{a}$ se define por medio del ángulo θ, siendo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, medido en el sentido contrario al de las agujas del reloj desde el eje x positivo hasta el vector,

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \qquad (2)$$

y

$$\operatorname{tag} \theta = a_2/a_1 \qquad (3)$$

el cuadrante de θ viene determinado por

$$a_1 = |\mathbf{a}| \cos \theta, \qquad a_2 = |\mathbf{a}| \operatorname{sen} \theta$$

Si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$, tendremos

4. $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ si y solo si $a_1 = b_1$ y $a_2 = b_2$
5. $k\mathbf{a} = ka_1\mathbf{i} + ka_2\mathbf{j}$
6. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}$
7. $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j}$

(Ver Problema 5.)

PRODUCTO ESCALAR. El producto escalar de dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ se define por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}| \cos \theta \qquad (4)$$

siendo θ el menor de los ángulos formado por dichos vectores con el mismo origen (ver Fig. 18-4).

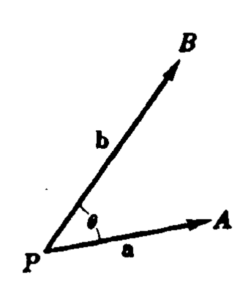


Fig. 18-4

De (4) se deduce

8. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (Propiedad conmutativa)
9. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|^2$ o $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$
10. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ si (i) $\mathbf{a} = 0$, o (ii) $\mathbf{b} = 0$, o (iii) $\mathbf{a}$ es perpendicular a $\mathbf{b}$
11. $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$; $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$
12. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = a_1b_1 + a_2b_2$
13. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ (Propiedad distributiva)
14. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{d}$

PROYECCIONES ESCALAR Y VECTORIAL. En la ecuación (1), el escalar a_1 se denomina *proyección escalar* de $\mathbf{a}$ sobre un vector de dirección la del eje x, mientras que $a_1\mathbf{i}$ es la *proyección vectorial* sobre la misma dirección.

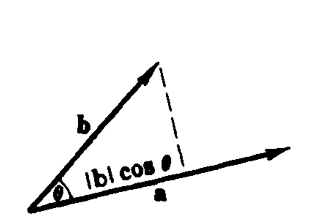
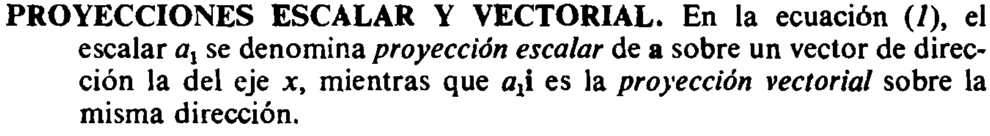


Fig. 18-5



En el Problema 7 se calcula la proyección escalar $\mathbf{a} \cdot \dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ y la proyección vertical $\left(\mathbf{a} \cdot \dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right) \dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ de un vector $\mathbf{a}$ sobre otro $\mathbf{b}$. (Obsérvese que si la dirección de $\mathbf{b}$ es la del eje x, $\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \mathbf{i}$.)

En estas condiciones,

15. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ = producto del módulo de $\mathbf{a}$ por la proyección escalar de $\mathbf{b}$ sobre $\mathbf{a}$
= producto del módulo de $\mathbf{b}$ por la proyección escalar de $\mathbf{a}$ sobre $\mathbf{b}$. (Ver Fig. 18-5.)

(Ver Problemas 8-9.)

DERIVADA DE UN VECTOR. Sea la curva representada en la Fig. 18-6 dada por sus ecuaciones paramétricas

$$x = f(u),\ y = g(u)$$

El vector

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \mathbf{i}f(u) + \mathbf{j}g(u)$$

que una el origen con el punto $P(x, y)$ de la curva, recibe el nombre de *vector de posición* o radio vector de P. En lo sucesivo, los vectores de posición los representamos por la letra $\mathbf{r}$, es decir, $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, representa un vector «libre», mientras que $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ es el *vector* que une el origen con el punto $P(3, 4)$.

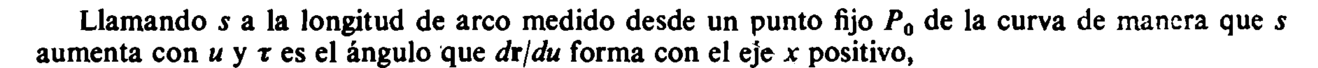
Fig. 18-6



La derivada de $\mathbf{r}$ con respecto a u es



$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} \qquad (5)$$



Llamando s a la longitud de arco medido desde un punto fijo P_0 de la curva de manera que s aumenta con u y τ es el ángulo que $d\mathbf{r}/du$ forma con el eje x positivo,

$$\operatorname{tag} \tau = \frac{dy/du}{dx/du} = \frac{dy}{dx} = \text{pendiente de la tangente a la curva en } P$$

El módulo del vector $d\mathbf{r}/du$ es

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{du}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} = \frac{ds}{du}$$

y su dirección y sentido, los de la tangente en P. Este vector se suele representar con su origen en el punto P.

Si ahora suponemos que la variable escalar u es la longitud de arco s (5), tendremos:

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} \qquad (6)$$

estando determinada la dirección y el sentido de $\mathbf{t}$ por τ, mientras que su módulo viene dado por $\sqrt{(dx/ds)^2 + (dy/ds)^2} = 1$. Es decir, $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds$ es el *vector tangente unitario a la curva* en P.

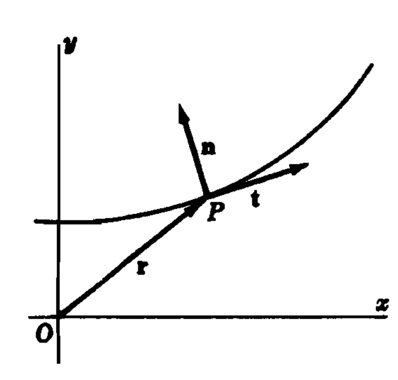


Fig. 18-7

Como $\mathbf{t}$ es un vector unitario, $\mathbf{t}$ y $d\mathbf{t}/ds$ son perpendiculares (ver Problema 11). Representando por $\mathbf{n}$ un vector unitario aplicado en P, cuya dirección y sentido sean las de $d\mathbf{t}/ds$, cuando P se mueve a lo largo de la curva (Fig. 18-7) el módulo de $\mathbf{t}$ permanece constante; por tanto, $d\mathbf{t}/ds$ indica la variación de la inclinación de $\mathbf{t}$. Así, pues, el módulo de $d\mathbf{t}/ds$ en P es igual al valor numérico de la curvatura en P, es decir, $|d\mathbf{t}/ds| = |K|$ y

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = |K|\,\mathbf{n} \qquad (7)$$

(Ver Problemas 10-13.)

Problemas resueltos

1. Demostrar: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

De la Fig. 18-8, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{PQ} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

2. Demostrar: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

De la Fig. 18-9, $\mathbf{PC} = \mathbf{PB} + \mathbf{BC} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$. También, $\mathbf{PC} = \mathbf{PA} + \mathbf{AC} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

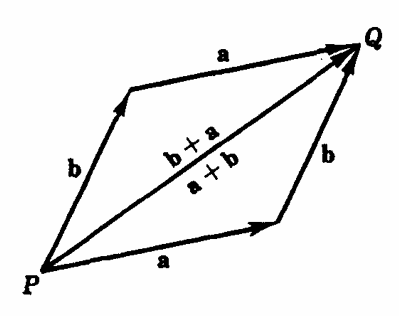


Fig. 18-8

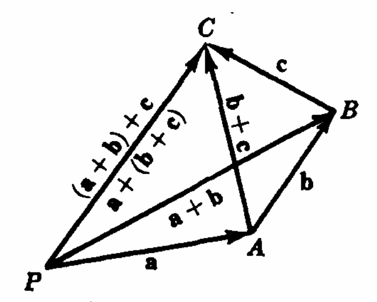


Fig. 18-9

3. Sean **a**, **b**, **c** tres vectores con su origen en P y sus extremos, A, B, C, alineados, como indica la Fig. 18-10. Si C divide a BA en la relación $x : y$, siendo $x + y = 1$,

$$\mathbf{c} = \mathbf{PB} + \mathbf{BC} = \mathbf{b} + x(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = x\mathbf{a} + (1 - x)\mathbf{b} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$$

Por ejemplo, si C es el punto medio de BA, $\mathbf{c} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ y $\mathbf{BC} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$.

4. Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

Llamando Q al punto de intersección de las diagonales (Fig. 18-11),

$$\mathbf{PB} = \mathbf{PQ} + \mathbf{QB} = \mathbf{PQ} - \mathbf{BQ} \quad \text{o} \quad \mathbf{b} = x(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - y(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = (x - y)\mathbf{a} + (x + y)\mathbf{b}$$

$x + y = 1$ y $x - y = 0$. De donde $x = y = \frac{1}{2}$ y Q es el punto medio de ambas diagonales.

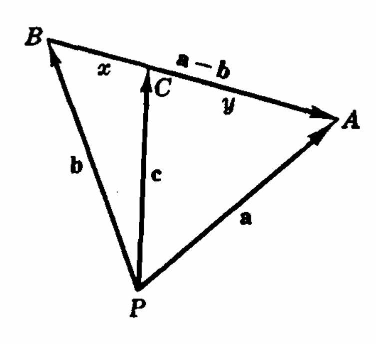


Fig. 18-10

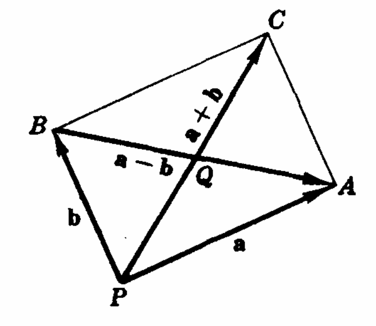


Fig. 18-11

5. Dados los vectores $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, determinar el módulo, dirección y sentido de (*a*) **a** y **b**, (*b*) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, (*c*) $\mathbf{b} - \mathbf{a}$.

(*a*) Para $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; $\operatorname{tag} \theta = a_2/a_1 = 4/3$, $a_1 = |\mathbf{a}| \cos\theta$, y $\cos\theta = 3/5$. Por tanto θ, situado en el primer cuadrante, es 53°8′.

Para $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$: $|\mathbf{b}| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$; $\operatorname{tag}\theta = -1/2$, $\cos\theta = 2/\sqrt{5}$; $\theta = 360° - 26°34' = 333°26'$.

(*b*) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) + (2\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.
$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$; $\operatorname{tag}\theta = 3/5$, $\cos\theta = 5/\sqrt{34}$; $\theta = 30°58'$.

(*c*) $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (2\mathbf{i} - \mathbf{j}) - (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = -\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$.
$|\mathbf{b} - \mathbf{a}| = \sqrt{26}$; $\operatorname{tag}\theta = 5$, $\cos\theta = -1/\sqrt{26}$; $\theta = 258°41'$.

6. Demostrar que la mediana correspondiente a la base de un triángulo isósceles es perpendicular a dicha base. (En la Fig. 18-12, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.)

Del Problema 3, como **m** es el punto medio de la base,

$$\mathbf{m} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

De donde
$$\mathbf{m}\cdot(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$
$$= \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) = 0$$

como queríamos demostrar.

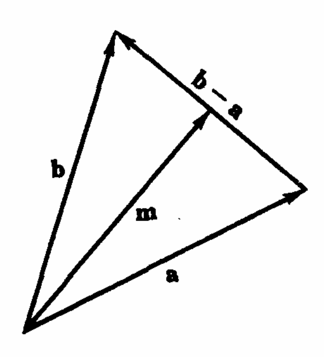


Fig. 18-12

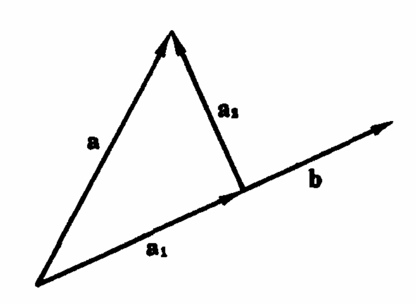


Fig. 18-13

7. Descomponer un vector **a** en sus componentes $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ paralela y perpendicular, respectivamente, a otro vector **b**.

En la Fig. 18-13: $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_1 = c\mathbf{b}$, y $\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b} = 0$. De donde

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{a}_1 = \mathbf{a} - c\mathbf{b}, \qquad \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b} = (\mathbf{a} - c\mathbf{b})\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - c|\mathbf{b}|^2 = 0$$

y $c = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}$. Por tanto, $\mathbf{a}_1 = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a} - c\mathbf{b} = \mathbf{a} - \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$.

La proyección escalar de **a** sobre **b** es igual a $\mathbf{a}\cdot\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$, y la proyección vectorial de **a** sobre **b** es $\left(\mathbf{a}\cdot\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right)\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$.

8. Descomponer $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ en sus componentes $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ paralela y perpendicular, respectivamente, a $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Del Problema 7, $c = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} = \dfrac{12+3}{10} = \dfrac{3}{2}$. Por tanto $\mathbf{a}_1 = c\mathbf{b} = {}^9/_2\mathbf{i} + {}^3/_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{a}_1 = -\tfrac{1}{2}\mathbf{i} + {}^3/_2\mathbf{j}$.

9. Calcular el trabajo realizado al aplicar una fuerza $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ sobre un objeto que lo desplaza según la dirección del vector $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

Trabajo realizado = (proyección escalar de **b** en la dirección de **a**) (distancia recorrida)

$$= (|\mathbf{b}|\cos\theta)\,|\mathbf{a}| = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = (2\mathbf{i} + \mathbf{j})\cdot(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = 10$$

10. Si $\mathbf{a} = \mathbf{i}f_1(u) + \mathbf{j}f_2(u)$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i}g_1(u) + \mathbf{j}g_2(u)$, demostrar que $\dfrac{d}{du}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \dfrac{d\mathbf{a}}{du}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\dfrac{d\mathbf{b}}{du}$.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (\mathbf{i}f_1 + \mathbf{j}f_2)\cdot(\mathbf{i}g_1 + \mathbf{j}g_2) = f_1g_1 + f_2g_2,$$

$$\frac{d}{du}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = f_1'g_1 + f_1g_1' + f_2'g_2 + f_2g_2' \qquad \left(f_1' = \frac{df_1(u)}{du}\right)$$
$$= (f_1'g_1 + f_2'g_2) + (f_1g_1' + f_2g_2')$$
$$= (\mathbf{i}f_1' + \mathbf{j}f_2')\cdot(\mathbf{i}g_1 + \mathbf{j}g_2) + (\mathbf{i}f_1 + \mathbf{j}f_2)\cdot(\mathbf{i}g_1' + \mathbf{j}g_2') = \frac{d\mathbf{a}}{du}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{b}}{du}$$

11. Si $\mathbf{a} = \mathbf{i}f_1(u) + \mathbf{j}f_2(u)$ es de módulo constante, demostrar que **a** y $d\mathbf{a}/du$ son perpendiculares.

De $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \text{constante} \neq 0$, obtenemos, Problema 10, $\dfrac{d}{du}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) = \dfrac{d\mathbf{a}}{du}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\dfrac{d\mathbf{a}}{du} = 2\mathbf{a}\cdot\dfrac{d\mathbf{a}}{du} = 0$.

De donde $\mathbf{a}\cdot\dfrac{d\mathbf{a}}{du} = 0$ con lo cual **a** y $\dfrac{d\mathbf{a}}{du}$ son perpendiculares.

Así, pues, la tangente a una circunferencia en uno de sus puntos P es perpendicular al radio correspondiente a P.

12. Siendo $\mathbf{r} = \mathbf{i}\cos^2\theta + \mathbf{j}\,\text{sen}^2\theta$, calcular $\mathbf{t}$.

$$d\mathbf{r}/d\theta = -\mathbf{i}\,\text{sen}\,2\theta + \mathbf{j}\,\text{sen}\,2\theta$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\right| = \sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}} = \sqrt{2}\,\text{sen}\,2\theta \quad \text{y} \quad \mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

13. Siendo $x = a\cos^3\theta$, $y = a\,\text{sen}^3\theta$, calcular $\mathbf{t}$ y $\mathbf{n}$ para $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

$$\mathbf{r} = a\mathbf{i}\cos^3\theta + a\mathbf{j}\,\text{sen}^3\theta$$

$$d\mathbf{r}/d\theta = -3a\mathbf{i}\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta + 3a\mathbf{j}\,\text{sen}^2\theta\cos\theta$$

$$ds/d\theta = |d\mathbf{r}/d\theta| = 3a\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} = -\mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\,\text{sen}\,\theta$$

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = (\mathbf{i}\,\text{sen}\,\theta + \mathbf{j}\cos\theta)\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{3a\cos\theta}\mathbf{i} + \frac{1}{3a\,\text{sen}\,\theta}\mathbf{j}$$

Para $\theta = \frac{1}{4}\pi$: $\mathbf{t} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$, $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{3a}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{3a}\mathbf{j}$, $|K| = \left|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right| = \frac{2}{3a}$, $\mathbf{n} = \frac{1}{|K|}\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$

14. Demostrar que el vector $\mathbf{a} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es perpendicular a la recta $ax + by + c = 0$.

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos de la recta. Tendremos $ax_1 + by_1 + c = 0$, $ax_2 + by_2 + c = 0$, y restando la primera de la segunda,

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$$

Ahora bien

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = (a\mathbf{i} + b\mathbf{j})\cdot[(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}]$$
$$= \mathbf{a}\cdot\mathbf{P_1P_2} = 0$$

Por tanto, $\mathbf{a}$ es perpendicular (normal) a la recta.

15. Deducir, con ayuda del cálculo vectorial:

(*a*) la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(2, 3)$ y es perpendicular a la recta $x + 2y + 5 = 0$;

(*b*) la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(2, 3)$ y $P_2(5, -1)$.

Tómese el punto genérico $P(x, y)$ de la recta pedida.

(*a*) El vector $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, Problema 14, es normal a la recta $x + 2y + 5 = 0$. Por tanto, $\mathbf{P_1P} = (x - 2)\mathbf{i} + (y - 3)\mathbf{j}$ es paralelo a $\mathbf{a}$, esto es:

$$(x - 2)\mathbf{i} + (y - 3)\mathbf{j} = k(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \qquad \text{(siendo } k \text{ un escalar variable)}$$

Igualando componentes, tendremos $x - 2 = k$, $y - 3 = 2k$. Eliminando k, la ecuación pedida es $y - 3 = 2(x - 2)$ ó $2x - y - 1 = 0$.

(*b*) Tendremos $\quad \mathbf{P_1P} = (x - 2)\mathbf{i} + (y - 3)\mathbf{j}$ y $\mathbf{P_1P_2} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

Ahora bien $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ es perpendicular a $\mathbf{P_1P_2}$ y , por tanto, a $\mathbf{P_1P}$. La ecuación buscada es

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{P_1P} = (4\mathbf{i} + 3\mathbf{j})\cdot[(x - 2)\mathbf{i} + (y - 3)\mathbf{j}] = 0 \quad \text{ó} \quad 4x + 3y - 17 = 0$$

16. Deducir con ayuda del cálculo vectorial, la distancia del punto $P_1(2, 3)$ a la recta $3x + 4y - 12 = 0$.

Tracemos desde un punto de la recta, por ejemplo $A(4, 0)$ el vector $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ perpendicular a la misma. La distancia pedida es

$$d = |\mathbf{AP_1}|\cos\theta$$

Como $\mathbf{a}\cdot\mathbf{AP_1} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{AP_1}|\cos\theta = |\mathbf{a}|\,d$; tendremos

$$d = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{AP_1}}{|\mathbf{a}|} = \frac{(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})\cdot(-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})}{5} = \frac{-6 + 12}{5} = \frac{6}{5}$$

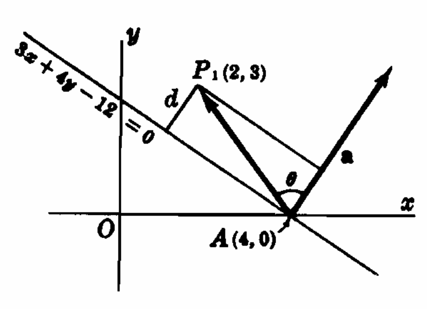


Fig. 18-14

Problemas propuestos

17. Dados los vectores **a**, **b**, **c** (ver Fig. 18-15), construir

(*a*) 2**a** (*d*) **a** + **b** — **c**
(*b*) —3**b** (*e*) **a** — 2**b** + 3**c**
(*c*) **a**+2**b**

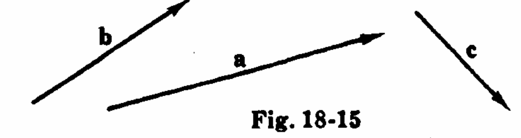


Fig. 18-15

18. Demostrar que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad. (Ver Fig. 18-16.)

19. Siendo **a**, **b**, **c**, **d** los lados consecutivos de un cuadrilátero, demostrar que **a** + **b** + **c** + **d** = 0. (Ver Fig. 18-17.) *Ind.*: sean *P* y *Q* dos vértices opuestos. Expresar **PQ** siguiendo dos caminos diferentes.

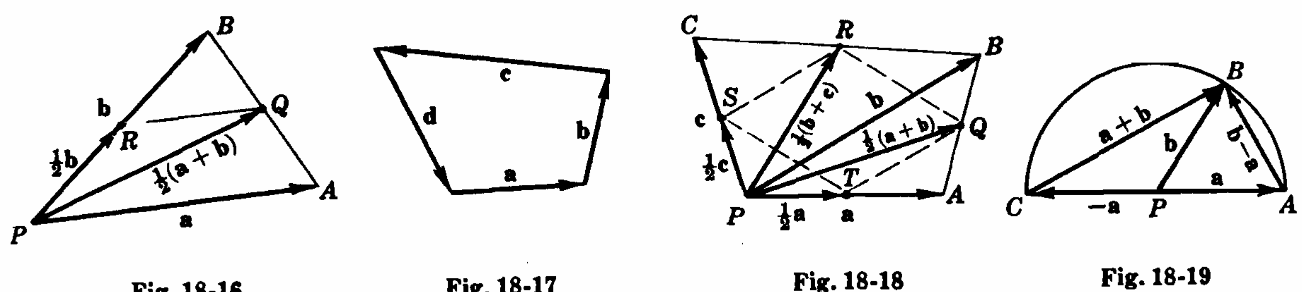


Fig. 18-16 **Fig. 18-17** **Fig. 18-18** **Fig. 18-19**

20. Demostrar que al unir consecutivamente los puntos medios de los lados de un cuadrilátero se obtiene un paralelogramo. (Ver Fig. 18-18.)

21. Siendo |**a**| = |**b**| e igual al radio de la circunferencia de la Fig. 18-19, demostrar que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

22. Hallar el módulo y el ángulo que forman con el eje *x* positivo los vectores siguientes:
(*a*) **i** + **j**, (*b*) —**i** + **j**, (*c*) **i** + $\sqrt{3}$ **j**, (*d*) **i** — $\sqrt{3}$ **j**.
Sol. (*a*) $\sqrt{2}$; $\theta = \frac{1}{4}\pi$, (*b*) $\sqrt{2}$; $\theta = 3\pi/4$, (*c*) 2; $\theta = \pi/3$ (*d*) 2; $\theta = 5\pi/3$

23. Demostrar que si **u** se obtiene al girar un ángulo θ el vector unitario **i** alrededor del origen y en el sentido contrario al de las agujas del reloj se verifica: **u** = **i** cos θ + **j** sen θ.

24. Demostrar, aplicando el teorema del coseno, que **a** · **b** = |**a**| |**b**| cos θ = $\frac{1}{2}$\{ |**a**|² + |**b**|² — |**c**|²\}.

25. Expresar en la forma a**i** + b**j**:
(*a*) el vector que une el origen con el punto *P*(2, —3);
(*b*) el vector que une los puntos $P_1(2, 3)$ y $P_2(4, 2)$;
(*c*) el vector que une los puntos $P_2(4, 2)$ y $P_1(2, 3,)$; el vector unitario en la dirección y sentido de 3**i** + 4**j**;
(*e*) el vector de módulo 6 que forme un ángulo de 120° con el eje *x* positivo.
Sol. (*a*) 2**i** — 3**j**, (*b*) 2**i** — **j**, (*c*) —2**i** + **j**, (*d*) $^3/_5$**i** + $^4/_5$**j**, (*e*) —3**i** + 3$\sqrt{3}$ **j**

26. Aplicando el cálculo vectorial deducir la fórmula de la distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

27. Tres vértices de un cuadrilátero, *OAPB* son los puntos *O*(0, 0), *A*(3, 1) y *B*(1, 5). Hallar las coordenadas de *P*.

28. (*a*) Hallar *k* de forma que **a** = 3**i** — 2**j** y **b** = **i** + *k***j** sean perpendiculares.
(*b*) Hallar un vector perpendicular a **a** = 2**i** + 5**j**.

29. Demostrar las propiedades 8-15 del producto escalar.

30. Hallar las proyecciones vectorial y escalar de **b** sobre **a**, siendo (*a*) **a** = **i** —2**j**, **b** = —3**i** + **j**; (*b*) **a** = 2**i** + 3**j**, **b** = 10**i** + 2**j**
Sol. (*a*) —**i** + 2**j**, —$\sqrt{5}$, (*b*) 4**i** + 6**j**, 2$\sqrt{13}$.

31. Demostrar que por traslación de tres vectores **a**, **b**, **c** se puede obtener un triángulo siempre que (*a*) uno de ellos sea igual a la suma de los otros dos o (*b*) **a** + **b** + **c** = 0.

32. Demostrar que **a** = 3**i** — 6**j**, **b** = 4**i** + 2**j**, **c** = —7**i** + 4**j** son los lados de un triángulo rectángulo. Comprobar que el punto medio de la hipotenusa equidista de los vértices.

33. Hallar el vector tangente unitario **t** = *d***r**/*ds*, siendo:
(*a*) **r** = 4**i** cos θ + 4**j** sen θ; (*b*) **r** = e^{θ}**i** + $e^{-\theta}$**j**; (*c*) **r** = θ**i** + θ^2**j**.

Sol. (*a*) —**i** sen θ + **j** cos θ, (*b*) $\dfrac{e^{\theta}\mathbf{i} - e^{-\theta}\mathbf{j}}{\sqrt{e^{2\theta} + e^{-2\theta}}}$. (*c*) $\dfrac{\mathbf{i} - 2\theta\mathbf{j}}{\sqrt{1 + 4\theta^2}}$

34. (*a*) Calcular en la curva del Problema 33(*a*). (*b*) Calcular **n** en la curva del Problema 33(*c*).
(*c*) Calcular **t** y **n**, siendo $x = \cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta$.

Sol. (*a*) —**i** cos θ — **j** sen θ, (*b*) $\dfrac{-2\theta}{\sqrt{1 + 4\theta^2}}\mathbf{i} + \dfrac{1}{\sqrt{1 + 4\theta^2}}\mathbf{j}$, (*c*) **t** = **i** cos θ + **j** sen θ, **n** = —**i** sen θ + **j** cos θ.

Capítulo 19

Movimiento curvilíneo

VELOCIDAD EN EL MOVIMIENTO CURVILINEO. Sea $P(x, y)$ un punto móvil a lo largo de la curva de ecuación

$$x = f(t),\ y = g(t)$$

siendo t el tiempo. Derivando el vector de posición

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y \qquad (1)$$

con respecto a t, obtenemos el *vector velocidad*

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i}\frac{dx}{dt} + \mathbf{j}\frac{dy}{dt} = \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y \qquad (2)$$

siendo $v_x = dx/dt$ y $v_y = dy/dt$.

El módulo de $\mathbf{v}$ viene dado por

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{ds}{dt}$$

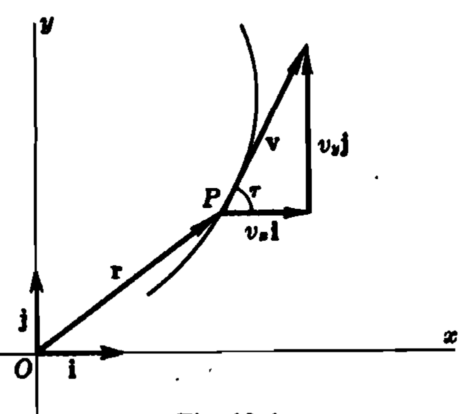


Fig. 19-1

La dirección de $\mathbf{v}$ en P es la tangente a la trayectoria en P, como indica la Fig. 19-1. Llamando τ al ángulo que forma la tangente con el eje x positivo, tag $\tau = v_y/v_x$, con las componentes determinadas por $v_x = |\mathbf{v}| \cos\tau$ y $v_y = |\mathbf{v}| \operatorname{sen}\tau$.

ACELERACION EN EL MOVIMIENTO CURVILINEO. Derivando (2) con respecto a t obtendremos el *vector aceleración*

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \mathbf{j}\frac{d^2y}{dt^2} = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y \qquad (3)$$

siendo $a_x = d^2x/dt^2$ y $a_y = d^2y/dt^2$.

El módulo de $\mathbf{a}$ viene dado por

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\,.\,\mathbf{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

La dirección ϕ de $\mathbf{a}$ es tag $\phi = a_y/a_x$ estando determinado el cuadrante por $a_x = |\mathbf{a}| \cos\phi$ y $a_y = |\mathbf{a}| \operatorname{sen}\phi$. (Ver Fig. 19-2.)

En los Problemas 1-3 se estudia el movimiento de dos formas distintas. En la primera de ellas se emplea el concepto de vector de posición (*1*), del vector velocidad (*2*) y del vector aceleración, para lo cual se precisa conocer las ecuaciones paramétricas de la trayectoria. En la segunda, la más corriente, se utilizan las componentes x e y de estos vectores y no se precisa conocer la ecuación de la trayectoria en forma paramétrica. Los dos procedimientos, por supuesto, conducen al mismo resultado pues ambas soluciones son, en esencia, iguales.

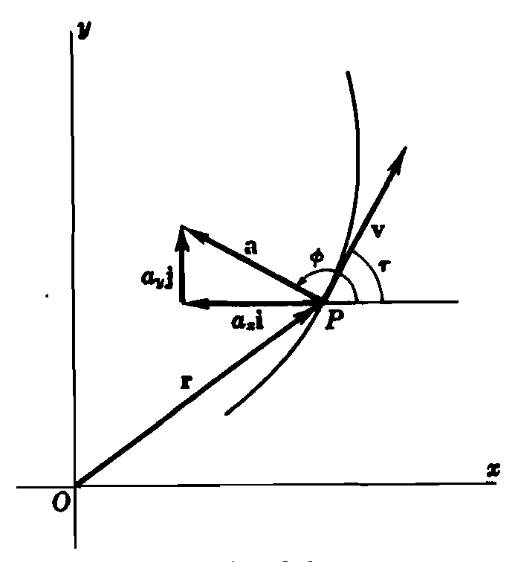


Fig. 19-2

(Ver Problemas 1-3.)

COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL DE LA ACELERACION. De (*6*), Capítulo 18, obtenemos

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{t}\frac{ds}{dt} \tag{4}$$

de donde

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{t}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\mathbf{t}}{dt}\frac{ds}{dt} \tag{5}$$

$$= \mathbf{t}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\mathbf{t}}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \mathbf{t}\frac{d^2s}{dt^2} + |K|\mathbf{n}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

por (*7*), Capítulo 18.

La fórmula (*5*) expresa analíticamente la descomposición del vector aceleración en P según la tangente y normal en él. Llamando a_t y a_n, respectivamente, dichas componentes, sus módulos son

$$|a_t| = \left|\frac{d^2s}{dt^2}\right| \quad \text{y} \quad |a_n| = \frac{(ds/dt)^2}{R} = \frac{|\mathbf{v}|^2}{R}$$

en donde R es el radio de curvatura de la trayectoria en el punto P. (Ver Fig. 19-3.)

Como $|\mathbf{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 = a_t^2 + a_n^2$, tendremos

$$a_n^2 = |\mathbf{a}|^2 - a_t^2$$

que es otra forma de determinar $|a_n|$.

(Ver Problemas 4-8.)

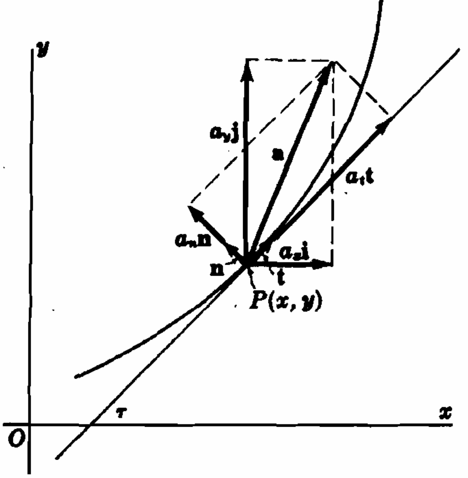


Fig. 19-3

Problemas resueltos

1. Estudiar el movimiento definido por las ecuaciones $x = \cos 2\pi t$, $y = 3 \text{ sen } 2\pi t$. Determinar el módulo y dirección de los vectores velocidad y aceleración en los instantes (*a*) $t = 1/6$ y (*b*) $t = 2/3$.

La trayectoria del movimiento es la elipse $9x^2 + y^2 = 9$, comenzando, en el instante inicial $t = 0$, en el punto (1, 0), siendo el sentido de circulación el contrario al de las agujas del reloj.

Primera solución.

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y = \mathbf{i}\cos 2\pi t + 3\mathbf{j} \text{ sen } 2\pi t$$
$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y = -2\pi\mathbf{i} \text{ sen } 2\pi t + 6\pi\mathbf{j}\cos 2\pi t$$
$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y = -4\pi^2\mathbf{i}\cos 2\pi t - 12\pi^2\mathbf{j} \text{ sen } 2\pi t$$

(*a*) Para $t = 1/6$:

$$\mathbf{v} = -\sqrt{3}\pi\mathbf{i} + 3\pi\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{a} = -2\pi^2\mathbf{i} - 6\sqrt{3}\,\pi^2\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{(-\sqrt{3}\pi)^2 + (3\pi)^2} = 2\sqrt{3}\pi$$

$$\text{tag } \tau = v_y/v_x = -\sqrt{3}, \quad \cos\tau = v_x/|\mathbf{v}| = -1/2, \quad \text{y} \quad \tau = 120°$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{(-2\pi^2)^2 + (-6\sqrt{3}\,\pi^2)^2} = 4\sqrt{7}\,\pi^2$$

$$\text{tag } \phi = a_y/a_x = 3\sqrt{3}, \quad \cos\phi = a_x/|\mathbf{a}| = -1/2\sqrt{7}, \quad \text{y} \quad \phi = 259°6'$$

(*b*) Para $t = 2/3$:

$$\mathbf{v} = \sqrt{3}\,\pi\mathbf{i} - 3\pi\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{a} = 2\pi^2\mathbf{i} + 6\sqrt{3}\,\pi^2\mathbf{j}$$
$$|\mathbf{v}| = 2\sqrt{3}\,\pi; \quad \text{tag } \tau = -\sqrt{3}, \quad \cos\tau = 1/2, \quad \text{y} \quad \tau = 5\pi/3$$
$$|\mathbf{a}| = 4\sqrt{7}\,\pi^2; \quad \text{tag } \phi = 3\sqrt{3}, \quad \cos\phi = 1/2\sqrt{7}, \quad \text{y} \quad \phi = 79°6'$$

Segunda solución:

$$x = \cos 2\pi t, \quad v_x = dx/dt = -2\pi \operatorname{sen} 2\pi t, \quad a_x = d^2x/dt^2 = -4\pi^2 \cos 2\pi t$$
$$y = 3 \operatorname{sen} 2\pi t, \quad v_y = dy/dt = 6\pi \cos 2\pi t, \quad a_y = d^2y/dt^2 = -12\pi^2 \operatorname{sen} 2\pi t$$

(*a*) Para $t = 1/6$:

$$v_x = -\sqrt{3}\,\pi, \quad v_y = 3\pi, \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2\sqrt{3}\,\pi$$
$$\operatorname{tag} \tau = v_y/v_x = -\sqrt{3}, \quad \cos\tau = v_x/|\mathbf{v}| = -1/2, \quad \text{y} \quad \tau = 120°$$
$$a_x = -2\pi^2, \quad a_y = -6\sqrt{3}\,\pi^2, \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 4\sqrt{7}\,\pi^2$$
$$\operatorname{tag} \phi = a_y/a_x = 3\sqrt{3}, \quad \cos\phi = a_x/|\mathbf{a}| = -1/2\sqrt{7}, \quad \text{y} \quad \phi = 259°6'$$

(*b*) Para $t = 2/3$:

$$v_x = \sqrt{3}\,\pi, \quad v_y = -3\pi, \quad |\mathbf{v}| = 2\sqrt{3}\,\pi$$
$$\operatorname{tag} \tau = -\sqrt{3}, \quad \cos\tau = \tfrac{1}{2}, \quad \text{y} \quad \tau = 5\pi/3$$
$$a_x = 2\pi^2, \quad a_y = 6\sqrt{3}\,\pi^2, \quad |\mathbf{a}| = 4\sqrt{7}\,\pi^2$$
$$\operatorname{tag} \phi = 3\sqrt{3}, \quad \cos\phi = 1/2\sqrt{7}, \quad \text{y} \quad \phi = 79°6'$$

2. Un punto móvil recorre la circunferencia $x^2 + y^2 = 625$ a una velocidad de módulo $|\mathbf{v}| = 15$ en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Hallar τ, $|\mathbf{a}|$ y ϕ en el punto (*a*) (20, 15) y (*b*) $(5, -10\sqrt{6})$. (Ver Fig. 19-4.)

Primera solución. Tendremos

(i) $$|\mathbf{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 = 225$$

y, derivando con respecto a t,

(ii) $$v_x a_x + v_y a_y = 0.$$

Derivando $x^2 + y^2 = 625$, obtenemos

(iii) $$x v_x + y v_y = 0$$

y $$x a_x + v_x^2 + y a_y + v_y^2 = 0$$

o

(iv) $$x a_x + y a_y = -225$$

Resolviendo (i) y (iii) simultáneamente, resulta

(v) $$v_x = \pm\, {}^3/_5 y$$

Resolviendo (ii) y (iv) simultáneamente, resulta

(vi) $$a_x = \frac{225 v_y}{y v_x - x v_y}$$

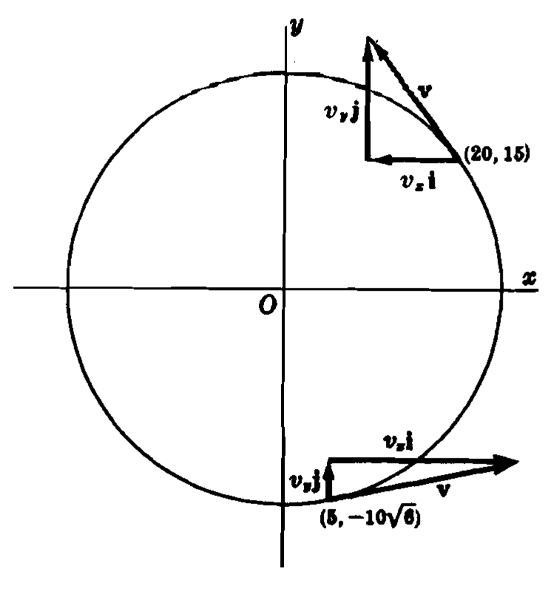


Fig. 19-4

(*a*) De la Fig. 19-4, $v_x < 0$ en (20, 15). De (v), $v_x = -9$; de (iii), $v_y = 12$. Por tanto, $\operatorname{tag} \tau = -4/3$, $\cos\tau = -3/5$, y $\tau = 126°\,52'$. De (vi), $a_x = -36/5$; de (iv), $a_y = -27/5$; y $|\mathbf{a}| = 9$. De donde $\operatorname{tag} \phi = 3/4$, $\cos\phi = -4/5$, y $\phi = 216°\,52'$.

(*b*) De la figura, $v_x > 0$ en $(5, -10\sqrt{6})$. De (v), $v_x = 6\sqrt{6}$; de (iii), $v_y = 3$. Por tanto, $\operatorname{tag} \tau = \sqrt{6}/12$, $\operatorname{sen} \tau = 1/5$, y $\tau = 11°\,32'$. De (vi), $a_x = -9/5$; de (iv), $a_y = 18\sqrt{6}/5$; y $|\mathbf{a}| = 9$. De donde $\operatorname{tag} \phi = -2\sqrt{6}$, $\cos\phi\ -1/5$, y $\phi = 101°\,32'$.

Segunda solución.

De las ecuaciones paramétricas $x = 25 \cos\theta$, $y = 25 \operatorname{sen}\theta$, obtenemos, en $P(x, y)$,

$$\mathbf{r} = 25\mathbf{i} \cos\theta + 25\mathbf{j} \operatorname{sen}\phi$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-25\mathbf{i} \operatorname{sen}\theta + 25\mathbf{j}\cos\theta)\frac{d\theta}{dt} = -15\mathbf{i}\operatorname{sen}\theta + 15\mathbf{j}\cos\theta$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (-15\mathbf{i}\cos\theta - 15\mathbf{j}\operatorname{sen}\theta)\frac{d\theta}{dt} = -9\mathbf{i}\cos\theta - 9\mathbf{j}\operatorname{sen}\theta$$

como $|\mathbf{v}| = 15$ es equivalente a una velocidad angular constante $d\theta/dt = 3/5$.

(*a*) En el punto (20, 15), sen $\theta = 3/5$ y $\cos\theta = 4/5$.

$$\mathbf{v} = -9\mathbf{i} + 12\mathbf{j};\ \text{tag}\ \tau = -4/3,\ \cos\tau = -3/5,\ \text{y}\ \tau = 126°\ 52'$$
$$\mathbf{a} = -{}^{36}/_{5}\mathbf{i} - {}^{27}/_{5}\mathbf{j};\ |\mathbf{a}| = 9;\ \text{tag}\ \phi = {}^{3}/_{4},\ \cos\phi = -{}^{4}/_{5},\ \text{y}\ \phi = 216°\ 52'.$$

(*b*) En el punto $(5, -10\sqrt{6})$, sen $\theta = -{}^{2}/_{5}\sqrt{6}$ y $\cos\theta = 1/5$.

$$\mathbf{v} = 6\sqrt{6}\mathbf{i} + 3\mathbf{j};\ \text{tag}\ \tau = \sqrt{6}/12,\ \cos\tau = {}^{2}/_{5}\sqrt{6},\ \text{y}\ \tau = 11°\ 32'$$
$$\mathbf{a} = -{}^{9}/_{5}\mathbf{i} + {}^{18}/_{5}\sqrt{6}\mathbf{j};\ |\mathbf{a}| = 9;\ \text{tag}\ \phi = -2\sqrt{6},\ \cos\phi = -1/5,\ \text{y}\ \phi = 101°\ 32'$$

3. Una partícula recorre el arco del primer cuadrante de la parábola $x^2 = 8y$ y siendo $v_y = 2$. Hallar $|\mathbf{v}|$, τ, $|\mathbf{a}|$ y ϕ en el punto (4, 2).

Primera solución.

Derivando $x^2 = 8y$ dos veces con respecto a t, y teniendo en cuenta que $v_y = 2$, obtenemos

$$2xv_x = 8v_y = 16 \quad \text{o} \quad xv_x = 8,\ \text{y}\ xa_x + v_x^2 = 0$$

En (4, 2): $v_x = 8/x = 2$; $|\mathbf{v}| = 2\sqrt{2}$; tag $\tau = 1$, $\cos\tau = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, y $\tau = \frac{1}{4}\pi$.

$$a_x = -1;\ a_y = 0;\ |\mathbf{a}| = 1;\ \text{tag}\ \phi = 0,\ \cos\phi = -1,\ \text{y}\ \phi = \pi.$$

Segunda solución.

Utilizando las ecuaciones paramétricas $x = 4\theta$, $y = 2\theta^2$, tendremos

$$\mathbf{r} = 4\mathbf{i}\theta + 2\mathbf{j}\theta^2$$

$$\mathbf{v} = 4\mathbf{i}\frac{d\theta}{dt} + 4\mathbf{j}\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{\theta}\mathbf{i} + 2\mathbf{j},\ \text{como}\ v_y = 4\theta\frac{d\theta}{dt} = 2\ \text{y}\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2\theta}.\ \mathbf{a} = -\frac{1}{\theta^3}\mathbf{i}.$$

En el punto (4, 2), $\theta = 1$. De donde

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j};\ |\mathbf{v}| = 2\sqrt{2};\ \text{tag}\ \tau = 1,\ \cos\tau = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ \text{y}\ \tau = \tfrac{1}{4}\pi.$$
$$\mathbf{a} = -\mathbf{i};\ |\mathbf{a}| = 1;\ \text{tag}\ \phi = 0,\ \cos\phi = -1,\ \text{y}\ \phi = \pi.$$

4. Hallar el módulo de las componentes tangencial y normal de la aceleración en el movimiento $x = e^t\cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$ en función del tiempo t.

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y = \mathbf{i}e^t\cos t + \mathbf{j}e^t \operatorname{sen} t$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{i}e^t(\cos t - \operatorname{sen} t) + \mathbf{j}e^t(\operatorname{sen} t + \cos t)$$
$$\mathbf{a} = -2\mathbf{i}e^t \operatorname{sen} t + 2\mathbf{j}e^t\cos t$$

De donde $|\mathbf{a}| = 2e^t$; $ds/dt = |\mathbf{v}| = \sqrt{2}\,e^t$ y $|a_t| = |d^2s/dt^2| = \sqrt{2}\,e^t$; $|a_n| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_t^2} = \sqrt{2}\,e^t$.

5. Una partícula se mueve de izquierda a derecha sobre la parábola $y = x^2$ a velocidad constante igual a 5. Hallar el módulo de las componentes tangencial y normal de la aceleración en el punto (1, 1).

Como la velocidad es constante, $|a_t| = |d^2s/dt^2| = 0$. En (1, 1), $y' = 2x = 2$ y $y'' = 2$.

El radio de curvatura en (1, 1) es $R = \dfrac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|} = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$ y $|a_n| = \dfrac{|\mathbf{v}|^2}{R} = 2\sqrt{5}$

6. La fuerza centrífuga F ejercida sobre una partícula de peso W en un punto de su trayectoria viene dada por $F = \dfrac{W}{g}|a_n|$.

Hallar la fuerza centrífuga ejercida por una partícula de 5 kp de peso en los extremos de los ejes de la elipse cuyas ecuaciones paramétricas son $x = 20\cos t$, $y = 15 \operatorname{sen} t$, siendo las unidades de longitud y tiempo el metro y segundo, respectivamente. Tómese $g = 10\ \text{m/s}^2$.

$$\mathbf{r} = 20\mathbf{i}\cos t + 15\mathbf{j} \operatorname{sen} t$$
$$\mathbf{v} = -20\mathbf{i} \operatorname{sen} t + 15\mathbf{j}\cos t$$
$$\mathbf{a} = -20\mathbf{i}\cos t - 15\mathbf{j} \operatorname{sen} t$$

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}| = \sqrt{400 \operatorname{sen}^2 t + 225\cos^2 t}, \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{175 \operatorname{sen} t\cos t}{\sqrt{400 \operatorname{sen}^2 t + 225\cos^2 t}}$$

En los extremos del eje mayor ($t = 0$ o $t = \pi$):

$$|\mathbf{a}| = 20,\ |a_t| = |d^2s/dt^2| = 0,\ |a_n| = 20, \text{ y } F = (5/10)(20) = 10 \text{ kp}$$

En los extremos del eje menor ($t = \pi/2$ o $t = 3\pi/2$):

$$|\mathbf{a}| = 15,\ |a_t| = 0,\ |a_n| = 15, \text{ y } F = (5/10)(15) = 7{,}5 \text{ kp}$$

7. Dadas las ecuaciones del movimiento de un proyectil $x = v_0 t \cos\psi$, $y = v_0 t \operatorname{sen}\psi - \frac{1}{2}gt^2$, siendo v_0 la velocidad inicial, ψ el ángulo de proyección, $g = 10$ m/s² y en donde x e y se miden en metros y t en segundos, hallar:

(*a*) la ecuación del movimiento en coordenadas rectangulares,

(*b*) el alcance, (*c*) el ángulo de proyección para el alcance máximo,

(*d*) la velocidad e inclinación del proyectil al cabo de 5 segundos de vuelo, si $v_0 = 150$ metros por segundo y $\psi = 45°$.

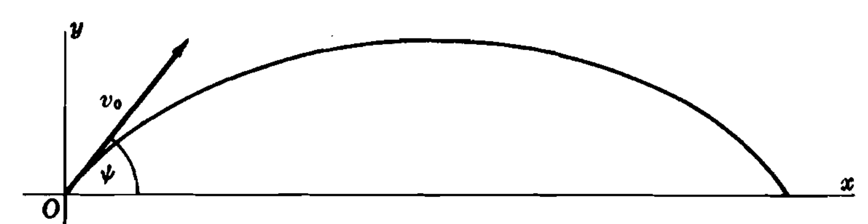


Fig. 19-5

(*a*) Despejando t en la primera ecuación $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\psi}$ y sustituyendo en la segunda:

$$y = v_0\left(\frac{x}{v_0 \cos\psi}\right)\operatorname{sen}\psi - \tfrac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\psi}\right)^2 = x \operatorname{tag}\psi - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\psi}$$

(*b*) Cuando $y = v_0 t \operatorname{sen}\psi - \frac{1}{2}gt^2 = 0$, $t = 0$ y $t = (2v_0 \operatorname{sen}\psi)/g$.

Para $t = \dfrac{2v_0 \operatorname{sen}\psi}{g}$, el alcance $= x = v_0\cos\psi\left(\dfrac{2v_0\operatorname{sen}\psi}{g}\right) = \dfrac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\psi}{g}$.

(*c*) Para que x sea máximo $\dfrac{dx}{d\psi} = \dfrac{2v_0^2\cos 2\psi}{g} = 0$, $\cos 2\psi = 0$, y $\psi = \frac{1}{4}\pi$.

(*d*) Cuando $v_0 = 150$ y $\psi = \frac{1}{4}\pi$, $x = 75\sqrt{2}\,t$ e $y = 75\sqrt{2}\,t - 5t^2$. Por tanto,

$$v_x = 75\sqrt{2} \text{ y } v_y = 75\sqrt{2} - 10t$$

Para $t = 5$: $v_x = 75\sqrt{2}$ y $v_y = 75\sqrt{2} - 50$. Por tanto,

$$\operatorname{tag}\tau = v_y/v_x = 0{,}5284,\ \tau = 27°\,48' \text{ y } |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 120 \text{ m/seg.}$$

8. Un punto P se mueve sobre la circunferencia $x = r\cos\beta$, $y = r\operatorname{sen}\beta$ a velocidad lineal de módulo constante v. Demostrar que, si el radio vector de P se mueve con una velocidad angular ω y una aceleración angular α, (*a*) $v = r\omega$ y (*b*) $a = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$.

(*a*) $v_x = -r\operatorname{sen}\beta\cdot\dfrac{d\beta}{dt} = -r\operatorname{sen}\beta\cdot\omega$ y $v_y = r\cos\beta\cdot\dfrac{d\beta}{dt} = r\cos\beta\cdot\omega$.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(r^2\operatorname{sen}^2\beta + r^2\cos^2\beta)\omega^2} = r\omega$$

(*b*) $a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = -r\omega\cos\beta\cdot\dfrac{d\beta}{dt} - r\operatorname{sen}\beta\cdot\dfrac{d\omega}{dt} = -r\omega^2\cos\beta - r\alpha\operatorname{sen}\beta$.

$a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = -r\omega\operatorname{sen}\beta\cdot\dfrac{d\beta}{dt} + r\cos\beta\cdot\dfrac{d\omega}{dt} = -r\omega^2\operatorname{sen}\beta + r\alpha\cos\beta$.

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 = r^2(\omega^4 + \alpha^2) \text{ y } a = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$$

Problemas propuestos

9. Hallar el módulo y dirección de la velocidad y aceleración en:

(*a*) $x = e^t, y = e^{2t} - 4e^t + 3$ para $t = 0$

(*b*) $x = 2 - t, y = 2t^3 - t$ para $t = 1$

(*c*) $x = \cos 3t, y = \text{sen}\, t$ para $t = \frac{1}{4}\pi$

(*d*) $x = e^t \cos t, y = e^t \text{sen}\, t$ para $t = 0$

Sol. (*a*) $|\mathbf{v}| = \sqrt{5}, \tau = 296° 34'$; $|\mathbf{a}| = 1, \phi = 0$

(*b*) $|\mathbf{v}| = \sqrt{26}, \tau = 101° 19'$; $|\mathbf{a}| = 12, \phi = \frac{1}{2}\pi$

(*c*) $|\mathbf{v}| = \sqrt{5}, \tau = 161° 34'$; $|\mathbf{a}| = \sqrt{41}, \phi = 353° 40'$

(*d*) $|\mathbf{v}| = \sqrt{2}, \tau = \frac{1}{4}\pi$; $|\mathbf{a}| = 2, \phi = \frac{1}{2}\pi$

10. Una partícula se mueve sobre el primer cuadrante del arco de parábola $y^2 = 12x$ con $v_x = 15$. Hallar v_y, $|\mathbf{v}|$, τ; a_x a_y, $|\mathbf{a}|$, y ϕ en el punto (3, 6).

Sol. $v_y = 15$, $|\mathbf{v}| = 15\sqrt{2}$, $\tau = \frac{1}{4}\pi$; $a_x = 0$, $a_y = -75/2$, $|\mathbf{a}| = 75/2$, $\phi = 3\pi/2$.

11. Una partícula se mueve a lo largo de la parábola cúbica $y = x^3/3$ con una componente de velocidad $v_x = 2$ constante. Hallar el módulo y dirección de la velocidad y de la aceleración cuando $x = 3$.

Sol. $|\mathbf{v}| = 2\sqrt{82}, \tau = 83° 40'$; $|\mathbf{a}| = 24, \phi = \frac{1}{2}\pi$

12. Una partícula se mueve a lo largo de una circunferencia de 6 metros de radio con una velocidad constante de 4 metros por segundo. Hallar el módulo de su aceleración en un punto cualquiera. *Sol.* $|a_t| = 0$, $|a| = |a_n| = 8/3$ m/s^2.

13. Hallar el módulo y dirección de la velocidad y de la aceleración así como los módulos de las componentes tangencial y normal de la aceleración del movimiento definido por

(*a*) $x = 3t, y = 9t - 3t^2$, para $t = 2$

(*b*) $x = \cos t + \text{sen}\, t, y = \text{sen}\, t - t \cos t$ cuando $t = 1$.

Sol. (*a*) $|\mathbf{v}| = 3\sqrt{2}, \tau = 7\pi/4$; $|\mathbf{a}| = 6, \phi = 3\pi/2$; $|a_t| = |a_n| = 3\sqrt{2}$

(*b*) $|\mathbf{v}| = 1, \tau = 1$; $|\mathbf{a}| = \sqrt{2}, \phi = 102° 18'$; $|a_t| = |a_n| = 1$

14. Una partícula se mueve a lo largo de la curva $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4} \ln x$ de tal forma que $x = \frac{1}{2}t^2$, $t > 0$. Hallar v_x, v_y, $|\mathbf{v}|$, τ; a_x, a_y, $|\mathbf{a}|$, ϕ; $|a_t|$ y $|a_n|$ cuando $t = 1$.

Sol. $v_x = 1$, $v_y = 0$, $|\mathbf{v}| = 1$, $\tau = 0$; $a_x = 1$, $a_y = 2$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{5}$, $\phi = 63° 26'$; $|a_t| = 1$, $|a_n| = 2$.

15. Una partícula se mueve a lo largo de la curva $y = 2x - x^2$ con una componente de velocidad $v_x = 4$ constante. Hallar los módulos de las componentes tangencial y normal de la aceleración en la posición (*a*) (1, 1) y (*b*) (2, 0).

Sol. (*a*) $|a_t| = 0$, $|a_n| = 32$; (*b*) $|a_t| = 64/\sqrt{5}$, $|a_n| = 32/\sqrt{5}$

Capítulo 20

Coordenadas polares

LA POSICION DE UN PUNTO P en un plano con respecto a un punto fijo O del mismo, se puede definir por medio de las proyecciones del vector **OP** sobre dos rectas mutuamente perpendiculares del plano que pasen por O. Este es el sistema cartesiano de coordenadas rectangulares. Otra forma de determinar el punto en cuestión es por medio de la distancia $\varrho = OP$ y el ángulo θ que OP forma con una semirrecta fija OX de origen O (polo). Este es el *sistema de coordenadas polares*.

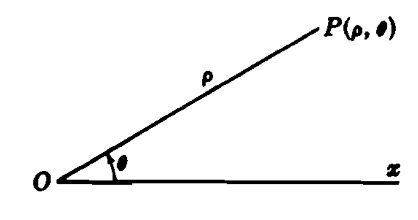


Fig. 20-1

A cada par de números (ϱ, θ) le corresponde un único punto, pero esta correspondencia no es biunívoca ya que, por ejemplo, al punto P de la figura le corresponden las coordenadas $(\varrho, \theta \pm 2n\pi)$ y $[-\varrho, \theta \pm (2n + 1)\pi]$, siendo n un número positivo cualquiera, incluido el cero. En particular, las coordenadas polares del polo son $(0, \theta)$, en donde θ puede ser cualquier ángulo.

La curva cuya ecuación en coordenadas polares es $\varrho = f(\theta)$ o $F(\varrho, \theta) = 0$ está formada por todos los puntos de coordenadas (ϱ, θ) que satisfacen la función o ecuación anterior.

EL ANGULO ψ que el radio vector OP forma con la tangente PT a la curva en un punto $P(\varrho, \theta)$ de ella, viene dado por

$$\operatorname{tag} \psi = \varrho \frac{d\phi}{d\varrho} = \frac{\varrho}{\varrho'}, \text{ siendo } \varrho' = \frac{d\varrho}{d\phi}$$

El valor de tag ψ juega el mismo papel en el sistema de coordenadas polares, que el de la pendiente de la tangente en el sistema de coordenadas rectangulares.

(Ver Problemas 1-3.)

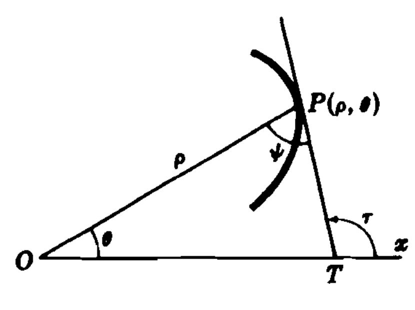


Fig. 20-2

EL ANGULO DE INCLINACION de la tangente a la curva en un punto $P(\varrho, \theta)$ de ella viene dado por

$$\operatorname{tag} \tau = \frac{\varrho \cos \theta + \varrho' \operatorname{sen} \theta}{-\varrho \operatorname{sen} \theta + \varrho' \cos \theta}$$

(Ver Problemas 4-10.)

LOS PUNTOS DE INTERSECCION de dos curvas de ecuaciones

$$\varrho = f_1(\theta) \quad \text{y} \quad \varrho = f_2(\theta)$$

se hallan resolviendo el sistema

$$f_1(\theta) = f_2(\theta) \tag{1}$$

Ejemplo 1:

Hallar los puntos de intersección de $\varrho = 1 + \operatorname{sen} \theta$ y $\varrho = 5 - 3 \operatorname{sen} \theta$.

Igualando $1 + \operatorname{sen} \theta = 5 - 3 \operatorname{sen} \theta$, obtenemos $\operatorname{sen} \theta = 1$.

Por tanto, $\theta = \frac{1}{2}\pi$ y $(2, \frac{1}{2}\pi)$ es el único punto de intersección.

Cuando el polo es un punto de intersección puede ocurrir que no aparezca entre las soluciones de (*1*). El polo es un punto de intersección siempre que haya valores de θ, θ_1 y θ_2, para los cuales $f_1(\theta_1) = 0$ y $f_2(\theta_2) = 0$.

Ejemplo 2:

Hallar los puntos de intersección de $\varrho = \operatorname{sen}\theta$ y $\varrho = \cos\theta$.

De
$$\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \qquad (1)$$

se obtiene el punto de intersección $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$. Ahora bien, en este caso, las curvas dadas son circunferencias que pasan por el polo y, sin embargo, este punto no es solución de (*1*) porque sus coordenadas, en la ecuación $\varrho = \operatorname{sen}\theta$, son $(0, 0)$, mientras que en la ecuación $\varrho = \cos\theta$ son $(0, \frac{1}{2}\pi)$.

Ejemplo 3:

Hallar los puntos de intersección de $\varrho = \cos 2\theta$ y $\varrho = \cos\theta$.

Igualando $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \cos\theta$, obtenemos $(\cos\theta - 1)(2\cos\theta + 1) = 0$.

De donde $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$; y los puntos de intersección son $(1, 0)$, $(-\frac{1}{2}, 2\pi/3)$, $(-\frac{1}{2}, 4\pi/3)$. El polo es también un punto de intersección.

EL ANGULO DE INTERSECCION ϕ de dos curvas en un punto de intersección $P(\varrho, \theta)$, que no sea el polo, viene dado por

$$\operatorname{tag}\phi = \frac{\operatorname{tag}\psi_1 - \operatorname{tag}\psi_2}{1 + \operatorname{tag}\psi_1 \operatorname{tag}\psi_2}$$

siendo ψ_1 y ψ_2 los ángulos que forma el radio vector OP con las respectivas tangentes a las curvas en P.

Como vemos, el procedimiento de calcular este ángulo es análogo al utilizado en coordenadas rectangulares sin más que sustituir las pendientes de las tangentes por las tangentes de los ángulos que el radio vector forma con las tangentes a las curvas en el punto de intersección.

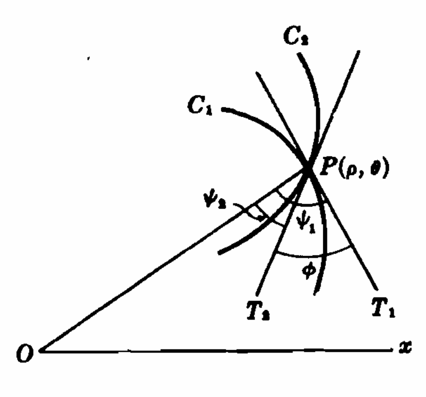


Fig. 20-3

Ejemplo 4:

Hallar los ángulos agudos de intersección de las curvas $\varrho = \cos\theta$ y $\varrho = \cos 2\theta$.
Los puntos de intersección ya se calcularon en el ejemplo 3.
En el polo: este punto viene dado por $\theta = \frac{1}{2}\pi$ de la curva $\varrho = \cos\theta$ y por $\theta = \pi/4$ y $3\pi/4$ de la $\varrho = \cos 2\theta$, Por tanto, en el polo habrá dos intersecciones, siendo el ángulo agudo de cada una de las curvas dadas a $\frac{1}{4}\pi$.

Para $\varrho = \cos\theta$ Para $\varrho = \cos 2\theta$

$$\operatorname{tag}\psi_1 = -\cot\theta \qquad \operatorname{tag}\psi_2 = -\tfrac{1}{2}\cot 2\theta$$

En el punto $(1, 0)$: $\operatorname{tag}\psi_1 = -\cot 0 = \infty$ y $\operatorname{tag}\psi_2 = \infty$. Por tanto, $\psi_1 = \psi_2 = \frac{1}{2}\pi$ y $\phi = 0$.

En el punto $(-\frac{1}{2}, 2\pi/3)$: $\operatorname{tag}\psi_1 = \sqrt{3}/3$ y $\operatorname{tag}\psi_2 = -\sqrt{3}/6$. $\operatorname{tag}\phi = \dfrac{\sqrt{3}/3 + \sqrt{3}/6}{1 - 1/6} = 3\sqrt{3}/5$ y el ángulo agudo de intersección es $\phi = 46° 6'$.
Por simetría, este es también el ángulo agudo de intersección en el punto $(-\frac{1}{2}, 4\pi/3)$.

(Ver Problemas 11-13.)

LA DERIVADA DE LA LONGITUD DE ARCO viene dada por $\dfrac{ds}{d\theta} = \sqrt{\varrho^2 + (\varrho')^2}$ siendo $\varrho' = \dfrac{d\varrho}{d\theta}$ haciendo el convenio de que al aumentar θ también lo hace s.

(Ver Problemas 14-16.)

LA CURVATURA de una curva se expresa por $K = \dfrac{\varrho^2 + 2(\varrho')^2 - \varrho\varrho''}{\{\varrho^2 + (\varrho')^2\}^{3/2}}$.

(Ver Problemas 17-19.)

MOVIMIENTO CURVILINEO. Supongamos que una partícula P se mueve a lo largo de una curva cuya ecuación, en coordenadas polares, es $\varrho = f(\theta)$. Expresando la ecuación de la curva en forma paramétrica:

$$x = \varrho \cos\theta = g(\theta), \quad y = \varrho \operatorname{sen}\theta = h(\theta)$$

El vector de posición de P es

$$\mathbf{r} = \mathbf{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \varrho\mathbf{i}\cos\theta + \varrho\mathbf{j}\operatorname{sen}\theta = \varrho(\mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\operatorname{sen}\theta)$$

y el movimiento de P se puede estudiar como se hizo en el Capítulo 19.

Otro procedimiento es expresar $\mathbf{r}$ y, por tanto, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$, en función de los vectores unitarios según el radio vector de P y su perpendicular. Veamos cuál es la expresión del vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$.

$$\mathbf{u}_\varrho = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\operatorname{sen}\theta$$

cuyo sentido es el de crecimiento de ϱ; el vector unitario según la perpendicular a $\mathbf{r}$ con el sentido del crecimiento de θ, viene dado por

$$\mathbf{u}_\theta = -\mathbf{i}\operatorname{sen}\theta + \mathbf{j}\cos\theta$$

A partir de estas expresiones es fácil llegar a las siguientes:

$$\frac{d\mathbf{u}_\varrho}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_\varrho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \mathbf{u}_\theta\frac{d\theta}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\mathbf{u}_\varrho\frac{d\theta}{dt}$$

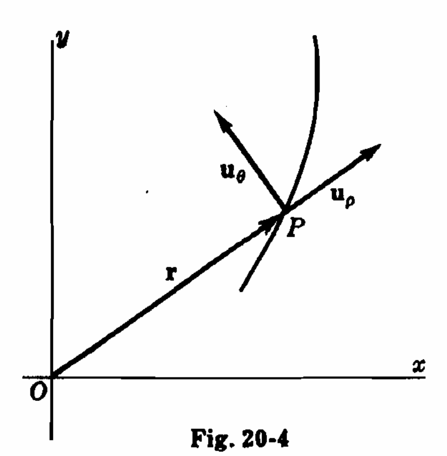


Fig. 20-4

De

$$\mathbf{r} = \varrho\,\mathbf{u}_\varrho$$

Como se demuestra en el Problema 20,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}_\varrho\frac{d_\varrho}{dt} + \varrho\mathbf{u}_\theta\frac{d\theta}{dt} = v_\varrho\mathbf{u}_\varrho + v_\theta\mathbf{u}_\theta$$

y

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u}_\varrho\left[\frac{d^2\varrho}{dt^2} - \varrho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + \mathbf{u}_\theta\left[\varrho\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\varrho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]$$
$$= a_\varrho\mathbf{u}_\varrho + a_\theta\mathbf{u}_\theta$$

Aquí, $v_\varrho = \dfrac{d\varrho}{dt}$ y $v_\theta = \varrho\dfrac{d\theta}{dt}$ son, respectivamente, las componentes de $\mathbf{v}$ en la dirección del radio vector y en su perpendicular, siendo $a_\varrho = \dfrac{d^2\varrho}{dt^2} - \left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2$ y $a_\theta = \varrho\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + 2\dfrac{d\varrho}{dt}\cdot\dfrac{d\theta}{dt}$, las correspondientes componentes de $\mathbf{a}$.

(Ver Problema 21.)

Problemas resueltos

1. Demostrar que tag $\psi = \varrho\dfrac{d\theta}{d\varrho}$, siendo ψ el ángulo formado, en el punto $P(\varrho, \theta)$ de la curva $\varrho = f(\theta)$, por el radio vector OP y la tangente PT.

En la Fig. 20-5, $Q(\varrho + \Delta\varrho, \theta + \Delta\theta)$ es un punto de la curva muy próximo a P. Del triángulo rectángulo PSQ,

$$\operatorname{tag}\lambda = \frac{SP}{SQ} = \frac{SP}{OQ - OS} = \frac{\varrho \operatorname{sen}\Delta\theta}{\varrho + \Delta\varrho - \varrho\cos\Delta\theta}$$

$$= \frac{\varrho \operatorname{sen}\Delta\theta}{\varrho(1 - \cos\Delta\theta) + \Delta\varrho} = \frac{\varrho\dfrac{\operatorname{sen}\Delta\theta}{\Delta\theta}}{\varrho\dfrac{1 - \cos\Delta\theta}{\Delta\theta} + \dfrac{\Delta\varrho}{\Delta\theta}}$$

Ahora bien, cuando $Q \to P$ a lo largo de la curva, $\Delta\theta \to 0$, $OQ \to OP$, $PQ \to PT$ y $\angle\lambda \to \angle\psi$.

Cuando $\Delta\theta \to 0$, $\dfrac{\operatorname{sen}\Delta\theta}{\Delta\theta} \to 1$ y $\dfrac{1 - \cos\Delta\theta}{\Delta\theta} \to 0$ (ver Capítulo 12).

De donde, $\operatorname{tag}\psi = \lim\limits_{\Delta\theta\to 0} \operatorname{tag}\lambda = \dfrac{\varrho}{d\varrho/d\theta} = \varrho\dfrac{d\theta}{d\varrho}$.

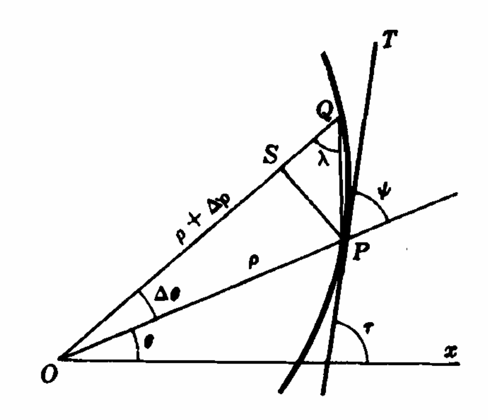


Fig. 20-5

Calcular tag ψ en los puntos dados en las funciones de los problemas 2-3.

2. $\varrho = 2 + \cos\theta$; $\theta = \pi/3$. (Ver Fig. 20-6.)

Para $\theta = \pi/3$: $\varrho = 2 + \frac{1}{2} = 5/2$, $\varrho' = -\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{3}/2$, y $\operatorname{tag}\psi = \varrho/\varrho' = -5/\sqrt{3}$.

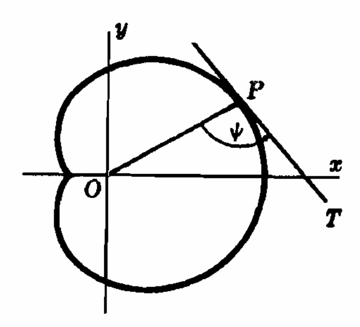


Fig. 20-6

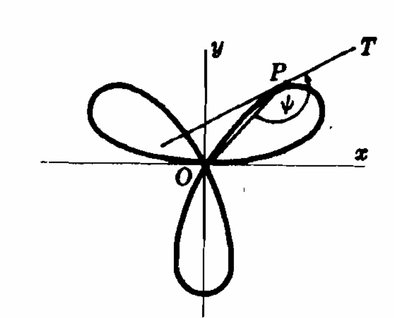


Fig. 20-7

3. $\varrho = 2\operatorname{sen}3\theta$; $\theta = \pi/4$. (Ver Fig. 20-7.)

Para $\theta = \pi/4$: $\varrho = 2(1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, $\varrho' = 6\cos 3\theta = 6(-1/\sqrt{2}) = -3\sqrt{2}$, y $\operatorname{tag}\psi = \varrho/\varrho' = -1/3$.

4. Demostrar que $\operatorname{tag}\tau = \dfrac{\varrho\cos\theta + \varrho'\operatorname{sen}\theta}{-\varrho\operatorname{sen}\theta + \varrho'\cos\theta}$.

De la figura del Problema 1, $\tau = \psi + \theta$ y

$$\operatorname{tag}\tau = \operatorname{tag}(\psi + \theta) = \frac{\operatorname{tag}\psi + \operatorname{tag}\theta}{1 - \operatorname{tag}\psi\operatorname{tag}\theta} = \frac{\varrho\dfrac{d\theta}{d\varrho} + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{1 - \varrho\dfrac{d\theta}{d\varrho}\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\varrho\cos\theta + \dfrac{d\varrho}{d\theta}\operatorname{sen}\theta}{\dfrac{d\varrho}{d\theta}\cos\theta - \varrho\operatorname{sen}\theta} = \frac{\varrho\cos\theta + \varrho'\operatorname{sen}\theta}{-\varrho\operatorname{sen}\theta + \varrho'\cos\theta}$$

5. Demostrar que si $\varrho = f(\theta)$ pasa por el polo y θ_1 satisface a la ecuación $f(\theta_1) = 0$ la dirección de la tangente a la curva en el polo $(0, \theta_1)$ viene dada por θ_1.

En $(0, \theta_1)$: $\varrho = 0$ y $\varrho' = f'(\theta_1)$.

Si $\varrho' \neq 0$: $\operatorname{tag}\tau = \dfrac{\varrho\cos\theta + \varrho'\operatorname{sen}\theta}{-\varrho\operatorname{sen}\theta + \varrho'\cos\theta}$

$$= \frac{0 + \operatorname{sen}\theta_1\cdot f'(\theta_1)}{0 + \cos\theta_1\cdot f'(\theta_1)} = \operatorname{tag}\theta_1$$

Si $\varrho' = 0$: $\operatorname{tag}\tau = \lim\limits_{\theta\to\theta_1} \dfrac{\operatorname{sen}\theta\cdot f'(\theta)}{\cos\theta\cdot f'(\theta)} = \operatorname{tag}\theta_1$

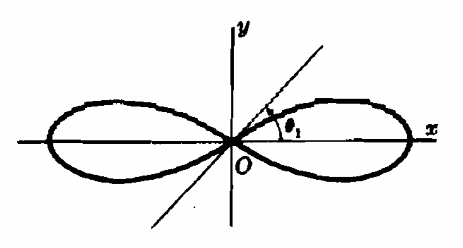


Fig. 20-8

En los Problemas 6-8 hallar la tangente de la curva dada en el punto considerado.

6. $\varrho = 1 - \cos\theta$; $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Ver Fig. 20-9.

Para $\theta = \frac{1}{2}\pi$: $\operatorname{sen}\theta = 1$, $\cos\theta = 0$, $\varrho = 1$, $\varrho' = \operatorname{sen}\theta = 1$, y

$$\operatorname{tag}\tau = \frac{\varrho\cos\theta + \varrho'\operatorname{sen}\theta}{-\varrho\operatorname{sen}\theta + \varrho'\cos\theta} = \frac{1\cdot 0 + 1\cdot 1}{-1\cdot 1 + 1\cdot 0} = -1$$

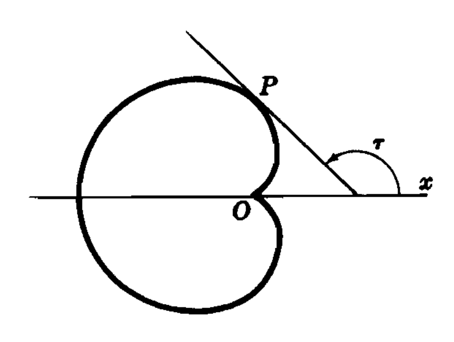


Fig. 20-9

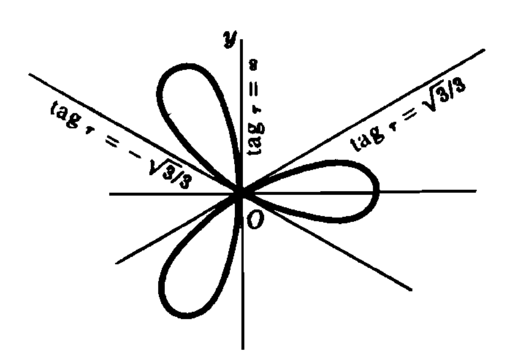


Fig. 20-10

7. $\varrho = \cos 3\theta$; polo. Ver Fig. 20-10.

Cuando $\varrho = 0$, $\cos 3\theta = 0$. Por tanto $3\theta = \pi/2,\ 3\pi/2,\ 5\pi/2$, y $\theta = \pi/6,\ \pi/2,\ 5\pi/6$.

Del Problema 5, $\operatorname{tag}\tau = 1/\sqrt{3}$, ∞, y $-1/\sqrt{3}$.

8. $\varrho\theta = a$; $\theta = \pi/3$.

Para $\theta = \pi/3$: $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{3}/2$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\varrho = 3a/\pi$, y $\varrho' = -a/\theta^2 = -9a/\pi^2$.

$$\operatorname{tag}\tau = \frac{\varrho\cos\theta + \varrho'\operatorname{sen}\theta}{-\varrho\operatorname{sen}\theta + \varrho'\cos\theta} = -\frac{\pi - 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\pi + 3}$$

9. Hallar los puntos en los que la tangente a la curva $\varrho = 1 + \operatorname{sen}\theta$ es horizontal o vertical

En $P(\varrho,\theta)$:
$$\operatorname{tag}\tau = \frac{(1+\operatorname{sen}\theta)\cos\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta}{-(1+\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta + \cos^2\theta}$$
$$= -\frac{\cos\theta\,(1+2\operatorname{sen}\theta)}{(\operatorname{sen}\theta+1)(2\operatorname{sen}\theta-1)}$$

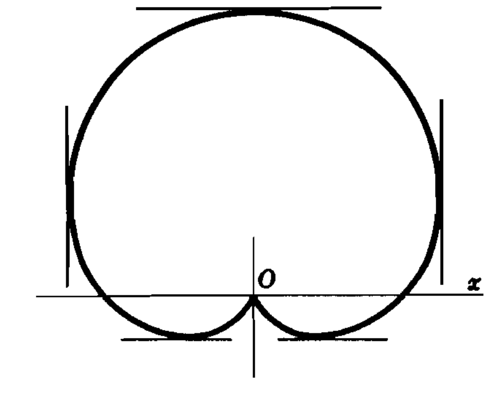
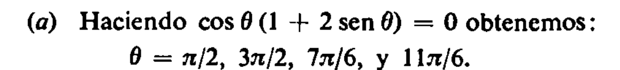


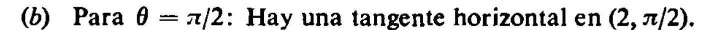
Fig. 20-11

(*a*) Haciendo $\cos\theta\,(1+2\operatorname{sen}\theta) = 0$ obtenemos:
$\theta = \pi/2,\ 3\pi/2,\ 7\pi/6$, y $11\pi/6$.



Siendo $(\operatorname{sen}\theta + 1)(2\operatorname{sen}\theta - 1) = 0$ obtenemos:
$\theta = 3\pi/2,\ \pi/6$, y $5\pi/6$.

(*b*) Para $\theta = \pi/2$: Hay una tangente horizontal en $(2, \pi/2)$.



Para $\theta = 7\pi/6$ y $11\pi/6$: Hay tangentes horizontales en los puntos $(\frac{1}{2}, 7\pi/6)$ y $(\frac{1}{2}, 11\pi/6)$.

Para $\theta = \pi/6$ y $5\pi/6$: Hay tangentes verticales en $(3/2, \pi/6)$ y $(3/2, 5\pi/6)$.

Para $\theta = 3\pi/2$: Ver Problema 5, hay una tangente vertical en el polo.

10. Demostrar que el ángulo que forma el radio vector de un punto cualquiera de la cardioide $\varrho = a(1-\cos\theta)$ con la curva, es la mitad del que forma el radio vector con el eje polar.

Dado un punto cualquiera $P(\varrho,\theta)$ de la cardiode, tendremos:

$$\varrho' = a\operatorname{sen}\theta,\ \text{y}\ \operatorname{tag}\psi = \varrho/\varrho' = (1-\cos\theta)/\operatorname{sen}\theta = \operatorname{tag}\tfrac{1}{2}\theta \quad \text{o} \quad \psi = \tfrac{1}{2}\theta$$

En los Problemas 11-13 hallar los ángulos de intersección de los pares de curvas dadas.

11. $\varrho = 3\cos\theta$, $\varrho = 1 + \cos\theta$.

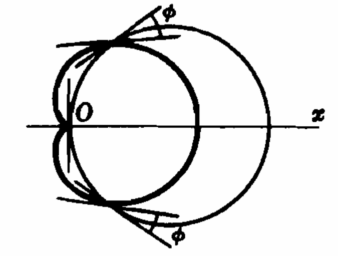
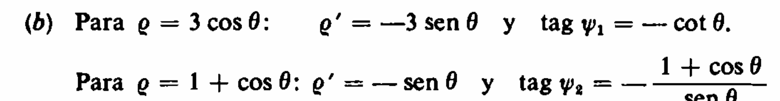


Fig. 20-12

(*a*) Resolviendo $\varrho = 3\cos\theta = 1 + \cos\theta$ obtenemos los puntos de intersección $(3/2, \pi/3)$ y $(3/2, 5\pi/3)$. Las curvas se cortan también en el polo.



(*b*) Para $\varrho = 3\cos\theta$: $\quad \varrho' = -3 \operatorname{sen}\theta$ y $\operatorname{tag}\psi_1 = -\cot\theta$.

Para $\varrho = 1 + \cos\theta$: $\varrho' = -\operatorname{sen}\theta$ y $\operatorname{tag}\psi_2 = -\dfrac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

(*c*) Para $\theta = \pi/3$: $\operatorname{tag}\psi_1 = -1/\sqrt{3}$, $\operatorname{tag}\psi_2 = -\sqrt{3}$, y $\operatorname{tag}\phi = 1/\sqrt{3}$.

El ángulo agudo de intersección en el punto $(3/2, \pi/3)$ y por simetría en el $(3/2, 5\pi/3)$, es $\pi/6$.

En el polo: Gráficamente o teniendo en cuenta el resultado del Problema 5, se puede ver que las curvas dadas son ortogonales.

12. $\varrho = \sec^2 \frac{1}{2}\theta$, $\varrho = 3\csc^2 \frac{1}{2}\theta$.

(*a*) Resolviendo $\varrho = \sec^2 \frac{1}{2}\theta = 3\csc^2 \frac{1}{2}\theta$ obtenemos los puntos de intersección $(4, 2\pi/3)$ y $(4, 4\pi/3)$.

(*b*) Para $\varrho = \sec^2 \frac{1}{2}\theta$: $\quad \varrho' = \sec^2 \frac{1}{2}\theta \operatorname{tag}\frac{1}{2}\theta$ y $\operatorname{tag}\psi_1 = \cot \frac{1}{2}\theta$.

Para $\varrho = 3\csc^2 \frac{1}{2}\theta$: $\varrho' = -3\csc^2 \frac{1}{2}\theta \cot \frac{1}{2}\theta$ y $\operatorname{tag}\psi_2 = -\operatorname{tag}\frac{1}{2}\theta$.

(*c*) Para $\theta = 2\pi/3$: $\operatorname{tag}\psi_1 = 1/\sqrt{3}$, $\operatorname{tag}\psi_2 = -\sqrt{3}$, y $\phi = \frac{1}{2}\pi$. Las curvas son ortogonales.

13. $\varrho = \operatorname{sen} 2\theta$, $\varrho = \cos\theta$.

(*a*) Las curvas se cortan en los puntos $(\sqrt{3}/2, \pi/6)$, $(-\sqrt{3}/2, 5\pi/6)$, y en el polo.

(*b*) Para $\varrho = \operatorname{sen} 2\theta$: $\varrho' = 2\cos 2\theta$ y $\operatorname{tag}\psi_1 = \frac{1}{2}\operatorname{tag} 2\theta$.

Para $\varrho = \cos\theta$: $\quad \varrho' = -\operatorname{sen}\theta$ y $\operatorname{tag}\psi_2 = -\cot\theta$.

(*c*) Para $\theta = \pi/6$: $\operatorname{tag}\psi_1 = \sqrt{3}/2$, $\operatorname{tag}\psi_2 = -\sqrt{3}$, y $\operatorname{tag}\phi = -3\sqrt{3}$. El ángulo agudo de intersección en los puntos $(\sqrt{3}/2, \pi/6)$ y $(-\sqrt{3}/2, 5\pi/6)$ es $\phi = \operatorname{arc\,tag} 3\sqrt{3} = 79°6'$.

En el polo, los ángulos agudos de intersección son 0° y $\frac{1}{2}\pi$.

Hallar $ds/d\theta$ en el punto $P(\varrho, \theta)$ en los Problemas 14-16.

14. $\varrho = \cos 2\theta$.

$\varrho' = -2\operatorname{sen} 2\theta$ y $ds/d\theta = \sqrt{\varrho^2 + (\varrho')^2} = \sqrt{\cos^2 2\theta + 4\operatorname{sen}^2 2\theta} = \sqrt{1 + 3\operatorname{sen}^2 2\theta}$.

15. $\varrho(1 + \cos\theta) = 4$.

$-\varrho\operatorname{sen}\theta + \varrho'(1+\cos\theta) = 0$. De donde $\varrho' = \dfrac{\varrho\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} = \dfrac{4\operatorname{sen}\theta}{(1+\cos\theta)^2}$ y

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\varrho^2 + (\varrho')^2} = \frac{4\sqrt{2}}{(1+\cos\theta)^{3/2}}$$

16. $\varrho = \operatorname{sen}^3 \frac{1}{3}\theta$. Hallar $ds/d\theta$ para $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

$$\varrho' = \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{3}\theta \cos \tfrac{1}{3}\theta \quad \text{y} \quad ds/d\theta = \sqrt{\operatorname{sen}^6 \tfrac{1}{3}\theta + \operatorname{sen}^4 \tfrac{1}{3}\theta \cos^2 \tfrac{1}{3}\theta} = \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{3}\theta.$$

Para $\theta = \frac{1}{2}\pi$, $ds/d\theta = \operatorname{sen}^2 \frac{1}{6}\pi = 1/4$.

17. Demostrar que $K = \dfrac{\varrho^2 + 2(\varrho')^2 - \varrho\varrho''}{\{\varrho^2 + (\varrho')^2\}^{3/2}}$.

Por definición, $K = d\tau/ds$. Como $\tau = \theta + \psi$ y

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\psi}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\psi}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{ds}\left(1 + \frac{d\psi}{d\theta}\right), \quad \text{siendo } \psi = \operatorname{arc\,tag}\frac{\varrho}{\varrho'}$$

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{[(\rho')^2 - \rho\rho'']/(\rho')^2}{1+(\rho/\rho')^2} = \frac{(\rho')^2-\rho\rho''}{\rho^2+(\rho')^2} \quad \text{y} \quad 1+\frac{d\psi}{d\theta} = 1+\frac{(\rho')^2-\rho\rho''}{\rho^2+(\rho')^2} = \frac{\rho^2+2(\rho')^2-\rho\rho''}{\rho^2+(\rho')^2}$$

Por tanto, $K = \dfrac{d\theta}{ds}\left(1+\dfrac{d\psi}{d\theta}\right) = \dfrac{1+d\psi/d\theta}{ds/d\theta} = \dfrac{1+d\psi/d\theta}{\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}} = \dfrac{\rho^2+2(\rho')^2-\rho\rho''}{\{\rho^2+(\rho')^2\}^{3/2}}.$

18. $\varrho = 2 + \operatorname{sen}\theta$. Hallar la curvatura en el punto $P(\varrho, \theta)$.

$$K = \frac{\rho^2+2(\rho')^2-\rho\rho''}{\{\rho^2+(\rho')^2\}^{3/2}} = \frac{(2+\operatorname{sen}\theta)^2 + 2\cos^2\theta + (\operatorname{sen}\theta)(2+\operatorname{sen}\theta)}{\{(2+\operatorname{sen}\theta)^2+\cos^2\theta\}^{3/2}} = \frac{6(1+\operatorname{sen}\theta)}{(5+4\operatorname{sen}\theta)^{3/2}}.$$

19. $\varrho(1-\cos\theta) = 1$. Hallar la curvatura en $\theta = \pi/2$ y en $\theta = 4\pi/3$.

$$\rho' = \frac{-\operatorname{sen}\theta}{(1-\cos\theta)^2}, \quad \rho'' = \frac{-\cos\theta}{(1-\cos\theta)^2} + \frac{2\operatorname{sen}^2\theta}{(1-\cos\theta)^3}, \quad \text{y} \quad K = \operatorname{sen}^3\tfrac{1}{2}\theta.$$

Para $\theta = \pi/2$, $K = (1/\sqrt{2})^3 = \sqrt{2}/4$; para $\theta = 4\pi/3$, $K = (\sqrt{3}/2)^3 = 3\sqrt{3}/8$.

20. A partir de la relación $\mathbf{r} = \varrho\mathbf{u}_\varrho$, deducir las fórmulas de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ en función de $\mathbf{u}_\varrho$ y $\mathbf{u}_\theta$.

$$\mathbf{r} = \rho\mathbf{u}_\rho$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}_\rho\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{d\mathbf{u}_\rho}{dt} = \mathbf{u}_\rho\frac{d\rho}{dt} + \rho\mathbf{u}_\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u}_\rho\frac{d^2\rho}{dt^2} + \mathbf{u}_\theta\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \rho\mathbf{u}_\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} + \mathbf{u}_\theta\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} - \rho\mathbf{u}_\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$= \mathbf{u}_\rho\left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + \mathbf{u}_\theta\left[\rho\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]$$

21. Una partícula se mueve en el sentido contrario al de las agujas del reloj a lo largo de la curva $\varrho = 4\operatorname{sen}2\theta$, siendo $d\theta/dt = \frac{1}{2}$ radianes por segundo. (*a*) Expresar $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ en función de $\mathbf{u}_\varrho$ y $\mathbf{u}_\theta$. (*b*) Calcular $|\mathbf{v}|$ y $|\mathbf{a}|$ para $\theta = \pi/6$.

$$\mathbf{r} = 4\operatorname{sen}2\theta\,\mathbf{u}_\rho, \quad d\rho/dt = 8\cos2\theta\, d\theta/dt = 4\cos2\theta, \quad d^2\rho/dt^2 = -4\operatorname{sen}2\theta$$

(*a*) $$\mathbf{v} = \mathbf{u}_\rho\frac{d\rho}{dt} + \rho\mathbf{u}_\theta\frac{d\theta}{dt} = 4\mathbf{u}_\rho\cos2\theta + 2\mathbf{u}_\theta\operatorname{sen}2\theta$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}_\rho\left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + \mathbf{u}_\theta\left[\rho\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]$$

$$= -5\mathbf{u}_\rho\operatorname{sen}2\theta + 4\mathbf{u}_\theta\cos2\theta$$

(*b*) Para $\theta = \pi/6$: $\mathbf{u}_\rho = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \dfrac{1}{2}\mathbf{j}$, $\mathbf{u}_\theta = -\dfrac{1}{2}\mathbf{i} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$. $\mathbf{v} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \dfrac{5}{2}\mathbf{j}$; $\mathbf{a} = -\dfrac{19}{4}\mathbf{i} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathbf{j}$.
$|\mathbf{v}| = \sqrt{7}$, $|\mathbf{a}| = \frac{1}{2}\sqrt{91}$.

Problemas propuestos

Calcular tag ψ en los puntos dados, en los Problemas 22-25.

22. $\varrho = 3 - \operatorname{sen}\theta$ para $\theta = 0$, $\theta = 3\pi/4$ *Sol.* -3, $3\sqrt{2}-1$

23. $\varrho = a(1-\cos\theta)$ para $\theta = \pi/4$, $\theta = 3\pi/2$ *Sol.* $\sqrt{2}-1$, -1

24. $\varrho(1-\cos\theta) = a$ para $\theta = \pi/3$, $\theta = 5\pi/4$ *Sol.* $-\sqrt{3}/3$, $1+\sqrt{2}$

25. $\varrho^2 = 4\operatorname{sen}2\theta$ para $\theta = 5\pi/12$, $\theta = 2\pi/3$ *Sol.* $-1/\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$

Calcular tag τ en los Problemas 26-29.

26. $\varrho = 2 + \operatorname{sen}\theta$ para $\theta = \pi/6$ *Sol.* $-3\sqrt{3}$

27. $\varrho^2 = 9\cos 2\theta$ para $\theta = \pi/6$ *Sol.* 0

28. $\varrho = \operatorname{sen}^3 \theta/3$ para $\theta = \pi/2$ *Sol.* $-\sqrt{3}$

29. $2\varrho(1 - \operatorname{sen}\theta) = 3$ para $\theta = \pi/4$ *Sol.* $1 + \sqrt{2}$

30. Hallar los puntos de la curva $\varrho = \operatorname{sen} 2\theta$ en los que la tangente es horizontal o vertical.
Sol. T. H. en $\theta = 0, \pi$, 54°44′, 125°16′, 234°44′, 305°16′
T. V. en $\theta = \pi/2, 3\pi/2$, 35°16′, 144°44′, 215°16′, 324°44′

Hallar los ángulos agudos de intersección de las curvas dadas en los Problemas 31-33.

31. $\varrho = \operatorname{sen}\theta$, $\varrho = \operatorname{sen} 2\theta$ *Sol.* ϕ = 79°6′ para $\theta = \pi/3$ y $5\pi/3$; $\phi = 0$ en el polo.

32. $\varrho = \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta$, $\varrho^2 = \cos 2\theta$ *Sol.* $\phi = \pi/3$ para $\theta = \pi/6, 5\pi/6$, $\phi = \pi/4$ en el polo.

33. $\varrho^2 = 16\operatorname{sen} 2\theta$, $\varrho^2 = 4\csc 2\theta$ *Sol.* $\phi = \pi/3$ en cada intersección.

34. Demostrar que cada uno de los pares de curvas siguientes se cortan en ángulo recto en todos los puntos de intersección.
(*a*) $\varrho = 4\cos\theta$, $\varrho = 4\operatorname{sen}\theta$
(*b*) $\varrho = e^{\theta}$, $\varrho = e^{-\theta}$
(*c*) $\varrho^2\cos 2\theta = 4$, $\varrho^2 \operatorname{sen} 2\theta = 9$
(*d*) $\varrho = 1 + \cos\theta$, $\varrho = 1 - \cos\theta$

35. Hallar el ángulo de intersección de las tangentes a $\varrho = 2 - 4\operatorname{sen}\theta$ en el polo. *Sol.* $2\pi/3$

36. Hallar la curvatura de cada curva en el punto $P(\varrho, \theta)$:
(*a*) $\varrho = e^{\theta}$, (*b*) $\varrho = \operatorname{sen}\theta$, (*c*) $\varrho^2 = 4\cos 2\theta$, (*d*) $\varrho = 3\operatorname{sen}\theta + 4\cos\theta$.
Sol. (*a*) $1/(\sqrt{2}e^{\theta})$, (*b*) 2, (*c*) $\frac{3}{2}\sqrt{\cos 2\theta}$, (*d*) 2/5

37. Sea $\varrho = f(\theta)$ la ecuación en coordenadas polares de una curva y s la longitud de arco a lo largo de ella. Partiendo de $x = \varrho\cos\theta$, $y = \varrho\operatorname{sen}\theta$ y teniendo en cuenta que $\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$, demostrar que $\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \varrho^2 + (\varrho')^2$.

38. Suponiendo que s aumenta en la dirección creciente de θ, hallar $ds/d\theta$ en las curvas siguientes:
(*a*) $\varrho = a\cos\theta$, (*b*) $\varrho = a(1 + \cos\theta)$, (*c*) $\varrho = \cos 2\theta$.
Sol. (*a*) a, (*b*) $a\sqrt{2 + 2\cos\theta}$, (*c*) $\sqrt{1 + 3\operatorname{sen}^2 2\theta}$.

39. La posición de una partícula que se mueve a lo largo de la curva $\varrho = f(\theta)$ viene dada, en función del tiempo t, por $\varrho = g(t)$, $\theta = h(t)$.
(*a*) Multiplicar la relación obtenida en el Prob. 37 por $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ para obtener $v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \varrho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2$.
(*b*) A partir de tag $\psi = \varrho\frac{d\theta}{d\varrho} = \varrho\frac{d\theta/dt}{d\varrho/dt}$, obtener sen $\psi = \frac{\varrho}{v}\frac{d\theta}{dt}$ y cos $\psi = \frac{1}{v}\frac{d\varrho}{dt}$.

40. Demostrar que $\frac{d\mathbf{u}_\varrho}{dt} = \mathbf{u}_\theta\frac{d\theta}{dt}$ y $\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\mathbf{u}_\varrho\frac{d\theta}{dt}$.

41. Una partícula se mueve sobre la cardioide $\varrho = 4(1 + \cos\theta)$ con $d\theta/dt = \pi/6$ radianes por segundo. Expresar **v** y **a** en función de $\mathbf{u}_\varrho$ y $\mathbf{u}_\theta$.
Sol. $\mathbf{v} = -\frac{2\pi}{3}\mathbf{u}_\varrho\operatorname{sen}\theta + \frac{2\pi}{3}\mathbf{u}_\theta(1 + \cos\theta)$, $\mathbf{a} = -\frac{\pi^2}{9}\mathbf{u}_\varrho(1 + 2\cos\theta) - \frac{2\pi^2}{9}\mathbf{u}_\theta\operatorname{sen}\theta$

42. Una partícula se mueve en el sentido contrario al de las agujas del reloj sobre la curva $\varrho = 8\cos\theta$ con una velocidad constante de 4 unidades de longitud por segundo. Expresar **v** y **a** en función de $\mathbf{u}_\varrho$ y $\mathbf{u}_\theta$.
Sol. $\mathbf{v} = -4\mathbf{u}_\varrho\operatorname{sen}\theta + 4\mathbf{u}_\theta\cos\theta$, $\mathbf{a} = -4\mathbf{u}_\varrho\cos\theta - 4\mathbf{u}_\theta\operatorname{sen}\theta$

43. Si una partícula de masa m se mueve a lo largo de una trayectoria por la acción de una fuerza **F** constantemente dirigida hacia el origen, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, o sea, $\mathbf{a} = \frac{1}{m}\mathbf{F}$ de manera que $a_\theta = 0$. Demostrar que cuando $a_\theta = 0$, $\varrho^2\frac{d\theta}{dt} = k$ (constante) y la velocidad con que el radio vector barre el área comprendida por la curva es constante.

44. Una partícula se mueve a lo largo de la curva $\varrho = \frac{2}{1 - \cos\theta}$ con $a_\theta = 0$. Demostrar que $a_\varrho = -\frac{k^2}{2}\frac{1}{\varrho^2}$, siendo k la constante definida en el Problema 43 anterior.

Capítulo 21

Teoremas de valor medio

TEOREMA DE ROLLE. Si una función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, derivable en el intervalo abierto $a < x < b$ y además $f(a) = f(b) = 0$ existe al menos un valor de x, $x = x_0$, comprendido entre a y b en el que se verifica $f'(x) = 0$.

La interpretación geométrica de este teorema es: si una curva continua corta al eje x en dos puntos $x = a$ y $x = b$ existe al menos un punto $x = x_0$ comprendido entre a y b en el cual la tangente a la curva es paralela al eje x. (Ver Fig. 21-1.)

(La demostración se encuentra en el Problema 11.)

Corolario. Si $f(x)$ es una función que cumple las condiciones dichas anteriormente en el teorema de Rolle, salvo que $f(a) = f(b) \neq 0$, existe al menos un valor de x, $x = x_0$ comprendido entre a y b en el que se verifica $f'(x) = 0$. (Ver Fig. 21-2.)

(La demostración se encuentra en los Problemas 1-2.)

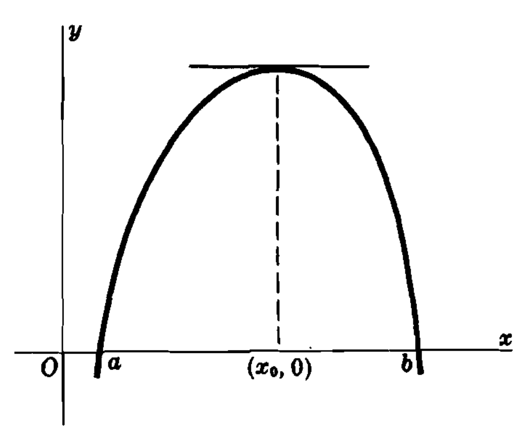


Fig. 21-1

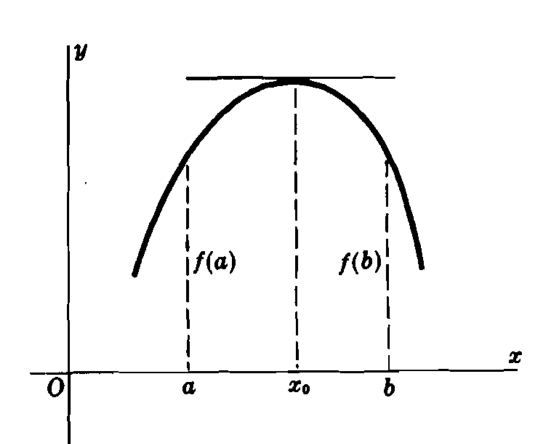


Fig. 21-2

TEOREMA DEL VALOR MEDIO. Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ y derivable en el intervalo abierto $a < x < b$, existe al menos un valor de x, $x = x_0$, comprendido entre a y b en el que se verifica

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

Geométricamente, significa que si P_1 y P_2 son dos puntos de una curva continua, existe al menos un punto de la misma comprendido entre P_1 y P_2 en el cual la tangente es paralela a la recta P_1P_2. (Ver Fig. 21-3.)

(La demostración se encuentra en el Problema 12.)

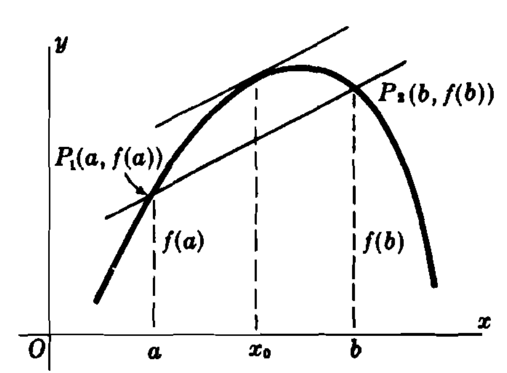


Fig. 21-3

El teorema del valor medio admite varias expresiones de gran utilidad:

(I) $f(b) = f(a) + (b - a) \cdot f'(x_0)$, x_0 entre a y b.

Por un simple cambio de notación se llega a

(II) $f(x) = f(a) + (x - a) \cdot f'(x_0)$, x_0 entre a y x.

De la Fig. 21-4 se deduce que $x_0 = a + \theta(b - a)$, siendo $0 < \theta < 1$. Efectuando esta sustitución, (I) adquiere la forma

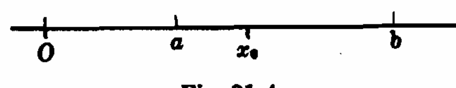


Fig. 21-4

(III) $f(b) = f(a) + (b - a) \cdot f'[a + \theta(b - a)]$, $0 < \theta < 1$

Poniendo $(b - a) = h$, (III) obtenemos

(IV) $f(a + h) = f(a) + h \cdot f'(a + \theta h)$, $0 < \theta < 1$

Finalmente, poniendo $a = x$ y $h = \Delta x$, (IV) llegamos a

(V) $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \cdot f'(x + \theta \cdot \Delta x)$, $0 < \theta < 1$

(Ver Problemas 3-9.)

TEOREMA DE CAUCHY. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ y derivables en el intervalo abierto $a < x < b$, siendo $g'(x) \neq 0$, existe al menos un valor de x, $x = x_0$, comprendido entre a y b en el que se verifica

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

En el caso particular de que $g(x) = x$, este teorema coincide con el del valor medio

(La demostración se encuentra en el Problema 13.)

GENERALIZACION DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO. Si $f(x)$ y sus $(n - 1)$ primeras derivadas son continuas en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ y existe la derivada n-sima $f^{(n)}(x)$ en todos los puntos del intervalo abierto $a < x < b$, hay al menos un valor de x, $x = x_0$, comprendido entre a y b en el que

(VI) $$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b - a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(b - a)^n$$

Ver la demostración en el Problema 15.

Al sustituir b por la variable x, (VI) obtenemos

(VII) $$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x - a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - a)^n, \quad x_0 \text{ entre } a \text{ y } x.$$

Cuando a se sustituye por 0, (VII) se transforma en

(VIII) $$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n$$

x_0 entre 0 y x.

Problemas resueltos

1. Hallar el valor de x_0 que cumple las condiciones del Teorema de Rolle, siendo $f(x) = x^3 - 12x$ en el intervalo $0 \leq x \leq 2\sqrt{3}$.

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$ para $x = \pm 2$; por tanto, $x_0 = 2$ es el valor buscado.

2. ¿Se puede aplicar el Teorema de Rolle a las funciones (*a*) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x - 2}$ y (*b*) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x + 2}$?

(*a*) $f(x) = 0$ para $x = 0, 4$. Como $f(x)$ es discontinua en $x = 2$, que es un punto del intervalo $0 \leq x \leq 4$, no se puede aplicar el teorema.

(*b*) $f(x) = 0$ para $x = 0, 4$. En este caso, $f(x)$ es discontinua en $x = -2$ que no pertenece al intervalo $0 \leq x \leq 4$.

$f'(x) = (x^2 + 4x - 8)/(x + 2)^2$ está definida en todos los puntos del intervalo excepto en $x = -2$. Por tanto, se puede aplicar el teorema y el valor pedido es $x_0 = 2(\sqrt{3} - 1)$, que es la raíz positiva de la ecuación $x^2 + 4x - 8 = 0$.

3. Hallar el valor de x_0 que cumple las condiciones del teorema del valor medio, siendo $f(x) = 3x^2 + 4x - 3$, $a = 1$, $b = 3$.

Aplicando (I) con $f(a) = f(1) = 4$, $f(b) = f(3) = 36$, $f'(x_0) = 6x_0 + 4$ y $b - a = 2$, resulta $36 = 4 + 2(6x_0 + 4) = 12x_0 + 12$, de donde $x_0 = 2$.

4. Aplicar el teorema del valor medio para calcular, aproximadamente, $\sqrt[6]{65}$. Haciendo $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $a = 64$, $b = 65$ y aplicando (I), se obtiene: $f(65) = f(64) + (65 - 64)/6x_0^{5/6}$, $64 < x_0 < 65$. Como x_0 no se conoce, tomamos $x_0 = 64$; por consiguiente, resulta de forma aproximada, $\sqrt[6]{65} = \sqrt[6]{64} + 1/(6\sqrt[6]{64^5}) = 2 + 1/192 = 2{,}00521$.

5. Se mecaniza un taladro circular de 4 centímetros de diámetro y 12 centímetros de altura en un bloque metálico, de manera que se aumenta su diámetro hasta 4,12 centímetros. Hallar el volumen de metal eliminado.

El volumen (centímetros cúbicos) de un cilindro circular de radio x centímetros y altura 12 centímetros es $V = f(x) = 12\pi x^2$. El volumen que queremos calcular es $f(2{,}06) - f(2)$. Según el teorema del valor medio.

$$f(2{,}06) - f(2) = 0{,}06 f'(x_0) = 0{,}06(24\pi x_0), \qquad 2 < x_0 < 2{,}06$$

Tomando $x_0 = 2$; tendremos, aproximadamente, $f(2{,}06) - f(2) = 0{,}06(24\pi \cdot 2) = 2{,}88\pi$ cm³.

6. Suponiendo que la función $y = f(x)$ cumple las condiciones del teorema del valor medio, siendo $a = x$, $b = x + \Delta x$, demostrar que $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$, aproximadamente.

Tendremos $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [x + \Delta x - x] \cdot f'(x_0)$, $x < x_0 < x + \Delta x$.

Tomando $x_0 = x$; tendremos, aproximadamente $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$.

7. Aplicando el teorema del valor medio, demostrar que $\operatorname{sen} x < x$ para $x > 0$.

Como $\operatorname{sen} x \leq 1$, $\operatorname{sen} x < x$ cuando $x > 1$. Tomando $f(x) = \operatorname{sen} x$ con $0 \leq x \leq 1$ y aplicando (II); tendremos

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 + x \cos x_0 = x \cos x_0, \quad 0 < x_0 < x$$

Ahora bien, en este intervalo, $\cos x_0 < 1$ y $x \cos x_0 < x$; por tanto, $\operatorname{sen} x < x$.

8. Aplicando el teorema del valor medio, demostrar que $\dfrac{x}{1 + x} < \ln(1 + x) < x$ para $-1 < x < 0$ y para $x > 0$.

Aplicando (IV) con $f(x) = \ln x$, $a = 1$ y $h = x$; tendremos

$$\ln(1 + x) = \ln 1 + x\frac{1}{1 + \theta x} = \frac{x}{1 + \theta x}, \quad 0 < \theta < 1$$

Cuando $x > 0$, $1 < 1 + \theta x < 1 + x$; por tanto, $1 > \dfrac{1}{1 + \theta x} > \dfrac{1}{1 + x}$ y $x > \dfrac{x}{1 + \theta x} > \dfrac{x}{1 + x}$.

Cuando $-1 < x < 0$, $1 > 1 + \theta x > 1 + x$; por tanto, $1 < \dfrac{1}{1 + \theta x} < \dfrac{1}{1 + x}$ y $x > \dfrac{x}{1 + \theta x} > \dfrac{x}{1 + x}$.

En ambos casos, $\dfrac{x}{1 + \theta x} < x$ y $\ln(1 + x) = \dfrac{x}{1 + \theta x} < x$; también, $\dfrac{x}{1 + \theta x} > \dfrac{x}{1 + x}$ y $\ln(1 + x) = \dfrac{x}{1 + \theta x} > \dfrac{x}{1 + x}$. Por tanto, $\dfrac{x}{1 + x} < \ln(1 + x) < x$ cuando $-1 < x < 0$ y cuando $x > 0$.

9. Aplicando el teorema del valor medio, demostrar que $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$ para $-1 < x < 0$ y para $x > 0$.

Tomando $f(x) = \sqrt{x}$ y aplicando (IV) con $a = 1$, $h = x$, tendremos

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2\sqrt{1+\theta x}}, \quad 0 < \theta < 1$$

Cuando $x > 0$, $\sqrt{1+\theta x} < \sqrt{1+x}$ y $\dfrac{x}{2\sqrt{1+\theta x}} > \dfrac{x}{2\sqrt{1+x}}$; cuando $-1 < x < 0$, $\sqrt{1+\theta x} > \sqrt{1+x}$ y $\dfrac{x}{2\sqrt{1+\theta x}} > \dfrac{x}{2\sqrt{1+x}}$.

En ambos casos, $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2\sqrt{1+\theta x}} > 1 + \dfrac{x}{2\sqrt{1+x}}$. Multiplicando la desigualdad por $\sqrt{1+x} > 0$, tendremos $1 + x > \sqrt{1+x} + \frac{1}{2}x$ y $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$.

10. Hallar el valor de x_0 que satisface las condiciones del teorema de Cauchy, siendo $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = x^2 + 1$, $1 \leq x \leq 4$.

El valor de x_0 debe ser tal que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)} = \frac{14-5}{17-2} = \frac{3}{5} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{3}{2x_0}$$

De donde $2x_0 = 5$ y $x_0 = 5/2$.

11. Demostrar el Teorema de Rolle: Si una función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, derivable en el intervalo abierto $a < x < b$, y además $f(a) = f(b) = 0$, existe, al menos, un valor $x = x_0$ comprendido entre a y b, en el que se verifica $f'(x) = 0$.

Si $f(x) = 0$ en el intervalo, también lo será $f'(x) = 0$ y, por tanto, el teorema estará demostrado. En los demás casos, $f(x)$ será positivo (negativo) en algún punto del intervalo y, por consiguiente (ver Propiedad II, Capítulo 3), habrá un valor $x = x_0$, $a < x_0 < b$, para el que corresponde un máximo (mínimo) relativo y $f'(x_0) = 0$.

12. Demostrar el teorema del valor medio: Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ y derivable en el intervalo abierto $a < x < b$, existe, al menos, un valor de x, $x = x_0$ comprendido entre a y b, en el que se verifica

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$$

En la Fig. 21-3, la ecuación de la secante P_1P_2 es $y = f(b) + K(x - b)$, siendo $K = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. En un punto cualquiera x del intervalo $a < x < b$, la distancia vertical de la secante a la curva es $F(x) = f(x) - f(b) - K(x - b)$. Ahora bien, $F(x)$ satisface las condiciones del teorema de Rolle (como fácilmente se puede comprobar), con lo que $F'(x) = f'(x) - K = 0$ en algún $x = x_0$ comprendido entre a y b. Por tanto,

$$K = f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

como queríamos demostrar.

13. Demostrar el teorema de Cauchy: Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ y derivables en el intervalo abierto $a < x < b$, siendo $g'(x) \neq 0$, existe, al menos, un valor de x, $x = x_0$, comprendido entre a y b, en el que se verifica

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Supongamos que $g(b) = g(a)$; según el corolario del teorema de Rolle, $g'(x) = 0$ en algún x comprendido entre a y b, lo cual es contrario a la hipótesis; por tanto, $g(b) \neq g(a)$. Hagamos $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = K$ (constante), y formemos la función

$$F(x) = f(x) - f(b) - K[g(x) - g(b)]$$

Ahora bien, esta función cumple las condiciones del teorema de Rolle (como fácilmente se puede comprobar) y, por tanto, $F'(x) = f'(x) - Kg'(x) = 0$ al menos para algún valor de x, $x = x_0$ comprendido entre a y b. Así pues,

$$K = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad \text{como queríamos demostrar.}$$

14. Un arco PQ de la curva $y = f(x)$ es cóncavo en la región situada por encima de la cuerda PQ y convexo por debajo de ella. Demostrar que si $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ y $f'(x)$ tiene el mismo signo en el intervalo $a < x < b$, se verifica:

(i) $f(x)$ es cóncava en el intervalo $a < x < b$ cuando $f''(x) > 0$,

(ii) $f(x)$ es convexa en el intervalo $a < x < b$ cuando $f''(x) < 0$.

La ecuación de la cuerda PQ que une los puntos $P[a, f(a)]$ y $Q[b, f(b)]$ es: $y = f(a) + (x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Sean A y B los puntos sobre el arco y sobre la cuerda, respectivamente, cuya abscisa es $x = c$, $a < c < b$; las ordenadas correspondientes serán $f(c)$ y

$$f(a) + (c-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{(b-c)\cdot f(a) + (c-a)\cdot f(b)}{b-a}$$

(i) Tendremos que demostrar que

$$f(c) < \frac{(b-c)\cdot f(a) + (c-a)\cdot f(b)}{b-a}$$

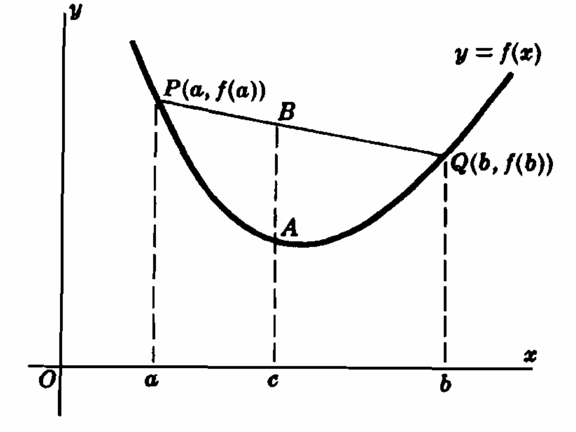
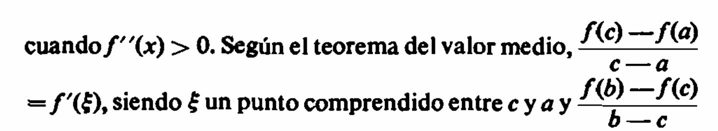


Fig. 21-5


cuando $f''(x) > 0$. Según el teorema del valor medio, $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} = f'(\xi)$, siendo ξ un punto comprendido entre c y a y $\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c} = f'(\eta)$, en donde η es un punto comprendido entre c y b. Como $f''(x) > 0$ en el intervalo $a < x < b$, $f'(x)$ será una función creciente en el intervalo y $f'(\xi) < f'(\eta)$. Por tanto, $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} < \dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$, de donde se deduce

$$f(c) < \frac{(b-c)\cdot f(a) + (c-a)\cdot f(b)}{b-a}$$

como se quería demostrar.

La demostración de (ii) se deja como ejercicio para el alumno.

15. Demostrar que si $f(x)$ y sus $(n-1)$ primeras derivadas son funciones continuas en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ y $f^{(n)}(x)$ está definida en el intervalo abierto $a < x < b$, existe un valor de x, $x = x_0$, comprendido entre a y b, en el que se verifica:

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(b-a)^n$$

En el caso particular de que $n = 1$, se obtiene el teorema del valor medio. La demostración que se hace seguidamente es análoga a la del Problema 12. Sea K un número tal que se verifique:

(i) $$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + K(b-a)^n$$

y consideremos

$$F(x) = f(x) - f(b) + \frac{f'(x)}{1!}(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + K(b-x)^n$$

Ahora bien $F(a) = 0$ por (i) y $F(b) = 0$. Por el teorema de Rolle, existe un $x = x_0$, siendo $a < x_0 < b$, tal que

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= f'(x_0) + \{f''(x_0)\cdot(b-x_0) - f'(x_0)\} + \left\{\frac{f'''(x_0)}{2!}(b-x_0)^2 - f''(x_0)\cdot(b-x_0)\right\} \\ &\quad + \cdots + \left\{\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(b-x_0)^{n-1} - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-2)!}(b-x_0)^{n-2}\right\} - Kn(b-x_0)^{n-1} \\ &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(b-x_0)^{n-1} - Kn(b-x_0)^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

Entonces $K = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ e (i) se convierte en

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(b-a)^n$$

Problemas propuestos

16. Hallar un valor x_0 que cumpla las condiciones del teorema de Rolle para las funciones

(*a*) $f(x) = x^2 - 4x + 3,\ 1 \leqslant x \leqslant 3$ *Sol.* $x_0 = 2$

(*b*) $f(x) = \text{sen}\, x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$ *Sol.* $x_0 = \frac{1}{2}\pi$

(*c*) $f(x) = \cos x,\ \pi/2 < x < 3\pi/2$ *Sol.* $x_0 = \pi$

17. Hallar un valor x_0 que cumpla las condiciones del teorema del valor medio para las funciones

(*a*) $y = x^3,\ 0 \leqslant x \leqslant 6$ *Sol.* $x_0 = 2\sqrt{3}$

(*b*) $y = ax^2 + bx + c,\ x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ *Sol.* $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$

(*c*) $y = \ln x,\ 1 \leqslant x \leqslant 2e$ *Sol.* $x_0 = \dfrac{2e - 1}{1 + \ln 2}$

18. Obtener un valor aproximado de (*a*) $\sqrt{15}$, (*b*) $(3{,}001)^3$, (*c*) $1/999$, aplicando el teorema del valor medio.
Sol. (*a*) 3,875, (*b*) 27,027, (*c*) 0,001001

19. Aplicar el teorema del valor medio para demostrar que:

(*a*) $\text{tag}\, x > x,\ 0 < x < \frac{1}{2}\pi$; (*b*) $\dfrac{x}{1 + x^2} < \text{Arc tag}\, x < x,\ x > 0$; (*c*) $x < \text{Arc sen}\, x < \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}},\ 0 < x < 1$.

20. Demostrar que $|f(x) - f(x_1)| \leq |x - x_1|$, siendo x_1 un número cualquiera, cuando (*a*) $f(x) = \text{sen}\, x$, (*b*) $f(x) = \cos x$.

21. Aplicando el teorema del valor medio, demostrar que:

(*a*) Si $f'(x) = 0$ en todos los puntos del intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, se verifica $f(x) = f(a) = c$ (constante) en todos los puntos del mismo.

(*b*) $f(x)$ es creciente al aumentar x en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, si $f'(x) > 0$ en todos los puntos del mismo.
Ind. Sean $x_1 < x_2$ dos puntos del intervalo; $f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1) f'(x_0),\ x_1 < x_0 < x_2$.

22. Aplicando el teorema del Problema 21(*a*), demostrar que si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones distintas pero $f'(x) = g'(x)$ en todos los puntos de un intervalo, $f(x) - g(x) = c \neq 0$ (constante) en el citado intervalo.

23. Una función $f(x)$ tiene un punto crítico en $x = x_0$, si $f'(x)$ cambia de signo cuando x pasa por $x = x_0$. Sean $x_1 < x_2 \cdots < x_{m-1} < x_m$ distintos puntos críticos de la función $f(x)$. Demostrar que $f(x) = 0$ tiene como máximo una raíz real en cada uno de los intervalos $x < x_1,\ x_1 < x < x_2,\ \cdots,\ x_{m-1} < x < x_m,\ x > x_m$.

24. Demostrar que si $f(x) = 0$ es una función de grado n con n raíces simples, la función $f'(x) = 0$ tiene exactamente $n - 1$ raíces simples.

25. Demostrar que $x^3 + px + q = 0$ tiene (*a*) una raíz real si $p > 0$, (*b*) tres raíces reales si $4p^3 + 27q^2 < 0$.

26. Hallar un valor x_0 que cumpla las condiciones del teorema de Cauchy para las funciones

(*a*) $f(x) = x^2 + 2x - 3,\ g(x) = x^2 - 4x + 6;\ a = 0,\ b = 1.$ *Sol.* $\frac{1}{2}$

(*b*) $f(x) = \text{sen}\, x,\ g(x) = \cos x;\ a = \pi/6,\ b = \pi/3.$ *Sol.* $\frac{1}{4}\pi$.

27. Aplicando el teorema del valor medio generalizado (VIII), demostrar que:

(*a*) se puede sustituir x por $\text{sen}\, x$ para $x < 0{,}31$ con un error menor que 0,005.

Ind: Para $n = 3$, $\text{sen}\, x = x - \frac{1}{6}x^3 \cos x_0$. Por otra parte, $\frac{1}{6}\,|x^3 \cos x_0| \leq \frac{1}{6}\,|x^3| < 0{,}005$.

(*b*) Se puede sustituir x por $x - x^3/6$ para $x < 0{,}359$ con un error menor que 0,00005.

Capítulo 22

Formas indeterminadas

EL CALCULO DE LA DERIVADA de una función $f(x)$ por la regla de los cuatro pasos, dada en el Capítulo 4, considera la expresión

$$(a) \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(\Delta x)}{G(\Delta x)}$$

Cuando los límites del numerador y del denominador de la fracción son ambos iguales a cero la expresión (a) presenta la forma indeterminada 0/0. En el Problema 5 del Capítulo 2 vimos algunos ejemplos de este tipo.

Análogamente, la expresión $\lim_{x \to \infty} \frac{3x - 2}{9x + 7}$ (ver Problema 6, Capítulo 2) presenta la forma indeterminada ∞/∞. Estos símbolos, así como otros que veremos posteriormente ($0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0 y 1^∞) carecen de significado aritmético y no tienen otro alcance que el de recordar los límites de las funciones con que se opera.

FORMA 0/0.

Regla de L'Hôpital. Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, derivables en el intervalo $0 < |x - a| < \delta$ siendo a un número, y $g(x) \neq 0$ para todos los valores de x del intervalo, de manera que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, si existe o es infinito el $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, se verifica:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplo 1: $\lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3}$ es de la forma indeterminada 0/0. Por tanto

$$\lim_{x \to 3} \frac{\frac{d}{dx}(x^4 - 81)}{\frac{d}{dx}(x - 3)} = \lim_{x \to 3} 4x^3 = 108, \quad \text{o sea} \quad \lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} = 108$$

(Ver Problemas 1-7.)

Nota. La regla de L'Hôpital implica que $\lim_{x \to a+} f(x)/g(x) = \lim_{x \to a-} f(x)/g(x)$. En algunos problemas (concretamente en el Problema 8) se demuestra la existencia de uno de estos límites.

FORMA ∞/∞.

La regla de L'Hôpital sigue siendo válida si efectuamos una o ambas sustituciones en las hipótesis:

(i) «$\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$» se sustituyen por «$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$»,

(ii) «siendo a un número» se sustituye por «$a = +\infty, -\infty$, o ∞» y «$0 < |x - a| < \delta$» se sustituye por «$|x| > M$».

Ejemplo 2: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x}$ es de la forma indeterminada ∞/∞. Por tanto,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

(Ver Problemas 9-11.)

FORMAS $0 \cdot \infty$ e $\infty - \infty$.

Estas formas se pueden tratar como las anteriores reduciéndolas, previamente, a una de las formas 0/0 o ∞/∞. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} \text{ es del tipo } 0\cdot\infty \text{ y } \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^2} \text{ es del tipo } \infty/\infty;$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\csc x - \frac{1}{x}\right) \text{ es del tipo } \infty-\infty \text{ y } \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x}\right) \text{ es del tipo } 0/0.$$

(Ver Problemas 13-16.)

FORMAS 0^0, ∞^0 y 1^∞.

Si lim y conduce a uno de estos tipos, lim (ln y) es de la forma $0 \cdot \infty$.

Ejemplo 3: Hallar $\lim_{x\to 0}(\sec^3 2x)^{\cot^2 3x}$.

Este es del tipo 1^∞. Sea $y = (\sec^3 2x)^{\cot^2 3x}$; tendremos $\ln y = \cot^2 3x \ln \sec^3 2x = \dfrac{3\ln\sec 2x}{\operatorname{tag}^2 3x}$ y $\lim_{x\to 0} \ln y$ es del tipo 0/0

Ahora bien, $\lim_{x\to 0}\dfrac{3\ln\sec 2x}{\operatorname{tag}^2 3x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{6\operatorname{tag} 2x}{6\operatorname{tag} 3x\sec^2 3x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tag} 2x}{\operatorname{tag} 3x}$, ya que $\lim_{x\to 0}\sec^2 3x = 1$, es del tipo 0/0.

Así pues, $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tag} 2x}{\operatorname{tag} 3x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{2\sec^2 2x}{3\sec^2 3x} = \dfrac{2}{3}$.

Como $\lim_{x\to 0}\ln y = 2/3$, $\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0}(\sec^3 2x)^{\cot^2 3x} = e^{2/3}$.

(Ver Problemas 17-19.)

Problemas resueltos

1. Demostrar la Regla de L'Hôpital: Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, derivable en el intervalo $0 < |x - a| < \delta$, siendo a un número, y $g(x) \neq 0$ para todos los valores de x del intervalo, de manera que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, si existe o es infinito el $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, se verifica: $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Sustituyendo b por x en el teorema de Cauchy (Capítulo 21), teniendo en cuenta que $f(a) = g(a) = 0$, tendremos,

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

en donde x_0 está comprendido entre a y x. Ahora bien, cuando $x_0 \to a$, $x \to a$ y, por tanto,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x_0\to a}\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. Hallar $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$. Cuando $x \to 2$, el numerador y el denominador tienden a cero.

Aplicando la regla de L'Hôpital $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\dfrac{2x+1}{2x} = \dfrac{5}{4}$.

3. Hallar $\lim_{x\to 0}\dfrac{x+\operatorname{sen} 2x}{x-\operatorname{sen} 2x}$. Cuando $x \to 0$, el numerador y el denominador tienden a cero.

Aplicando la regla de L'Hôpital $\lim_{x\to 0}\dfrac{x+\operatorname{sen} 2x}{x-\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x} = \dfrac{1+2}{1-2} = -3$.

4. Hallar $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x^2}$. $\qquad \lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2x} = \infty$.

5. Hallar $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\text{sen}^2 x - x^2}$.

Cuando $x \to 0$, el numerador y el denominador tienden a 0. Aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\text{sen}^2 x - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\text{sen}\, 2x - 2x}$$

Como la función que resulta es de la forma indeterminada 0/0, aplicamos la regla de nuevo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\text{sen}^2 x - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\text{sen}\, 2x - 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2\cos 2x - 2}$$

La función que resulta ahora es también de la forma indeterminada 0/0. Por consiguiente, sin detallar los pasos intermedios, resulta:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\text{sen}^2 x - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\text{sen}\, 2x - 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2\cos 2x - 2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{-4\,\text{sen}\, 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{-8\cos 2x} = -\frac{1}{4}$$

6. Criticar la solución: $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2} = \lim_{x\to 2} \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 6x + 3} = \lim_{x\to 2} \dfrac{6x - 2}{6x - 6} = \lim_{x\to 2} \dfrac{6}{6} = 1.$

La función dada es de la forma indeterminada 0/0 y, por tanto, se puede aplicar la regla de L'Hôpital, pero la función resultante no es indeterminada (su límite es 7/3), con lo cual, las sucesivas aplicaciones de la regla carecen de justificación. Este tipo de errores es muy frecuente.

7. Criticar la solución: $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 4x + 1} = \dfrac{6x - 2}{6x - 4} = 2.$

La solución correcta es: $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim_{x\to 1} \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 4x + 1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{6x - 2}{6x - 4} = 2.$

El resultado era el verdadero, pero no estaba correctamente expresado.

8. Hallar $\lim_{x\to \pi^+} \dfrac{\text{sen}\, x}{\sqrt{x - \pi}}$.

$$\lim_{x\to \pi^+} \frac{\text{sen}\, x}{\sqrt{x - \pi}} = \lim_{x\to \pi^+} \frac{\cos x}{\frac{1}{2}(x - \pi)^{-1/2}} = \lim_{x\to \pi^+} 2(x - \pi)^{1/2} \cos x = 0$$

En este caso, se pide el límite cuando x tiende π disminuyendo hacia él, porque en otro caso $(x - \pi)^{1/2}$ es imaginario

9. Hallar $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$.

Cuando $x \to +\infty$, el numerador y el denominador tienden a $+\infty$. Por tanto, $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{1/x}{1} = 0.$

10. Hallar $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln \text{sen}\, x}{\ln \text{tag}\, x}$. $\quad \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln \text{sen}\, x}{\ln \text{tag}\, x} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x/\text{sen}\, x}{\sec^2 x/\text{tag}\, x} = \lim_{x\to 0^+} \cos^2 x = 1.$

11. Hallar $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cot x}{\cot 2x}$. $\quad \lim_{x\to 0} \dfrac{\cot x}{\cot 2x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\csc^2 x}{2\csc^2 2x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\csc^2 x \cot x}{4\csc^2 2x \cot 2x}$

Como vemos, después de cada aplicación de la regla de L'Hôpital se obtiene una forma indeterminada del tipo ∞/∞. Por ello, se debe intentar resolverlo efectuando, previamente, una sustitución trigonométrica:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cot x}{\cot 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{tag}\, 2x}{\text{tag}\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 2x}{\sec^2 x} = 2$$

12. Siendo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Demostrar que si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, se verifica $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Tomando $x = 1/y$. Cuando $x\to+\infty$, $y\to 0^+$ y $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)}$. De donde

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{-f'(1/y)\cdot y^{-2}}{-g'(1/y)\cdot y^{-2}}$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{d}{dy} f(1/y)}{\frac{d}{dy} g(1/y)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

13. Hallar $\lim_{x\to 0^+} (x^2 \ln x)$.

Cuando $x\to 0^+$, $x^2\to 0$ y $\ln x\to -\infty$. Por tanto, $\frac{\ln x}{1/x^2}$ es una forma indeterminada del tipo ∞/∞.

$$\lim_{x\to 0^+} (x^2 \ln x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3} = \lim_{x\to 0^+} (-\tfrac{1}{2}x^2) = 0$$

14. $\lim_{x\to\pi/4} (1 - \operatorname{tag} x) \sec 2x = \lim_{x\to\pi/4} \frac{1-\operatorname{tag} x}{\cos 2x} = \lim_{x\to\pi/4} \frac{-\sec^2 x}{-2 \operatorname{sen} 2x} = 1.$

15. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{xe^x + e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{xe^x + 2e^x} = \frac{1}{2}.$

16. $\lim_{x\to 0} (\csc x - \cot x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0.$

17. Hallar $\lim_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$. (Es del tipo 1^∞.)

Sea $y = x^{1/(x-1)}$. Tendremos $\ln y = \frac{\ln x}{x-1}$ es una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 1} \ln y = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = 1$$

Como $\ln y\to 1$ cuando $x\to 1$, $y\to e$. Así pues, el límite es igual a e.

18. Hallar $\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi^-} (\operatorname{tag} x)^{\cos x}$. (Es del tipo ∞^0.)

Sea $y = (\operatorname{tag} x)^{\cos x}$. Tendremos $\ln y = \cos x \ln \operatorname{tag} x = \frac{\ln \operatorname{tag} x}{\sec x}$ es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi^-} \ln y = \lim_{x\to \frac{1}{2}\pi^-} \frac{\ln \operatorname{tag} x}{\sec x} = \lim_{x\to \frac{1}{2}\pi^-} \frac{\sec^2 x/\operatorname{tag} x}{\sec x \operatorname{tag} x} = \lim_{x\to \frac{1}{2}\pi^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = 0$$

Como $\ln y\to 0$ cuando $x\to \frac{1}{2}\pi^-$, $y\to 1$. Así pues, el límite es igual a 1.

19. Hallar $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$. (Es del tipo 0^0.)

Sea $y = x^{\operatorname{sen} x}$. Tendremos $\ln y = \operatorname{sen} x \ln x = \frac{\ln x}{\csc x}$ es una forma indeterminada del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\csc x \cot x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{-x\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{x \operatorname{sen} x - \cos x} = 0$$

Como $\ln y\to 0$ cuando $x\to 0^+$, $y\to 1$. Así pues, el límite es igual a 1.

20. Hallar $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x}$. $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x}$, etc.

Por ejemplo, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2+x^2}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{x^2} + 1} = 1.$

21. La intensidad de corriente por una bobina de resistencia R y coeficiente de autoinducción L, conectada a una fuerza electromotriz constante E viene dada, en función del tiempo t, por: $i = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})$. Obtener una fórmula de aplicación en el caso de que la resistencia R sea muy pequeña.

$$\lim_{R\to 0} i = \lim_{R\to 0} \frac{E(1-e^{-Rt/L})}{R} = \lim_{R\to 0} E\frac{t}{L}e^{-Rt/L} = \frac{Et}{L}$$

Problemas propuestos

Hallar

22. $\lim_{x\to 4} \frac{x^4 - 256}{x-4} = 256$

23. $\lim_{x\to 4} \frac{x^4-256}{x^2-16} = 32$

24. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x^2-9} = 1/2$

25. $\lim_{x\to 2} \frac{e^x - e^2}{x-2} = e^2$

26. $\lim_{x\to 0} \frac{xe^x}{1-e^x} = -1$

27. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\operatorname{tag} 2x} = 1/2$

28. $\lim_{x\to -1} \frac{\ln(2+x)}{x+1} = 1$

29. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\cos 2x - 1} = 1/4$

30. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\operatorname{sen} x} = 4$

31. $\lim_{x\to 0} \frac{8^x - 2^x}{4x} = \frac{1}{2}\ln 2$

32. $\lim_{x\to 0} \frac{2 \operatorname{arc\,tag} x - x}{2x - \operatorname{arc\,sen} x} = 1$

33. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln \sec 2x}{\ln \sec x} = 4$

34. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = -1/2$

35. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -3/2$

36. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$

37. $\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi} \frac{\csc 6x}{\csc 2x} = 1/3$

38. $\lim_{x\to +\infty} \frac{5x + 2\ln x}{x + 3\ln x} = 5$

39. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^4+x^2}{e^x+1} = 0$

40. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \cot x}{e^{\csc^2 x}} = 0$

41. $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x + 3x^3}{4e^x + 2x^2} = 1/4$

42. $\lim_{x\to 0} (e^x - 1)\cot x = 1$

43. $\lim_{x\to -\infty} x^2 e^x = 0$

44. $\lim_{x\to 0} x \csc x = 1$

45. $\lim_{x\to 1} \csc \pi x \ln x = -1/\pi$

46. $\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi^-} e^{-\operatorname{tag} x} \sec^2 x = 0$

47. $\lim_{x\to 0} (x - \operatorname{arc\,sen} x)\csc^3 x = -1/6$

48. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}\right) = -1/4$

49. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = 0$

50. $\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi} (\sec^3 x - \operatorname{tag}^3 x) = \infty$

51. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1}\right) = -1/2$

52. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{4}{x^2} - \frac{2}{1-\cos x}\right) = -1/3$

53. $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$

54. $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$

55. $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x} = 1$

56. $\lim_{x\to 0} (e^x + 3x)^{1/x} = e^4$

57. $\lim_{x\to +\infty} (1 - e^{-x})^{e^x} = 1/e$

58. $\lim_{x\to \frac{1}{4}\pi} (\operatorname{sen} x - \cos x)^{\operatorname{tag} x} = 1/e$

59. $\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi^-} (\operatorname{tag} x)^{\cos x} = 1$

60. $\lim_{x\to 1} x^{\operatorname{tag} \frac{1}{2}\pi x} = e^{-2/\pi}$

61. $\lim_{x\to +\infty} (1 + 1/x)^x = e$

62. Hallar: (*a*) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x(1-e^x)}{(1+x)\ln(1-x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1+x} \cdot \lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{\ln(1-x)} = 1,$

(*b*) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2^x}{3^{x^2}} = 0,$ (*c*) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-3/x}}{x^2} = 0$

63. Hallar $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^5 x}{x^2} = 0.$ Idem, $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^{1000} x}{x^5}.$

Capítulo 23

Diferenciales

DIFERENCIALES. Dada la función $y = f(x)$ se define:

(*a*) dx, leído *diferencial de x*, por la relación $dx = \Delta x$.
(*b*) dy, leído *diferencial de y*, por la relación $dy = f'(x)dx$.

La diferencial de una variable independiente es, por definición, el incremento que experimenta; sin embargo, la diferencial de una variable dependiente o función *no* es igual a su incremento. (Ver Fig. 23-1.)

Ejemplo 1:
Dada la función $y = x^2$, $dy = 2x \cdot dx$, mientras que, $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 = 2x\,dx + (dx)^2$. La Fig. 23-2 muestra una interpretación geométrica en la que se puede observar que Δy y dy se diferencian en el pequeño cuadrado de área $(dx)^2$.

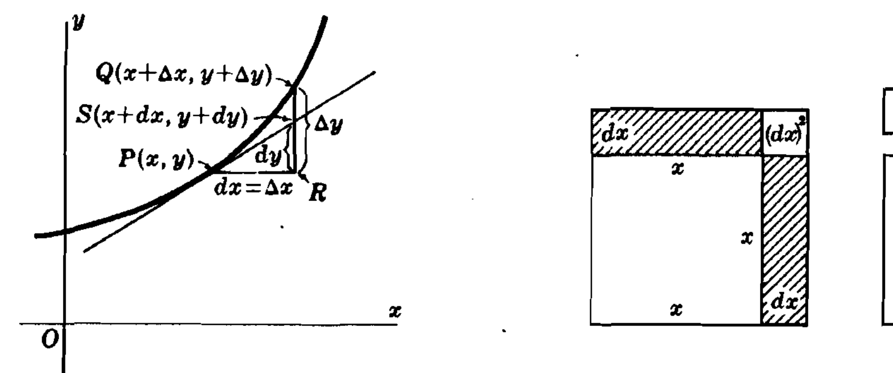


Fig. 23-1

Fig. 23-2

LA DIFERENCIAL, dy, se puede hallar aplicando su fórmula de definición, o bien por medio de las reglas del cálculo de derivadas. Algunas de estas son:

$$d(c) = 0, \quad d(cu) = c\,du, \quad d(uv) = u\,dv + v\,du,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}, \quad d(\text{sen}\, u) = \cos u\,du, \quad d(\ln u) = \frac{du}{u}, \text{ etc.}$$

Ejemplo 2: Hallar dy en las funciones siguientes:

(*a*) $y = x^3 + 4x^2 - 5x + 6$

$$dy = d(x^3) + d(4x^2) - d(5x) + d(6) = (3x^2 + 8x - 5)\,dx$$

(*b*) $y = (2x^3 + 5)^{3/2}$

$$dy = \tfrac{3}{2}(2x^3 + 5)^{1/2}\,d(2x^3 + 5) = \tfrac{3}{2}(2x^3 + 5)^{1/2} \cdot 6x^2\,dx = 9x^2(2x^3 + 5)^{1/2}\,dx$$

(Ver Problemas 1-5.)

CALCULO APROXIMADO DE INCREMENTOS POR MEDIO DE LA DIFERENCIAL. Si $dx = \Delta x$ es relativamente pequeño con respecto a x, el valor de Δy se puede obtener aproximadamente hallando dy.

Ejemplo 3:
Sea $y = x^2 + x + 1$ y supongamos que x sufre un incremento desde $x = 2$ hasta $x = 2{,}01$. La variación real correspondiente a y es $\Delta y = \{(2{,}01)^2 + 2{,}01 + 1\} - \{2^2 + 2 + 1\} = 0{,}0501$. Haciendo $x = 2$ y $dx = 0{,}01$ podemos obtener, aproximadamente, el valor del incremento de y, hallando $dy = f'(x)\,dx = (2x + 1)\,dx = \{2(2) + 1\} \cdot 0{,}01 = 0{,}05$.

(Ver Problemas 6-10.)

APROXIMACION DE LAS RAICES DE UNA ECUACION. Sea $x = x_1$ un valor aproximado, convenientemente elegido, de una raiz r-sima de la ecuación $y = f(x) = 0$, y supongamos que $f(x_1) = y_1 \neq 0$, de forma que y_1 diferirá de cero en una cantidad pequeña. Si el valor de x_1 se incrementa hasta r, el incremento correspondiente de $f(x_1)$ es $\Delta y_1 = -y_1$. Así, pues, un valor aproximado del incremento de x_1 vendrá dado por $f'(x_1)dx_1 = -y_1$, o sea, $dx_1 = -\dfrac{y_1}{f'(x_1)}$. Por tanto, otro valor, más aproximado, de la raiz r-sima será:

$$x_2 = x_1 + dx_1 = x_1 - \frac{y_1}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

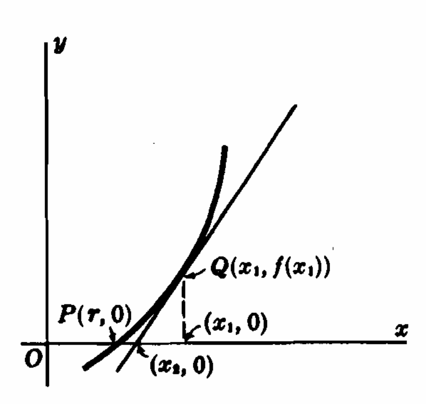


Fig. 23-3

Después de una tercera aproximación, tendremos $x_3 = x_2 + dx_2 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$, y así sucesivamente.

Si el valor elegido de x_1 no está suficientemente aproximado al de la raiz, se observará que x_2 difiere apreciablemente de x_1. Aunque esto no presenta un serio inconveniente ya que el proceso se autocorrige, sin embargo, lo más rápido es comenzar de nuevo el proceso con otro valor inicial más preciso.

(Ver Problemas 11-12.)

Problemas resueltos

1. Hallar dy en las funciones siguientes:

(a) $y = \dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^2 + 3}$.

$$dy = \frac{(x^2+3)\cdot d(x^3+2x+1) - (x^3+2x+1)\cdot d(x^2+3)}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{(x^2+3)(3x^2+2)\,dx - (x^3+2x+1)(2x)\,dx}{(x^2+3)^2} = \frac{x^4+7x^2-2x+6}{(x^2+3)^2}\,dx$$

(b) $y = \cos^2 2x + \operatorname{sen} 3x$.

$$dy = 2\cos 2x\, d(\cos 2x) + d(\operatorname{sen} 3x) = 2\cos 2x(-2\operatorname{sen} 2x\, dx) + 3\cos 3x\, dx$$

$$= -4\operatorname{sen} 2x\cos 2x\, dx + 3\cos 3x\, dx = (-2\operatorname{sen} 4x + 3\cos 3x)\, dx$$

(c) $y = e^{3x} + \operatorname{arc\,sen} 2x$. $\quad dy = (3e^{3x} + 2/\sqrt{1-4x^2})\,dx$

Diferenciar las funciones de los Problemas 2-5 y hallar dy/dx.

2. $xy + x - 2y = 5$.

$d(xy) + d(x) - d(2y) = d(5)$.

$x\,dy + y\,dx + dx - 2\,dy = 0$ o $(x-2)\,dy + (y+1)\,dx = 0$. De donde $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y+1}{x-2}$.

3. $x^3y^2 - 2x^2y + 3xy^2 - 8xy = 6$.

$$2x^3y\,dy + 3x^2y^2\,dx - 2x^2\,dy - 4xy\,dx + 6xy\,dy + 3y^2\,dx - 8x\,dy - 8y\,dx = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8y - 3y^2 + 4xy - 3x^2y^2}{2x^3y - 2x^2 + 6xy - 8x}$$

4. $\dfrac{2x}{y} - \dfrac{3y}{x} = 8$. $\quad 2\left(\dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right) - 3\left(\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2}\right) = 0$ y $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^2y + 3y^3}{3xy^2 + 2x^3}$

5. $x = 3\cos\theta - \cos 3\theta$, $y = 3\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} 3\theta$.

$dx = (-3\operatorname{sen}\theta + 3\operatorname{sen}3\theta)\,d\theta$, $dy = (3\cos\theta - 3\cos 3\theta)\,d\theta$, y $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos\theta - \cos 3\theta}{-\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}3\theta}$

6. Aplicando el cálculo diferencial, hallar aproximadamente (*a*) $\sqrt[3]{124}$, (*b*) sen 60°1′.

(*a*) Para $y = x^{1/3}$, $dy = \dfrac{1}{3x^{2/3}}dx$. Tomando $x = 125 = 5^3$ y $dx = -1$. Obtenemos $dy = \dfrac{1}{3(125)^{2/3}}(-1) = \dfrac{-1}{75}$ $= -0{,}0133$ y, aproximadamente, $\sqrt[3]{124} = y + dy = 5 - 0{,}0133 = 4{,}9867$.

(*b*) Para $x = 60°$ y $dx = 1' = 0{,}0003$ rad, $y = \operatorname{sen} x = \sqrt{3}/2 = 0{,}86603$ y $dy = \cos x\,dx = \frac{1}{2}(0{,}0003) = 0{,}00015$. De donde, aproximadamente, sen 60°1′ $= y + dy = 0{,}86603 + 0{,}00015 = 0{,}86618$.

7. Calcular Δy, dy, e $\Delta y - dy$ siendo $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x$, $x = 2$, y $dx = 0{,}5$.

$\Delta y = \{\frac{1}{2}(2{,}5)^2 + 3(2{,}5)\} - \{\frac{1}{2}(2)^2 + 3(2)\} = 2{,}625$.

$dy = (x + 3)dx = (2 + 3)(0{,}5) = 2{,}5 \quad \Delta y - dy = 2{,}625 - 2{,}5 = 0{,}125$.

8. Hallar, aproximadamente, la variación experimentada por el volumen de un cubo de arista x cuando esta se incrementa en un 1 %.

$V = x^3$ y $dV = 3x^2\,dx$. Para $dx = 0{,}01x$, $dV = 3x^2(0{,}01x) = 0{,}03x^3$ cm³

9. Hallar el peso aproximado de un tubo de cobre de 2 metros de longitud y 2 centímetros de diámetro interior y 2 milímetros de espesor. El peso específico del cobre vale 9 000 kp/m³.

Calculemos, en primer lugar, la variación de volumen cuando el radio $r = 0{,}01$ m se sustituye por $dr = 0{,}002$ m.

$$V = 8\pi r^2 \text{ y } dV = 16\pi r\,dr = 16\pi(0{,}01)(0{,}002) = 0{,}00032\,\pi\text{m}^3$$

El peso buscado es 9 000 $(0{,}00032\pi) = 9$ kp.

10. Hallar los valores de x para los cuales se puede sustituir $\sqrt[5]{x}$ por $\sqrt[5]{x+1}$ con un error menor que 0,001.

Para $y = x^{1/5}$ y $dx = 1$, $dy = \frac{1}{5}x^{-4/5}\,dx = \frac{1}{5}x^{-4/5}$.

Si $\frac{1}{5}x^{-4/5} < 10^{-3}$, tendremos $x^{-4/5} < 5 \cdot 10^{-3}$ y $x^{-4} < 5^5 \cdot 10^{-15}$.

Si $x^{-4} < 10 \cdot 5^5 \cdot 10^{-16}$, tendremos $x^4 > \dfrac{10^{16}}{31\,250}$ y $x > \dfrac{10^4}{\sqrt[4]{31\,250}} = 752{,}1$.

11. Aproximar las raíces reales de $x^3 + 2x - 5 = 0$, o bien, $x^3 = 5 - 2x$.

(*a*) Sobre el mismo sistema de ejes, se construyen las curvas $y = x^3$ e $y = 5 - 2x$.

Las raíces de la ecuación dada son las abscisas de los puntos de intersección.

Del gráfico se deduce que existe una raíz cuyo valor aproximado es $x_1 = 1{,}3$.

(*b*) Una segunda aproximación de esta raíz es

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}3 - \frac{(1{,}3)^3 + 2(1{,}3) - 5}{3(1{,}3)^2 + 2} = 1{,}3 - \frac{-0{,}203}{7{,}07} = 1{,}3 + 0{,}03 = 1{,}33$$

La división se ha calculado con dos cifras decimales ya que inmediatamente después de la coma, la cifra correspondiente es cero. Ello está de acuerdo con un teorema que dice: si en una división resultan k ceros inmediatamente después de la coma, el cociente debe calcularse con $2k$ cifras decimales.

(*c*) Efectuando una tercera y una cuarta aproximación, tendremos:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1{,}33 - \frac{(1{,}33)^3 + 2(1{,}33) - 5}{3(1{,}33)^2 + 2} = 1.33 - 0{,}0017 = 1{,}3283$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1{,}3283 - 0{,}00003114 = 1{,}32826886$$

12. Aproximar las raíces de la ecuación $2\cos x - x^2 = 0$.

(*a*) Las curvas $y = 2\cos x$ e $y = x^2$ se cortan en dos puntos cuyas abscisas son, aproximadamente, 1 y —1. Obsérvese que si una de las raíces es r, la otra debe ser $-r$.

(*b*) Para $x_1 = 1$: $x_2 = 1 - \dfrac{2\cos 1 - 1}{-2\,\text{sen}\,1 - 2} = 1 + \dfrac{2(0{,}5403) - 1}{2(0{,}8415) + 2} = 1 + 0{,}02 = 1{,}02$.

(*c*) $x^3 = 1{,}02 - \dfrac{2\cos(1{,}02) - (1{,}02)^2}{-2\,\text{sen}\,(1{,}02) - 2(1{,}02)}, = 1{,}02 + \dfrac{0{,}0064}{3{,}7442} = 1{,}02 + 0{,}0017 = 1{,}0217$.

Por tanto, con cuatro cifras decimales, las raíces son 1,0217 y —1,0217.

Problemas propuestos

13. Hallar dy en las funciones siguientes:

(*a*) $y = (5 - x)^3$ *Sol.* $-3(5 - x)^2\,dx$

(*b*) $y = e^{4x^2}$ *Sol.* $8xe^{4x^2}\,dx$

(*c*) $y = (\text{sen}\,x)/x$ *Sol.* $\dfrac{x\cos x - \text{sen}\,x}{x^2}\,dx$

(*d*) $y = \cos bx^2$ *Sol.* $-2bx\,\text{sen}\,bx^2\,dx$

(*e*) $y = \text{arc}\cos 2x$ *Sol.* $\dfrac{-2}{\sqrt{1 - 4x^2}}\,dx$

(*f*) $y = \ln \text{tag}\,x$ *Sol.* $\dfrac{2\,dx}{\text{sen}\,2x}$

14. Hallar dy/dx como en los Problemas 2-5.

(*a*) $2xy^3 + 3x^2y = 1$ *Sol.* $-\dfrac{2y(y^2 + 3x)}{3x(2y^2 + x)}$

(*b*) $xy = \text{sen}\,(x - y)$ *Sol.* $\dfrac{\cos(x - y) - y}{\cos(x - y) + x}$

(*c*) $\text{arc tag}\,\dfrac{y}{x} = \ln(x^2 + y^2)$ *Sol.* $\dfrac{2x + y}{x - 2y}$

(*d*) $x^2 \ln y + y^2 \ln x = 2$ *Sol.* $-\dfrac{(2x^2 \ln y + y^2)y}{(2y^2 \ln x + x^2)x}$

15. Hallar, con ayuda del cálculo diferencial, un valor aproximado de (*a*) $\sqrt[4]{17}$, (*b*) $\sqrt[5]{1020}$, (*c*) cos 59°, (*d*) tag 44°
Sol. (*a*) 2,03125, (*b*) 3,99688, (*c*) 0,5151, (*d*) 0,9651.

16. Hallar, con ayuda del cálculo diferencial, el incremento de (*a*) x^3 cuando x pasa de 5 a 5,01; (*b*) $1/x$ cuando x disminuye de 1 a 0,98. *Sol.* (*a*) 0,75, (*b*) 0,02.

17. Un disco metálico se dilata por la acción del calor de manera que su radio aumenta desde 5 a 5,06 centímetros. Hallar el valor aproximado del incremento del área. *Sol.* $0{,}6\pi = 1{,}88\ \text{cm}^2$.

18. Una bola de hielo de 10 centímetros de radio, se derrite hasta que su radio adquiere el valor 9,8 metros. Hallar, aproximadamente, la disminución que experimenta (*a*) su volumen y (*b*) su superficie. *Sol.* (*a*) $80\pi\ \text{cm}^3$, (*b*) $16\pi\ \text{cm}^2$.

19. La velocidad (metros por segundo) de un cuerpo en función de un parámetro h viene dada por $v = \sqrt{64{,}4\,h}$. Hallar el error en v debido a un error de 0,5 metros en la medición de h si este vale 100 metros. *Sol.* 0,2 m/s.

20. Si un aviador vuela alrededor de la tierra a una altura de 3,2 kilómetros sobre el ecuador, calcular cuántos kilómetros recorrerá más que una persona que la circunda por el ecuador. *Sol.* 20,2 km.

21. La precisión con que se puede medir el radio de un círculo es de 0,001 centímetros. Sabiendo que se quiere obtener su área con una aproximación de 0,1 centímetros cuadrados, hallar el máximo radio con el que se puede conseguir dicha medición. *Sol.* Aprox. 16 cm.

22. Hallar el volumen V sabiendo que $pV = 20$ y que la medida de p es $5 \pm 0{,}02$. *Sol.* $4 \mp 0{,}016$.

23. Hallar el radio r sabiendo que $F = 1/r^2$ y que la medida de F es $4 \pm 0{,}05$. *Sol.* $0{,}5 \mp 0{,}003$.

24. Hallar la variación del área total de un cono recto circular cuando (*a*) permaneciendo constante el radio, aumenta su altura en una cantidad muy pequeña, (*b*) permaneciendo constante la altura, el radio aumenta en una cantidad muy pequeña.

Sol. (*a*) $\dfrac{\pi rh\,dh}{\sqrt{r^2 + h^2}}$, (*b*) $\pi\left\{\dfrac{h^2 + 2r^2}{\sqrt{r^2 + h^2}} + 2r\right\}dr$

25. Hallar con cuatro cifras decimales (*a*) la raíz real de $x^3 + 3x + 1 = 0$, (*b*) la menor de las raíces de $e^{-x} = \text{sen}\,x$, (*c*) la raíz de $x^2 + \ln x = 2$, (*d*) la raíz de $x - \cos x = 0$. *Sol.* (*a*) —0,3222, (*b*) 0,5885, (*c*) 1,3141, (*d*) 0,7391.

Capítulo 24

Trazado de curvas

UNA CURVA ALGEBRAICA PLANA es aquella cuya ecuación puede escribirse en la forma general

$$ay^n + (bx + c)y^{n-1} + (dx^2 + ex + f)y^{n-2} + \cdots u_n(x) = 0$$

en donde $u_n(x)$ es un polinomio de grado n. Seguidamente veremos las propiedades de este tipo de curvas.

SIMETRIA. Una curva es simétrica con respecto a

(1) el eje x, si su ecuación no varía al cambiar y por $-y$;

(2) el eje y, si su ecuación no varía al cambiar x por $-x$;

(3) el origen, si la ecuación no varía al cambiar x por $-x$ e y por $-y$ simultáneamente;

(4) la recta $y = x$ (bisectriz del primer cuadrante), si la ecuación no varía al intercambiar x con y.

INTERSECCION CON LOS EJES. Los puntos de intersección con el eje x se obtienen despejando x en la ecuación $y = 0$. Los puntos de intersección con el eje y se obtienen despejando y en la ecuación $x = 0$.

CAMPO DE VARIACION. El *campo de variación horizontal* es el de la variable x, es decir los intervalos de x en los cuales está definida la función.

El *campo de variación vertical* es el de la función y.

Un punto (x_0, y_0) recibe el nombre de *punto aislado* de la curva si sus coordenadas satisfacen la ecuación de ésta, no sucediendo lo mismo con puntos infinitamente próximos a él.

MAXIMOS, MINIMOS, INFLEXION Y CONCAVIDAD. Ya se han estudiado en el Capítulo 8.

ASINTOTAS. La asíntota de una curva es una recta cuya posición viene definida por el límite de una secante cuando los dos de puntos de intersección se aproximan indefinidamente a lo largo de ella.

Una curva tiene *asíntotas verticales* cuando el coeficiente de la mayor potencia de y, escrita la ecuación en la forma anterior, es una función de x formada por uno o más factores lineales (reales). A cada uno de estos factores corresponde una asíntota vertical.

Una curva tiene *asíntotas horizontales* cuando el coeficiente de la mayor potencia de x, escrita la ecuación en la forma $ax^n + (by + c)x^{n-1} + (dy^2 + ey + f)x^{n-2} + \cdots = 0$, es una función de y formada por uno o más factores lineales (reales). Cada uno de estos factores corresponde a una asíntota horizontal.

Para obtener las ecuaciones de las *asíntotas oblicuas*:

(1) Se sustituye y por $mx + b$ en la ecuación de la curva y se ordena ésta en la forma

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

(2) Resolver el sistema de ecuaciones formado por $a_0 = 0$ y $a_1 = 0$, y hallar los valores de m y b.

(3) Para cada par de valores m y b se obtiene una asíntota de ecuación $y = mx + b$.

Si $a_1 = 0$, para hallar el valor de b se resuelve el sistema formado por $a_0 = 0$ y $a_2 = 0$ para obtener (3).

PUNTOS SINGULARES. Un *punto singular* de una curva algebraica es aquel para el cual la expresión dy/dx presenta la forma indeterminada 0/0.

Para hallar los puntos singulares de una curva se obtiene $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(x)}$ y, sin efectuar simplificaciones de factores comunes, se determinan las raíces comunes de $g(x) = 0$ y $h(x) = 0$.

Si (x_0, y_0) es un punto singular de la curva, se puede facilitar su estudio posterior efectuando los cambios $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$. En el nuevo sistema de coordenadas, el punto singular es el origen (0,0).

PUNTO SINGULAR EN EL ORIGEN. La ecuación de una curva que pasa por el origen se puede poner en la forma

$$(a_1x + b_1y) + (a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2) + (a_3x^3 + b_3x^2y + c_3xy^2 + d_3y^3) + \cdots = 0$$

Si $a_1 = b_1 = 0$ el origen es un punto singular de la curva.

Si $a_1 = b_1 = 0$ no siendo nulos a_2, b_2 y c_2 simultáneamente, el punto singular recibe el nombre de *punto doble*.

Si $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = c_2 = 0$, no siendo nulos a_3, b_3, c_3 y d_3 simultáneamente, el punto singular recibe el nombre de *punto triple* y así sucesivamente.

CLASIFICACION DE LOS PUNTOS DOBLES EN EL ORIGEN

A. $c_2 \neq 0$.

(1) Se sustituye y por mx en el término $a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2$, obteniéndose $(c_2m^2 + b_2m + a_2)x^2$.

(2) Se despeja m de la ecuación $c_2m^2 + b_2m + a_2 = 0$.

Si las raíces m_1 y m_2 son reales y distintas, la curva tiene dos tangentes, $y = m_1x$ e $y = m_2x$ en el origen y el punto doble recibe el nombre de *punto nodal.*

Si las raíces son reales e iguales, la curva tiene una tangente en el origen y el punto doble recibe el nombre de

(*a*) *retroceso*, siempre que la curva no continúe después del origen.

(*b*) *tacnodal*, siempre que la curva continúe después del origen.

En algún caso, el origen puede ser un punto aislado.

Si las raíces son imaginarias, el origen es un *punto doble aislado.*

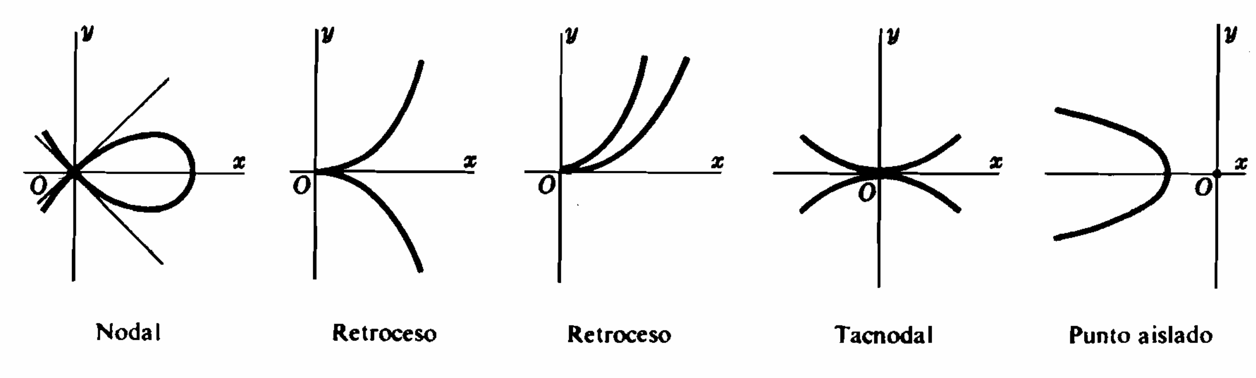


Fig. 24-1

B. $c_2 = 0$, $a_2 \neq 0$.

Se sustituye x por ny en el término $a_2x^2 + b_2xy$, y se procede como en *A*.

C. $a_2 = c_2 = 0$, $b_2 \neq 0$.

El origen es un punto nodal y las dos tangentes son los ejes coordenados.

Problemas resueltos

ASINTOTAS

1. Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la curva $y^2(1 + x) = x^2(1 - x)$.

El coeficiente de la mayor potencia de y es $(1 + x)$; la recta $x + 1 = 0$ es una asíntota vertical. No tiene asíntotas horizontales porque el coeficiente de la mayor potencia de x es una constante.

Para hallar las asíntotas oblicuas, sustituimos y por $mx + b$, obteniendo,

$$(m^2 + 1)x^3 + (m^2 + 2mb - 1)x^2 + b(b + 2m)x + b^2 = 0 \qquad (1)$$

Se resuelve ahora el sistema formado por las ecuaciones que resultan de igualar a cero los coeficientes de las dos potencias más altas de x

$$m^2 + 1 = 0 \quad \text{y} \quad m^2 + 2mb - 1 = 0$$

Como las soluciones de este sistema son imaginarias, no hay asíntotas oblicuas. (Ver Fig. 24-2.)

2. Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la curva $x^3 + y^3 - 6x^2 = 0$.

Carece de asíntotas horizontales y verticales, ya que los coeficientes de las potencias más altas de x e y son constantes.

Para hallar las asíntotas oblicuas, sustituimos y por $mx + b$, obteniendo,

$$(m^3 + 1)x^3 + 3(m^2b - 2)x^2 + 3mb^2x + b^3 = 0 \qquad (1)$$

Resolviendo el sistema formado por $m^3 + 1 = 0$ y $m^2b - 2 = 0$, resultan $m = -1$, $b = 2$. La ecuación de la asíntota oblicua es $y = -x + 2$.

Sustituyendo $m = -1$ y $b = 2$ en (1), la ecuación se transforma en $-12x + 8 = 0$. El punto $x = 2/3$ es la abscisa del punto de intersección de la curva con su asíntota. (Ver Fig. 24-3.)

3. Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la curva $y^2(x - 1) - x^3 = 0$.

El coeficiente de la más alta de y es $(x - 1)$; la recta $x - 1 = 0$ es una asíntota vertical. Carece de asíntotas horizontales.

Para hallar las asíntotas oblicuas, sustituimos y por $mx + b$, obteniendo,

$$(m^2 - 1)x^3 + m(2b - m)x^2 + b(b - 2m)x - b^2 = 0 \qquad (1)$$

Resolviendo el sistema formado por $m^2 - 1 = 0$ y $m(2b - m) = 0$, resultan $m = 1$, $b = \frac{1}{2}$ y $m = -1$, $b = -\frac{1}{2}$. Las ecuaciones de las asíntotas son $y = x + \frac{1}{2}$ e $y = -x - \frac{1}{2}$.

La asíntota $y = x + \frac{1}{2}$, corta a la curva en un punto cuya abscisa se obtiene de $\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 2)x - \frac{1}{4} = 0$, es decir, $x = -\frac{1}{3}$. La abscisa del punto de intersección de la curva y la asíntota $y = -x - \frac{1}{2}$ es igual a $-\frac{1}{3}$. (Ver Fig. 24-4.)

PUNTOS SINGULARES

4. Hallar los puntos singulares de la curva $y^2(1 + x) = x^2(1 - x)$.

Los términos de la potencia menor son de segundo grado; por tanto el origen es un punto doble.

Como $c_2 \neq 0$, esto es, hay término en y^2, sustituimos y por mx en $y^2 - x^2$ e igualamos a cero el coeficiente de x^2, obteniéndose $m^2 - 1 = 0$.

Así pues, $m = \pm 1$ y las rectas $y = x$ e $y = -x$ son tangentes a la curva en el origen. El origen es un modo. (Ver Fig. 24-2.)

5. Hallar los puntos singulares de la curva $x^3 + y^3 - 6x^2 = 0$.

El término de menor potencia es de segundo grado; por tanto, el origen es un punto doble.

Como $c_2 = 0$, sustituimos x por ny en el término de menor grado e igualamos a cero el coeficiente de y^2, obteniendo $n^2 = 0$. Hay una sola tangente, $x = 0$, a la curva en el origen.

El punto doble es de retroceso, ya que, cuando $y = -\xi$, la ecuación $x^3 - 6x^2 - \xi^3 = 0$ tiene, según la regla de los signos de Descartes, una raíz positiva y dos imaginarias, y en consecuencia, la curva no continúa después del origen. (Ver Fig. 24-3.)

6. Hallar los puntos singulares de la curva $y^2(x-1)-x^3=0$.

El término de menor potencia es de segundo grado; por tanto, el origen es un punto doble.

Como $c_2 \neq 0$, sustituimos y por mx en el término de menor grado e igualamos a cero el coeficiente de x^2, obteniendo $m^2=0$. El origen es un punto de retroceso, ya que aunque para $x<0$, y está definida, para $0<x<1$, y es imaginario. (Ver Fig. 24-4.)

7. Dada la función $y^2(x^2-4)=x^4$, hallar (*a*) los puntos singulares y (*b*) las asíntotas.

(*a*) El origen es un punto doble. Como $a_2=b_2=0$ y $c_2\neq 0$, el resultado de sustituir $y=mx$ e igualar a cero es $m^2=0$. El origen es un punto doble aislado, ya que cuando x tiende a 0, y es imaginario.

(*b*) Las rectas $x=2$ y $x=-2$ son asíntotas verticales.

Para hallar las asíntotas oblicuas, sustituimos y por $mx+b$; resulta,

$$(m^2-1)x^4+2mbx^3+(b^2-4m^2)x^2-8mbx-4b^2=0$$

Resolviendo el sistema $m^2-1=0$ y $mb=0$, se obtienen $m=1$, $b=0$ y $m=-1$, $b=0$. Las ecuaciones de las asíntotas son $y=x$ e $y=-x$. Las asíntotas oblicuas cortan a la curva en el origen. (Ver Fig. 24-5).

TRAZADO DE CURVAS

8. Estudiar y representar la curva $y^2(1+x)=x^2(1-x)$.

Simetría. La curva es simétrica con respecto al eje x.

Intersección con los ejes. Corta al eje x en $x=0$ y $x=1$. Corta al eje y en $y=0$.

Campo de variación. La curva está definida en el intervalo $-1<x\leqq 1$ y para todos los valores de y.

Máximos y mínimos, etc. La curva consta de dos ramas, $y=\dfrac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$ e $y=-\dfrac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$. Para la primera de ellas

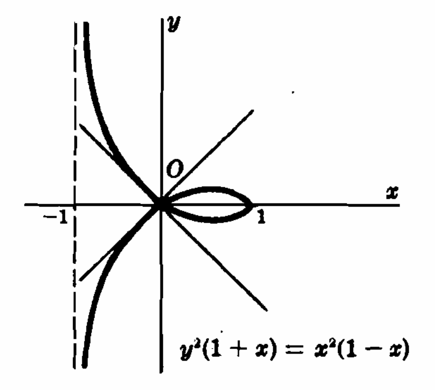


Fig. 24-2

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-x-x^2}{(1+x)^{3/2}(1-x)^{1/2}} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x-2}{(1+x)^{5/2}(1-x)^{3/2}}$$

Los valores críticos son $x=1$ y $(-1+\sqrt{5})/2$. El punto $\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{(-1+\sqrt{5})\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2}\right)$ es un mínimo.

No tiene puntos de inflexión. La rama es convexa.

Por simetría, hay un mínimo en $\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, -\dfrac{(-1+\sqrt{5})\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2}\right)$ y la segunda rama es convexa.

Asíntotas. La recta (ver Problema 1) $x=-1$ es una asíntota vertical.

Puntos singulares. El origen (ver Problema 4) es un punto nodal y las tangentes en él son las rectas $y=x$ e $y=-x$.

9. Estudiar y representar la curva $y^3-x^2(6-x)=0$. (Ver Figura 24-3.)

Simetría. Carece de simetría.

Intersección con los ejes. Los puntos de intersección $x=0$, $x=6$ e $y=0$.

Campo de variación. Está definida para todos los valores de x e y.

Máximos y mínimos, etc. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$.

Los valores críticos son $x=0, 4, 6$; el punto $(0,0)$ es un mínimo y $(4, 2\sqrt[3]{4})$ es un máximo. El punto $(6,0)$ es de inflexión; la curva es convexa a la izquierda y cóncava a la derecha.

Asíntotas. La recta (ver Problema 2) $y=-x+2$ es una asíntota.

Puntos singulares. El origen (ver Problema 5) es un punto de retroceso; la tangente en él es el eje y.

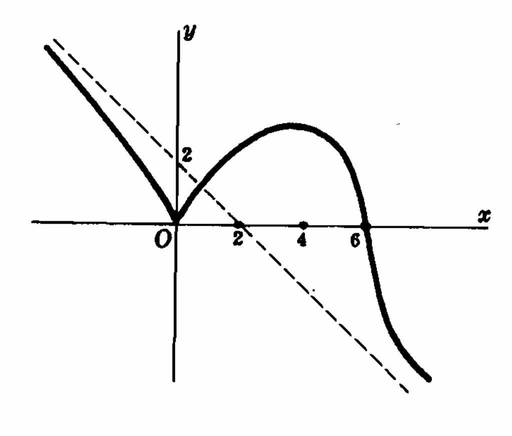


Fig. 24-3

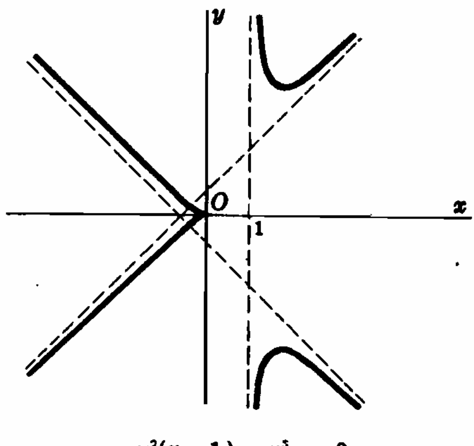


Fig. 24-4

10. Estudiar y representar la curva $y^2(x - 1) - x^3 = 0$. (Ver Fig. 24-4.)

Simetría. La curva es simétrica con respecto al eje x.

Intersección con los ejes. Los puntos de intersección son $x = 0$ e $y = 0$.

Campo de variación. La curva está definida en los intervalos $-\infty < x \leq 0$ y $x > 1$ y para todos los valores de y.

Máximos y mínimos, etc. Para la rama $y = x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x-3)x^{1/2}}{2(x-1)^{3/2}} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4x^{1/2}(x-1)^{5/2}}$$

Los valores críticos son $x = 0$ y $3/2$. El punto $(3/2, 3\sqrt{3}/2)$ es un mínimo. Carece de puntos de inflexión. La rama es cóncava. Por simetría, hay un máximo en el punto $(3/2, -3\sqrt{3}/2)$ sobre la rama $y = -x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ y esta rama es convexa.

Asíntotas. Las rectas $x = 1$, $y = x + \frac{1}{2}$, $y = -x - \frac{1}{2}$ son asíntotas. (Ver Problema 3.)

Puntos singulares. El origen es un punto de retroceso (ver Problema 6). La recta $y = 0$ es tangente en él.

11. Estudiar y representar la curva $y^2(x^2 - 4) = x^4$.

Simetría. La curva es simétrica con respecto a los ejes coordenados y respecto del origen.

Intersección con los ejes. Los puntos de intersección son $x = 0$ e $y = 0$.

Campo de variación. La curva está definida en los intervalos $-\infty < x < -2$ y $2 < x < +\infty$ y en los $-\infty < y \leqq -4$ y $4 \leqq y < +\infty$. El punto $(0, 0)$ es un punto aislado.

Máximos y mínimos, etc.

Para la rama $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$, $x > 2$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 8x}{(x^2-4)^{3/2}} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4x^2 + 32}{(x^2-4)^{5/2}}$$

El valor crítico es $x = 2\sqrt{2}$. La rama es cóncava y en el punto $(2\sqrt{2}, 4)$ tiene un mínimo.

Por simetría, hay un mínimo en el punto $(-2\sqrt{2}, 4)$ y máximos en los $(2\sqrt{2}, -4)$ y $(-2\sqrt{2}, -4)$.

Asíntotas, puntos singulares. Ver Problema 7.

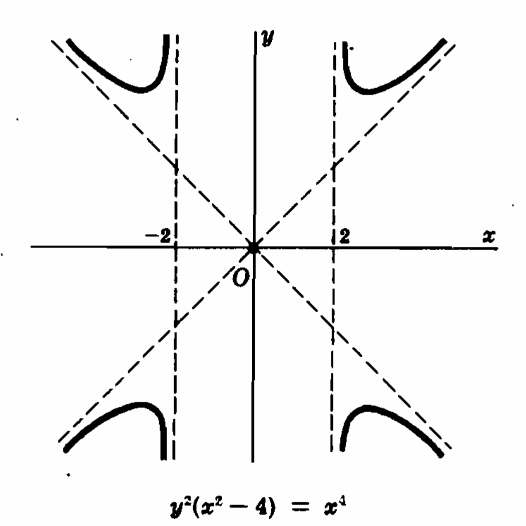


Fig. 24-5

12. Estudiar y representar la curva $(x + 3)(x^2 + y^2) = 4$.

Antes de comenzar a estudiar la curva, tratemos de averiguar si tiene algún punto singular. En caso afirmativo se hace una traslación de ejes de forma que el nuevo origen sea dicho punto.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x+2)(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})}{(x+3)^2 y}. \text{ Para } x = -2, y = 0$$

y $\frac{dy}{dx}$ presenta la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. El punto $(-2, 0)$ es un punto singular.

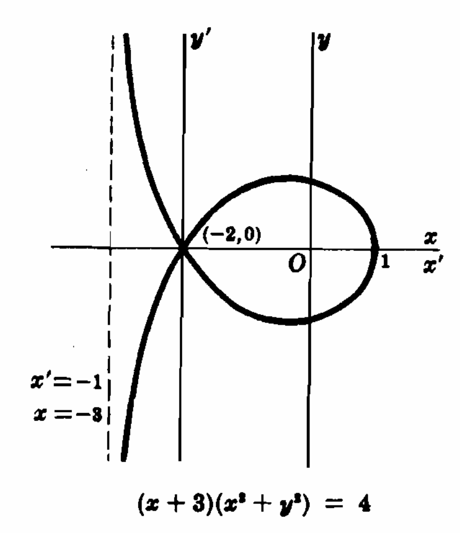
Haciendo el cambio de coordenadas $x = x' - 2$, $y = y'$, la ecuación dada se transforma en $y'^2(x' + 1) + x'^3 - 3x'^2 = 0$.

Simetría. La curva es simétrica con respecto al eje x'.

Intersección con los ejes. Los puntos de intersección son $x' = 0$, $x' = 3$, e $y' = 0$.

Campo de variación. La curva está definida en el intervalo $-1 < x' \leqq 3$ y para todos los valores de y'.

Máximos y mínimos, etc.



$(x + 3)(x^2 + y^2) = 4$

Fig. 24-6

Para la rama $y' = \frac{x'\sqrt{3 - x'}}{\sqrt{x' + 1}}$

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{3 - x'^2}{(3 - x')^{1/2}(x' + 1)^{3/2}} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{-12}{(3 - x')^{3/2}(x' + 1)^{5/2}}$$

Los valores críticos son $x' = \sqrt{3}$ y 3. El punto $(\sqrt{3}, \sqrt{6\sqrt{3} - 9})$ es un máximo. La rama es convexa.

Por simetría, $(\sqrt{3}, \sqrt{6\sqrt{3} - 9})$ es un mínimo de la otra rama que es cóncava.

Asíntotas. La recta $x' = -1$ es una asíntota vertical. Para hallar las asíntotas oblicuas, sustituimos y' por $mx' + b$, obteniendo $(m^2 + 1)x'^3 + \cdots = 0$. Carece de asíntotas oblicuas. ¿Por qué?

Puntos singulares. El origen es un punto doble. Cuando y' se sustituye por mx' en el término de menor grado, $y'^2 - 3x'^2$ resulta $(m^2 - 3)x'^2$. De $m^2 - 3 = 0$ se deduce $m = \pm\sqrt{3}$ y las tangentes (en punto nodal) son $y' = \pm\sqrt{3}x'$.

En el sistema inicial de coordenadas, $(\sqrt{3} - 2, \sqrt{6\sqrt{3} - 9})$ es un máximo y $(\sqrt{3} - 2, -\sqrt{6\sqrt{3} - 9})$ es un mínimo. La recta $x = -3$ es una asíntota vertical. El punto $(-2, 0)$ es un nodo, las ecuaciones de las tangentes, nodales son $y = \pm\sqrt{3}(x + 2)$.

Problemas propuestos

Estudiar y dibujar las curvas siguientes.

13. $(x - 2)(x - 6)y = 2x^2$

14. $x(3 - x^2)y = 1$

15. $(1 - x^2)y = x^4$

16. $xy = (x^2 - 9)^2$

17. $2xy = (x^2 - 1)^3$

18. $x(x^2 - 4)y = x^2 - 6$

19. $y^2 = x(x^2 - 4)$

20. $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$

21. $xy^2 = x^2 + 3x + 2$

22. $(x^2 - 2x - 3)y^2 = 2x + 3$

23. $x(x - 1)y = x^2 - 4$

24. $(x + 1)(x + 4)^2y^2 = x(x^2 - 4)$

25. $y^2 = 4x^2(4 - x^2)$

26. $y^2 = 5x^4 + 4x^5$

27. $y^3 = x^2(8 - x^2)$

28. $y^3 = x^2(3 - x)$

29. $(x^2 - 1)y^3 = x^2$

30. $(x - 3)y^3 = x^4$

31. $(x - 6)y^2 = x^2(x - 4)$

32. $(x^2 - 16)y^2 = x^3(x - 2)$

33. $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$

34. $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$

35. $y^4 - 4xy^2 = x^4$

36. $(x^2 + y^2)^3 = 4xy(x^2 - y^2)$

37. $y^2 = x(x - 3)^2$

38. $y^2 = x(x - 2)^3$

39. $3y^4 = x(x^2 - 9)^3$

40. $x^3y^3 = (x - 3)^2$

Capítulo 25

Fórmulas fundamentales de integración

UNA FUNCION $F(x)$ cuya derivada, en un cierto intervalo del eje x, $F'(x) = f(x)$, decimos que $F(x)$ es la primitiva o integral indefinida de $f(x)$. La integral indefinida de una función dada no es única; por ejemplo: x^2, $x^2 + 5$, $x^2 - 4$ son las primitivas o integrales indefinidas de $f(x) = 2x$ ya que $\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{d}{dx}(x^2 + 5) = \frac{d}{dx}(x^2 - 4) = 2x$. Todas las primitivas de $f(x) = 2x$ están representadas por la expresión $x^2 + C$, en la que C es una constante cualquiera y que se denomina *constante de integración*.

La primitiva o integral indefinida de la función $f(x)$ se representa por medio del símbolo $\int f(x)$ dx. Por ejemplo: $\int 2x\,dx = x^2 + C$.

FORMULAS FUNDAMENTALES DE INTEGRACION. Algunas de las expresiones que figuran a continuación se deducen de forma inmediata de las fórmulas de derivación vistas en capítulos anteriores. La fórmula 25 se puede comprobar teniendo en cuenta que

$$\frac{d}{du}\left\{\tfrac{1}{2}u\sqrt{a^2 - u^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a} + C\right\} = \sqrt{a^2 - u^2}$$

En algunas fórmulas aparece el signo de valor absoluto. Por ejemplo, escribimos

5. $$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

en lugar de

5(*a*). $\int \frac{du}{u} = \ln u + C, \quad u > 0$ 5(*b*). $\int \frac{du}{u} = \ln(-u) + C, \quad u < 0$

y

10. $$\int \operatorname{tag} u\,du = \ln|\sec u| + C$$

en lugar de

10(*a*). $\int \operatorname{tag} u\,du = \ln \sec u + C,$ siendo u tal que $\sec u \geq 1$

10(*b*). $\int \operatorname{tag} u\,du = \ln(-\sec u) + C,$ siendo u tal que $\sec u \leq -1$

1. $\int \frac{d}{dx}[f(x)]\,dx = f(x) + C$
2. $\int (u + v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$
3. $\int au\,dx = a\int u\,dx$, siendo a una constante
4. $\int u^m\,du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C, \quad m \neq -1$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
6. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$
7. $\int e^u\,du = e^u + C$
8. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$
9. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
10. $\int \operatorname{tag} u\,du = \ln|\sec u| + C$
11. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
12. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \operatorname{tag} u| + C$
13. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$
14. $\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tag} u + C$
15. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
16. $\int \sec u \operatorname{tag} u\,du = \sec u + C$

17. $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$

18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{arc sen}\,\frac{u}{a} + C$

19. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\,\text{arc tag}\,\frac{u}{a} + C$

20. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\,\text{arc sec}\,\frac{u}{a} + C$

21. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

22. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$

23. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln(u+\sqrt{u^2+a^2}) + C$

24. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

25. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2} + \frac{1}{2}a^2\,\text{arc sen}\,\frac{u}{a} + C$

26. $\int \sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2+a^2} + \frac{1}{2}a^2\ln(u+\sqrt{u^2+a^2}) + C$

27. $\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2-a^2} - \frac{1}{2}a^2\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

Problemas resueltos

1. $\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C$

2. $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$

3. $\int \sqrt[3]{z}\,dz = \int z^{1/3}\,dz = \frac{z^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{4}z^{4/3} + C$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int x^{-2/3}\,dx = \frac{x^{1/3}}{1/3} + C = 3x^{1/3} + C$

5. $\int (2x^2-5x+3)\,dx = 2\int x^2\,dx - 5\int x\,dx + 3\int dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x + C$

6. $\int (1-x)\sqrt{x}\,dx = \int (x^{1/2}-x^{3/2})\,dx = \int x^{1/2}\,dx - \int x^{3/2}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2} + C$

7. $\int (3s+4)^2\,ds = \int (9s^2+24s+16)\,ds = 9(\frac{1}{3}s^3) + 24(\frac{1}{2}s^2) + 16s + C = 3s^3 + 12s^2 + 16s + C$

8. $\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx = \int (x+5-4x^{-2})\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{4x^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{4}{x} + C$

9. Calcular: (*a*) $\int (x^3+2)^2\cdot 3x^2\,dx$, (*b*) $\int (x^3+2)^{1/2}x^2\,dx$, (*c*) $\int \frac{8x^2\,dx}{(x^3+2)^3}$, (*d*) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{(x^3+2)}}$.

Haciendo el cambio $x^3 + 2 = u$; tendremos $du = 3x^2\,dx$.

(*a*) $\int (x^3+2)^2\cdot 3x^2\,dx = \int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}(x^3+2)^3 + C$

(*b*) $\int (x^3+2)^{1/2}x^2\,dx = \frac{1}{3}\int (x^3+2)^{1/2}\cdot 3x^2\,dx = \frac{1}{3}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{9}(x^3+2)^{3/2} + C$

(*c*) $\int \frac{8x^2\,dx}{(x^3+2)^3} = 8\cdot\frac{1}{3}\int (x^3+2)^{-3}3x^2\,dx = \frac{8}{3}\int u^{-3}\,du = -\frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}u^{-2}\right) + C = -\frac{4}{3(x^3+2)^2} + C$

(*d*) $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}\,dx = \frac{1}{3}\int (x^3+2)^{-1/4}3x^2\,dx = \frac{1}{3}\int u^{-1/4}\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}u^{3/4} + C = \frac{4}{9}(x^3+2)^{3/4} + C$

10. Calcular $\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx$. Haciendo el cambio $1-2x^2 = u$; tendremos $du = -4x\,dx$.

$$\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx = 3\left(-\frac{1}{4}\right)\int (1-2x^2)^{1/2}(-4x\,dx) = -\frac{3}{4}\int u^{1/2}\,du$$
$$= -\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + C = -\frac{1}{2}(1-2x^2)^{3/2} + C$$

11. Calcular $\int \frac{(x+3)\,dx}{(x^2+6x)^{1/3}}$. Haciendo el cambio $x^2+6x = u$; tendremos $du = (2x+6)\,dx$.

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{(x^2+6x)^{1/3}} = \frac{1}{2}\int (x^2+6x)^{-1/3}(2x+6)\,dx = \frac{1}{2}\int u^{-1/3}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}u^{2/3} + C = \frac{3}{4}(x^2+6x)^{2/3} + C$$

12. $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-x^2}\, x\, dx \;=\; -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{1/3}(-2x\, dx) \;=\; -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}(1-x^2)^{4/3} + C \;=\; -\frac{3}{8}(1-x^2)^{4/3} + C$

13. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x^4}\, dx \;=\; \int (1-2x^2)^{1/2} x\, dx \;=\; -\frac{1}{4}\int (1-2x^2)^{1/2}(-4x\, dx)$

$\displaystyle\;=\; -\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(1-2x^2)^{3/2} + C \;=\; -\frac{1}{6}(1-2x^2)^{3/2} + C$

14. $\displaystyle\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}\, dx \;=\; \int \frac{1+2x+x^2}{x^{1/2}}\, dx \;=\; \int (x^{-1/2} + 2x^{1/2} + x^{3/2})\, dx \;=\; 2x^{1/2} + \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{2}{5}x^{5/2} + C$

15. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\, dx \;=\; \int \left\{1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right\} dx \;=\; x + \frac{1}{x+1} + C' \;=\; \frac{x^2}{x+1} + 1 + C' \;=\; \frac{x^2}{x+1} + C$

FORMULAS 5-7

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} \;=\; \ln|x| + C$ 17. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+2} \;=\; \int \frac{d(x+2)}{x+2} \;=\; \ln|x+2| + C$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x-3} \;=\; \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} \;=\; \frac{1}{2}\ln|u| + C \;=\; \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C,$ siendo $u = 2x-3$ y $du = 2\,dx$, o

$\displaystyle\int \frac{dx}{2x-3} \;=\; \frac{1}{2}\int \frac{d(2x-3)}{2x-3} \;=\; \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C$

19. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{x^2-1} \;=\; \frac{1}{2}\int \frac{2x\, dx}{x^2-1} \;=\; \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C \;=\; \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \ln c \;=\; \ln c\sqrt{|x^2-1|}$

20. $\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{1-2x^3} \;=\; -\frac{1}{6}\int \frac{-6x^2\, dx}{1-2x^3} \;=\; -\frac{1}{6}\ln|1-2x^3| + C \;=\; \ln\frac{c}{\sqrt[6]{|1-2x^3|}}$

21. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x+1}\, dx \;=\; \int \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) dx \;=\; x + \ln|x+1| + C$

22. $\displaystyle\int e^{-x}\, dx \;=\; -\int e^{-x}(-\,dx) \;=\; -e^{-x} + C$ 24. $\displaystyle\int e^{3x}\, dx \;=\; \frac{1}{3}\int e^{3x}(3\, dx) \;=\; \frac{e^{3x}}{3} + C$

23. $\displaystyle\int a^{2x}\, dx \;=\; \frac{1}{2}\int a^{2x}(2\, dx) \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{a^{2x}}{\ln a}\right) + C$ 25. $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}\, dx}{x^2} \;=\; -\int e^{1/x}\left(-\frac{dx}{x^2}\right) \;=\; -e^{1/x} + C$

26. $\displaystyle\int (e^x+1)^3 e^x\, dx \;=\; \int u^3\, du \;=\; \frac{u^4}{4} + C \;=\; \frac{(e^x+1)^4}{4} + C$ siendo $u = e^x+1$ y $du = e^x\, dx$, o

$\displaystyle\int (e^x+1)^3 e^x\, dx \;=\; \int (e^x+1)^3\, d(e^x+1) \;=\; \frac{(e^x+1)^4}{4} + C$

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1} \;=\; \int \frac{e^{-x}\, dx}{1+e^{-x}} \;=\; -\int \frac{-e^{-x}\, dx}{1+e^{-x}} \;=\; -\ln(1+e^{-x}) + C \;=\; \ln\frac{e^x}{1+e^x} + C$

$\;=\; x - \ln(1+e^x) + C$

El signo de valor absoluto no se precisa aquí, ya que $1 + e^{-x} > 0$ para todos los valores de x.

FORMULAS 8-17

28. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}x\, dx \;=\; 2\int \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}x \cdot \tfrac{1}{2}dx \;=\; -2\cos\tfrac{1}{2}x + C$

29. $\displaystyle\int \cos 3x\, dx \;=\; \frac{1}{3}\int \cos 3x \cdot 3\, dx \;=\; \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + C$

30. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx \;=\; \int \operatorname{sen}^2 x\,(\cos x\, dx) \;=\; \int \operatorname{sen}^2 x\, d(\operatorname{sen} x) \;=\; \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$

31. $\displaystyle\int \operatorname{tag} x\, dx \;=\; \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx \;=\; -\int \frac{-\operatorname{sen} x\, dx}{\cos x} \;=\; -\ln|\cos x| + C \;=\; \ln|\sec x| + C$

32. $\displaystyle\int \operatorname{tag} 2x\, dx \;=\; \frac{1}{2}\int \operatorname{tag} 2x \cdot 2\, dx \;=\; \frac{1}{2}\ln|\sec 2x| + C$

33. $\displaystyle\int x \cot x^2\, dx \;=\; \frac{1}{2}\int \cot x^2 \cdot 2x\, dx \;=\; \frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen} x^2| + C$

34. $\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x\,(\sec x + \operatorname{tag} x)}{\sec x + \operatorname{tag} x}\,dx = \int \frac{\sec x \operatorname{tag} x + \sec^2 x}{\sec x + \operatorname{tag} x}\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tag} x| + C$

35. $\int \sec\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int \sec x^{1/2}\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}\,dx = 2\ln|\sec\sqrt{x} + \operatorname{tag}\sqrt{x}| + C$

36. $\int \sec^2 2ax\,dx = \frac{1}{2a}\int \sec^2 2ax\cdot 2a\,dx = \frac{\operatorname{tag} 2ax}{2a} + C$

37. $\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x}\,dx = \int (\operatorname{tag} x + 1)\,dx = \ln|\sec x| + x + C$

38. $\int \frac{\operatorname{sen} y\,dy}{\cos^2 y} = \int \operatorname{tag} y \sec y\,dy = \sec y + C$

39. $\int (1 + \operatorname{tag} x)^2\,dx = \int (1 + 2\operatorname{tag} x + \operatorname{tag}^2 x)\,dx = \int (\sec^2 x + 2\operatorname{tag} x)\,dx$

$= \operatorname{tag} x + 2\ln|\sec x| + C$

40. $\int e^x \cos e^x\,dx = \int \cos e^x\cdot e^x\,dx = \operatorname{sen} e^x + C$

41. $\int e^{3\cos 2x}\operatorname{sen} 2x\,dx = -\frac{1}{6}\int e^{3\cos 2x}(-6\operatorname{sen} 2x\,dx) = -\frac{e^{3\cos 2x}}{6} + C$

42. $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int (\csc^2 x - \cot x \csc x)\,dx$

$= -\cot x + \csc x + C$

43. $\int (\operatorname{tag} 2x + \sec 2x)^2\,dx = \int (\operatorname{tag}^2 2x + 2\operatorname{tag} 2x \sec 2x + \sec^2 2x)\,dx$

$= \int (2\sec^2 2x + 2\operatorname{tag} 2x\sec 2x - 1)\,dx = \operatorname{tag} 2x + \sec 2x - x + C$

44. $\int \csc u\,du = \int \frac{du}{\operatorname{sen} u} = \int \frac{du}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}u\cos\frac{1}{2}u} = \int \frac{\sec^2\frac{1}{2}u\cdot\frac{1}{2}du}{\operatorname{tag}\frac{1}{2}u} = \ln|\operatorname{tag}\frac{1}{2}u| + C$

45. $\int (\sec 4x - 1)^2\,dx = \int (\sec^2 4x - 2\sec 4x + 1)\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{tag} 4x - \frac{1}{2}\ln|\sec 4x + \operatorname{tag} 4x| + x + C$

46. $\int \frac{\sec x \operatorname{tag} x\,dx}{a + b\sec x} = \frac{1}{b}\int \frac{\sec x\operatorname{tag} x\cdot b\,dx}{a + b\sec x} = \frac{1}{b}\ln|a + b\sec x| + C$

47. $\int \frac{dx}{\csc 2x - \cot 2x} = \int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{1-\cos 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{sen} 2x\cdot 2\,dx}{1-\cos 2x} = \frac{1}{2}\ln(1-\cos 2x) + C'$

$= \frac{1}{2}\ln(2\operatorname{sen}^2 x) + C' = \frac{1}{2}(\ln 2 + 2\ln|\operatorname{sen} x|) + C' = \ln|\operatorname{sen} x| + C$

FORMULAS 18-20

48. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C$

49. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tag} x + C$

50. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc\,sec} x + C$

51. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{2} + C$

52. $\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tag}\frac{x}{3} + C$

53. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{4\,dx}{\sqrt{5^2-(4x)^2}} = \frac{1}{4}\operatorname{arc\,sen}\frac{4x}{5} + C$

54. $\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{(2x)^2+3^2} = \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tag}\frac{2x}{3} + C$

55. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}} = \int \frac{2\,dx}{2x\sqrt{(2x)^2-3^2}} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,sec}\frac{2x}{3} + C$

56. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^6}} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\,dx}{\sqrt{1-(x^3)^2}} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,sen} x^3 + C$

57. $\int \frac{x\,dx}{x^4+3} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{(x^2)^2+3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tag}\frac{x^2}{\sqrt{3}} + C = \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arc\,tag}\frac{x^2\sqrt{3}}{3} + C$

58. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2\sqrt{(x^2)^2-1}} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sec} x^2 + C = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{x^2} + C$

59. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+2)^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{x+2}{2} + C$

60. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} = \operatorname{arc\,tag} e^x + C$

61. $\displaystyle\int \frac{3x^3-4x^2+3x}{x^2+1}dx = \int\left(3x-4+\frac{4}{x^2+1}\right)dx = \frac{3x^2}{2} - 4x + 4\operatorname{arc\,tag} x + C$

62. $\displaystyle\int \frac{\sec x \operatorname{tag} x\,dx}{9+4\sec^2 x} = \frac{1}{2}\int \frac{2\sec x \operatorname{tag} x\,dx}{3^2+(2\sec x)^2} = \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tag}\frac{2\sec x}{3} + C$

63. $\displaystyle\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + 3\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + 3\operatorname{arc\,sen} x + C$

64. $\displaystyle\int \frac{(2x-7)\,dx}{x^2+9} = \int \frac{2x\,dx}{x^2+9} - 7\int\frac{dx}{x^2+9} = \ln(x^2+9) - \frac{7}{3}\operatorname{arc\,tag}\frac{x}{3} + C$

65. $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2+10y+30} = \int \frac{dy}{(y^2+10y+25)+5} = \int\frac{dy}{(y+5)^2+5} = \frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arc\,tag}\frac{(y+5)\sqrt{5}}{5} + C$

66. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{36-(x^2-8x+16)}} = \int\frac{dx}{\sqrt{36-(x-4)^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{x-4}{6} + C$

67. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+2x+5} = \int \frac{2\,dx}{4x^2+4x+10} = \int\frac{2\,dx}{(2x+1)^2+9} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tag}\frac{2x+1}{3} + C$

68. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2-4x+8}dx = \frac{1}{2}\int\frac{(2x-4)+6}{x^2-4x+8}dx = \frac{1}{2}\int\frac{(2x-4)\,dx}{x^2-4x+8} + 3\int\frac{dx}{x^2-4x+8}$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\int\frac{(2x-4)\,dx}{x^2-4x+8} + 3\int\frac{dx}{(x-2)^2+4} = \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+8) + \frac{3}{2}\operatorname{arc\,tag}\frac{x-2}{2} + C$

El signo de valor absoluto no se precisa aquí, ya que $x^2 - 4x + 8 > 0$ para todos los valores de x.

69. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{28-12x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{64-(x^2+12x+36)}} = \int\frac{dx}{\sqrt{64-(x+6)^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{x+6}{8} + C$

70. $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int\frac{-2x-6}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int\frac{(-2x-4)-2}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$

$\displaystyle = -\frac{1}{2}\int\frac{-2x-4}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx + \int\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$

$\displaystyle = -\frac{1}{2}\int\frac{-2x-4}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx + \int\frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}$

$\displaystyle = -\sqrt{5-4x-x^2} + \operatorname{arc\,sen}\frac{x+2}{3} + C$

71. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{9x^2-12x+8}dx = \frac{1}{9}\int\frac{18x+27}{9x^2-12x+8}dx = \frac{1}{9}\int\frac{(18x-12)+39}{9x^2-12x+8}dx$

$\displaystyle = \frac{1}{9}\int\frac{18x-12}{9x^2-12x+8}dx + \frac{13}{3}\int\frac{dx}{(3x-2)^2+4}$

$\displaystyle = \frac{1}{9}\ln(9x^2-12x+8) + \frac{13}{18}\operatorname{arc\,tag}\frac{3x-2}{2} + C$

72. $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int\frac{-2x-4}{\sqrt{4x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int\frac{(-2x+4)-8}{\sqrt{4x-x^2}}dx$

$\displaystyle = -\frac{1}{2}\int\frac{4-2x}{\sqrt{4x-x^2}}dx + 4\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = -\sqrt{4x-x^2} + 4\operatorname{arc\,sen}\frac{x-2}{2} + C$

FORMULAS 21-24

73. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

74. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

75. $\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$

76. $\int \frac{dx}{9-x^2} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right| + C$

77. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$

78. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C$

79. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{\sqrt{(2x)^2+3^2}} = \frac{1}{2}\ln(2x+\sqrt{4x^2+9}) + C$

80. $\int \frac{dz}{\sqrt{9z^2-25}} = \frac{1}{3}\int \frac{3\,dz}{\sqrt{9z^2-25}} = \frac{1}{3}\ln|3z+\sqrt{9z^2-25}| + C$

81. $\int \frac{dx}{9x^2-16} = \frac{1}{3}\int \frac{3\,dx}{(3x)^2-16} = \frac{1}{24}\ln\left|\frac{3x-4}{3x+4}\right| + C$

82. $\int \frac{dy}{25-16y^2} = \frac{1}{4}\int \frac{4\,dy}{25-(4y)^2} = \frac{1}{40}\ln\left|\frac{5+4y}{5-4y}\right| + C$

83. $\int \frac{dx}{x^2+6x+8} = \int \frac{dx}{(x+3)^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+3)-1}{(x+3)+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+2}{x+4}\right| + C$

84. $\int \frac{dx}{4x-x^2} = \int \frac{dx}{4-(x-2)^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+(x-2)}{2-(x-2)}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{4-x}\right| + C$

85. $\int \frac{ds}{\sqrt{4s+s^2}} = \int \frac{ds}{\sqrt{(s+2)^2-4}} = \ln|s+2+\sqrt{4s+s^2}| + C$

86. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{x^2+9}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$

$= \sqrt{x^2+9} + 2\ln(x+\sqrt{x^2+9}) + C$

87. $\int \frac{2x-3}{4x^2-11}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{8x-12}{4x^2-11}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{8x\,dx}{4x^2-11} - \frac{3}{2}\int \frac{2\,dx}{4x^2-11}$

$= \frac{1}{4}\ln|4x^2-11| - \frac{3\sqrt{11}}{44}\ln\left|\frac{2x-\sqrt{11}}{2x+\sqrt{11}}\right| + C$

88. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-4}}$

$= \sqrt{x^2+2x-3} + \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}| + C$

89. $\int \frac{2-x}{4x^2+4x-3}\,dx = -\frac{1}{8}\int \frac{8x-16}{4x^2+4x-3}\,dx = -\frac{1}{8}\int \frac{8x+4}{4x^2+4x-3}\,dx + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(2x+1)^2-4}$

$= -\frac{1}{8}\ln|4x^2+4x-3| + \frac{5}{16}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+3}\right| + C$

FORMULAS 25-27

90. $\int \sqrt{25-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{25-x^2} + \frac{25}{2}\text{arc sen}\,\frac{x}{5} + C$

91. $\int \sqrt{3-4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{3-4x^2}\cdot 2\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{2}\sqrt{3-4x^2} + \frac{3}{2}\text{arc sen}\,\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C$

$= \frac{1}{2}x\sqrt{3-4x^2} + \frac{3}{4}\text{arc sen}\,\frac{2x\sqrt{3}}{3} + C$

92. $\int \sqrt{x^2-36}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-36} - 18\ln|x+\sqrt{x^2-36}| + C$

93. $\int \sqrt{3x^2+5}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \sqrt{3x^2+5}\cdot\sqrt{3}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}x\sqrt{3x^2+5} + \frac{5}{2}\ln(\sqrt{3}\,x + \sqrt{3x^2+5})\right] + C$

$= \frac{1}{2}x\sqrt{3x^2+5} + \frac{5\sqrt{3}}{6}\ln(\sqrt{3}\,x + \sqrt{3x^2+5}) + C$

94. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2}\,dx = \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + 2\,\text{arc sen}\,\frac{x+1}{2} + C$

95. $\int \sqrt{4x^2-4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{(2x-1)^2+4}\cdot 2\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{2x-1}{2}\sqrt{4x^2-4x+5} + 2\ln(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+5})\right] + C$

$= \frac{2x-1}{4}\sqrt{4x^2-4x+5} + \ln(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+5}) + C$

Problemas propuestos

Comprobar las siguientes integraciones.

96. $\int (4x^3+3x^2+2x+5)\,dx = x^4 + x^3 + x^2 + 5x + C$

97. $\int (3-2x-x^4)\,dx = 3x - x^2 - x^5/5 + C$

98. $\int (2-3x+x^3)\,dx = 2x - 3x^2/2 + x^4/4 + C$

99. $\int (x^2-1)^2\,dx = x^5/5 - 2x^3/3 + x + C$

100. $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{2}x + 2/\sqrt{x})\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}x^2 + 4x^{1/2} + C$

101. $\int (a+x)^3\,dx = \frac{1}{4}(a+x)^4 + C$

102. $\int (x-2)^{3/2}\,dx = \frac{2}{5}(x-2)^{5/2} + C$

103. $\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + C$

104. $\int \frac{dx}{(x-1)^3} = -\frac{1}{2(x-1)^2} + C$

105. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}} = 2\sqrt{x+3} + C$

106. $\int \sqrt{3x-1}\,dx = \frac{2}{9}(3x-1)^{3/2} + C$

107. $\int \sqrt{2-3x}\,dx = -\frac{2}{9}(2-3x)^{3/2} + C$

108. $\int (2x^2+3)^{1/3}x\,dx = \frac{3}{16}(2x^2+3)^{4/3} + C$

109. $\int (x-1)^2x\,dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$

110. $\int (x^2-1)x\,dx = \frac{1}{4}(x^2-1)^2 + C$

111. $\int \sqrt{1+y^4}\,y^3\,dy = \frac{1}{6}(1+y^4)^{3/2} + C$

112. $\int (x^3+3)x^2\,dx = \frac{1}{6}(x^3+3)^2 + C$

113. $\int (4-x^2)^2x^2\,dx = \frac{16}{3}x^3 - \frac{8}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + C$

114. $\int \frac{dy}{(2-y)^3} = \frac{1}{2(2-y)^2} + C$

115. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+4)^3} = -\frac{1}{4(x^2+4)^2} + C$

116. $\int (1-x^3)^2\,dx = x - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{7}x^7 + C$

117. $\int (1-x^3)^2x\,dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{8}x^8 + C$

118. $\int (1-x^3)^2x^2\,dx = -\frac{1}{9}(1-x^3)^3 + C$

119. $\int (x^2-x)^4(2x-1)\,dx = \frac{1}{5}(x^2-x)^5 + C$

120. $\int \frac{3t\,dt}{\sqrt[3]{t^2+3}} = \frac{9}{4}(t^2+3)^{2/3} + C$

121. $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x-4}} = \sqrt{x^2+2x-4} + C$

122. $\int \frac{dx}{(a+bx)^{1/3}} = \frac{3}{2b}(a+bx)^{2/3} + C$

123. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3 + C$

124. $\int \sqrt{x}\,(3-5x)\,dx = 2x^{3/2}(1-x) + C$

125. $\int \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{2}{3}x^{3/2} - 4x^{1/2} + C$

126. $\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C$

127. $\int \frac{dx}{3x+1} = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C$

128. $\int \frac{3x\,dx}{x^2+2} = \frac{3}{2}\ln(x^2+2) + C$

129. $\int \frac{x^2\,dx}{1-x^3} = -\frac{1}{3}\ln|1-x^3| + C$

130. $\int \frac{x-1}{x+1}\,dx = x - 2\ln|x+1| + C$

131. $\int \frac{x^2+2x+2}{x+2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x+2| + C$

132. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + C$

133. $\int \left(\frac{dx}{2x-1} - \frac{dx}{2x+1}\right) = \ln\sqrt{\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|} + C$

134. $\int a^{4x}\,dx = \frac{1}{4}\frac{a^{4x}}{\ln a} + C$

135. $\int e^{4x}\,dx = \frac{1}{4}e^{4x} + C$

136. $\int \frac{e^{1/x^2}}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2}e^{1/x^2} + C$

137. $\int e^{-x^2+2}x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2+2} + C$

138. $\int x^2e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$

139. $\int (e^x+1)^2\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + C$

140. $\int (e^x - x^e)\,dx = e^x - \frac{x^{e+1}}{e+1} + C$

141. $\int (e^x+1)^2e^x\,dx = \frac{1}{3}(e^x+1)^3 + C$

142. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+3) + C$

143. $\int \left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)^2 dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2e^{2x}} + C$

144. $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = \ln(e^x+1)^2 - x + C$

145. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+3}\,dx = \ln(e^{2x}+3)^{2/3} - \frac{1}{3}x + C$

146. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} = \ln\frac{C}{(1-\sqrt{x})^2},\quad C>0$

147. $\int \frac{dx}{x+x^{1/3}} = \frac{3}{2}\ln C(x^{2/3}+1),\quad C>0$

148. $\int \operatorname{sen} 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

149. $\int \cos\frac{1}{2}x\,dx = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x + C$

150. $\int \sec 3x\,\operatorname{tag} 3x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{tag} 3x + C$

151. $\int \csc^2 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cot 2x + C$

152. $\int x\sec^2 x^2\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{tag} x^2 + C$

153. $\int \operatorname{tag}^2 x\,dx = \operatorname{tag} x - x + C$

154. $\int \operatorname{tag}\frac{1}{2}x\,dx = 2\ln|\sec\frac{1}{2}x| + C$

155. $\int \csc 3x\,dx = \frac{1}{3}\ln|\csc 3x - \cot 3x| + C$

156. $\int b\sec ax\,\operatorname{tag} ax\,dx = \frac{b}{a}\sec ax + C$

157. $\int (\cos x - \operatorname{sen} x)^2\,dx = x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$

158. $\int \operatorname{sen} ax\cos ax\,dx = \frac{1}{2a}\operatorname{sen}^2 ax + C$

$= -\frac{1}{2a}\cos^2 ax + C' = -\frac{1}{4a}\cos 2ax + K$

159. $\int \operatorname{sen}^3 x\cos x\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x + C$

160. $\int \cos^4 x\operatorname{sen} x\,dx = -\frac{1}{5}\cos^5 x + C$

161. $\int \operatorname{tag}^5 x\sec^2 x\,dx = \frac{1}{6}\operatorname{tag}^6 x + C$

162. $\int \cot^4 3x\csc^2 3x\,dx = -\frac{1}{15}\cot^5 3x + C$

163. $\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen}\frac{1}{2}x} = 2(\operatorname{tag}\frac{1}{2}x + \sec\frac{1}{2}x) + C$

164. $\int \frac{dx}{1+\cos 3x} = \frac{1-\cos 3x}{3\operatorname{sen} 3x} + C$

165. $\int \frac{dx}{1+\sec ax} = x + \frac{1}{a}(\cot ax - \csc ax) + C$

166. $\int \sec^2\frac{x}{a}\operatorname{tag}\frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{2}a\operatorname{tag}^2\frac{x}{a} + C$

167. $\int \frac{\sec^2 3x}{\operatorname{tag} 3x}\,dx = \frac{1}{3}\ln|\operatorname{tag} 3x| + C$

168. $\int \frac{\sec^5 x}{\csc x}\,dx = \frac{1}{4}\sec^4 x + C$

169. $\int e^{\operatorname{tag} 2x} \sec^2 2x \, dx = \frac{1}{2} e^{\operatorname{tag} 2x} + C$

170. $\int e^{2 \operatorname{sen} 3x} \cos 3x \, dx = \frac{1}{6} e^{2 \operatorname{sen} 3x} + C$

171. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{x\sqrt{5}}{5} + C$

172. $\int \frac{dx}{5 + x^2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{arc\,tag} \frac{x\sqrt{5}}{5} + C$

173. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{arc\,sec} \frac{x\sqrt{5}}{5} + C$

174. $\int \frac{e^x \, dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}} = \operatorname{arc\,sen} e^x + C$

175. $\int \frac{e^{2x} \, dx}{1 + e^{4x}} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tag} e^{2x} + C$

176. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}} = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,sen} \frac{3x}{2} + C$

177. $\int \frac{dx}{9x^2 + 4} = \frac{1}{6} \operatorname{arc\,tag} \frac{3x}{2} + C$

178. $\int \frac{\operatorname{sen} 8x}{9 + \operatorname{sen}^4 4x} \, dx = \frac{1}{12} \operatorname{arc\,tag} \frac{\operatorname{sen}^2 4x}{3} + C$

179. $\int \frac{\sec^2 x \, dx}{\sqrt{1 - 4 \operatorname{tag}^2 x}} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} (2 \operatorname{tag} x) + C$

180. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4 - 9 \ln^2 x}} = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,sen} \ln x^{3/2} + C$

181. $\int \frac{2x^4 - x^2}{2x^2 + 1} \, dx = \frac{1}{3} x^3 - x + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arc\,tag} x\sqrt{2} + C$

182. $\int \frac{\cos 2x \, dx}{\operatorname{sen}^2 2x + 8} = \frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arc\,tag} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2\sqrt{2}} + C$

183. $\int \frac{(2x - 3) \, dx}{x^2 + 6x + 13} = \int \frac{(2x + 6) \, dx}{x^2 + 6x + 13} - 9 \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13} = \ln (x^2 + 6x + 13) - \frac{9}{2} \operatorname{arc\,tag} \frac{x + 3}{2} + C$

184. $\int \frac{(x - 1) \, dx}{3x^2 - 4x + 3} = \frac{1}{6} \int \frac{(6x - 4) \, dx}{3x^2 - 4x + 3} - \int \frac{dx}{9x^2 - 12x + 9} = \frac{1}{6} \ln (3x^2 - 4x + 3) - \frac{\sqrt{5}}{15} \operatorname{arc\,tag} \frac{3x - 2}{\sqrt{5}} + C$

185. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{27 + 6x - x^2}} = -\sqrt{27 + 6x - x^2} + 3 \operatorname{arc\,sen} \frac{x - 3}{6} + C$

186. $\int \frac{(5 - 4x) \, dx}{\sqrt{12x - 4x^2 - 8}} = \sqrt{12x - 4x^2 - 8} - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} (2x - 3) + C$

187. $\int \frac{dx}{x^2 - 4} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| + C$

188. $\int \frac{dx}{4x^2 - 9} = \frac{1}{12} \ln \left| \frac{2x - 3}{2x + 3} \right| + C$

189. $\int \frac{dx}{9 - x^2} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x + 3}{x - 3} \right| + C$

190. $\int \frac{dx}{25 - 9x^2} = \frac{1}{30} \ln \left| \frac{3x + 5}{3x - 5} \right| + C$

191. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} = \ln (x + \sqrt{x^2 + 4}) + C$

192. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 25}} = \frac{1}{2} \ln | 2x + \sqrt{4x^2 - 25} | + C$

193. $\int \sqrt{16 - 9x^2} \, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{16 - 9x^2} + \frac{8}{3} \operatorname{arc\,sen} \frac{3x}{4} + C$

194. $\int \sqrt{x^2 - 16} \, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 - 16} - 8 \ln | x + \sqrt{x^2 - 16} | + C$

195. $\int \sqrt{4x^2 + 9} \, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{4x^2 + 9} + \frac{9}{4} \ln (2x + \sqrt{4x^2 + 9}) + C$

196. $\int \sqrt{x^2 - 2x - 3} \, dx = \frac{1}{2}(x - 1) \sqrt{x^2 - 2x - 3} - 2 \ln | x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x - 3} | + C$

197. $\int \sqrt{12 + 4x - x^2} \, dx = \frac{1}{2}(x - 2) \sqrt{12 + 4x - x^2} + 8 \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{4}(x - 2) + C$

198. $\int \sqrt{x^2 + 4x} \, dx = \frac{1}{2}(x + 2) \sqrt{x^2 + 4x} - 2 \ln | x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x} | + C$

199. $\int \sqrt{x^2 - 8x} \, dx = \frac{1}{2}(x - 4) \sqrt{x^2 - 8x} - 8 \ln | x - 4 + \sqrt{x^2 - 8x} | + C$

200. $\int \sqrt{6x - x^2} \, dx = \frac{1}{2} (x - 3) \sqrt{6x - x^2} + \frac{9}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{x - 3}{3} + C$

Capítulo 26

Integración por partes

INTEGRACION POR PARTES. Sean u y v funciones derivables de x. En estas condiciones,

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$
$$u\,dv = d(uv) - v\,du$$

(i) $$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Para aplicar (i) en la práctica, se separa el integrando en dos partes; una de ellas se iguala a u y la otra, junto con dx, a dv. (Por esta razón, este método se denomina *integración por partes.*) Es conveniente tener en cuenta los dos criterios siguientes:

(a) La parte que se iguala a dv debe ser fácilmente integrable.

(b) $\int v\,du$ no debe ser más complicada que $\int u\,dv$.

Ejemplo 1: Calcular $\int x^3 e^{x^2}\,dx$.

Hacemos $u = x^2$ y $dv = e^{x^2} x\,dx$; de donde $du = 2x\,dx$ y $v = \frac{1}{2}e^{x^2}$. Aplicando la fórmula

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \int x\,e^{x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \tfrac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Ejemplo 2: Calcular $\int \ln(x^2+2)\,dx$.

Hacemos $u = \ln(x^2+2)$ y $dv = dx$; de donde $du = \dfrac{2x\,dx}{x^2+2}$ y $v = x$. Por tanto,

$$\int \ln(x^2+2)\,dx = x\ln(x^2+2) - \int \frac{2x^2\,dx}{x^2+2} = x\ln(x^2+2) - \int\left(2 - \frac{4}{x^2+2}\right)dx$$
$$= x\ln(x^2+2) - 2x + 2\sqrt{2}\ \text{arc tag}\ x/\sqrt{2} + C$$

(Ver Problemas 1-10.)

FORMULAS DE REDUCCION. Las *fórmulas de reducción* permiten simplificar el cálculo cuando se haya de aplicar la integración por partes varias veces consecutivas. (Ver Problema 9.) En general, una fórmula de reducción es aquella que da lugar a una nueva integral de la misma forma que la original, pero con un exponente mayor o menor. Una fórmula de reducción es útil si, finalmente, conduce a una integral que se pueda calcular fácilmente. Algunas de las fórmulas más corrientes de reducción son:

(A) $$\int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^m} = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{u}{(2m-2)(a^2 \pm u^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^{m-1}}\right\}, \quad m \neq 1$$

(B) $$\int (a^2 \pm u^2)^m\,du = \frac{u(a^2 \pm u^2)^m}{2m+1} + \frac{2ma^2}{2m+1}\int (a^2 \pm u^2)^{m-1}\,du, \quad m \neq -1/2$$

(C) $$\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^m} = -\frac{1}{a^2}\left\{\frac{u}{(2m-2)(u^2 - a^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{m-1}}\right\}, \quad m \neq 1$$

(D) $$\int (u^2 - a^2)^m\,du = \frac{u(u^2 - a^2)^m}{2m+1} - \frac{2ma^2}{2m+1}\int (u^2 - a^2)^{m-1}\,du, \quad m \neq -1/2$$

(E) $$\int u^m e^{au}\,du = \frac{1}{a}u^m e^{au} - \frac{m}{a}\int u^{m-1} e^{au}\,du$$

(F) $$\int \operatorname{sen}^m u\, du = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} u \cos u}{m} + \frac{m-1}{m}\int \operatorname{sen}^{m-2} u\, du$$

(G) $$\int \cos^m u\, du = \frac{\cos^{m-1} u \operatorname{sen} u}{m} + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2} u\, du$$

(H) $$\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u\, du = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} u \cos^{n-1} u}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^m u \cos^{n-2} u\, du$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} u \cos^{n+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^{m-2} u \cos^n u\, du\,, \quad m \neq -n$$

(I) $$\int u^m \operatorname{sen} bu\, du = -\frac{u^m}{b}\cos bu + \frac{m}{b}\int u^{m-1}\cos bu\, du$$

(J) $$\int u^m \cos bu\, du = \frac{u^m}{b}\operatorname{sen} bu - \frac{m}{b}\int u^{m-1}\operatorname{sen} bu\, du$$

(Ver Problema 11.)

Problemas resueltos

1. Calcular $\int x \operatorname{sen} x\, dx$.

Podemos seguir los siguientes caminos:

(*a*) $u = x \operatorname{sen} x$, $dv = dx$; (*b*) $u = \operatorname{sen} x$, $dv = x\, dx$; (*c*) $u = x$, $dv = \operatorname{sen} x\, dx$.

(*a*) $u = x \operatorname{sen} x$, $dv = dx$. Por tanto $du = (\operatorname{sen} x + x\cos x)\, dx$, $v = x$, y

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = x \cdot x \operatorname{sen} x - \int x(\operatorname{sen} x + x\cos x)\, dx$$

La integral que resulta es menos sencilla que la original por la cual se descarta este camino.

(*b*) $u = \operatorname{sen} x$, $dv = x\, dx$. Por tanto $du = \cos x\, dx$, $v = \frac{1}{2}x^2$, y

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = \tfrac{1}{2}x^2 \operatorname{sen} x - \int \tfrac{1}{2}x^2 \cos x\, dx$$

La integral que resulta es menos sencilla que la original y también descartamos este camino.

(*c*) $u = x$, $dv = \operatorname{sen} x\, dx$. Por tanto $du = dx$, $v = -\cos x$, y

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x\cos x - \int -\cos x\, dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

2. Calcular $\int xe^x\, dx$.

Sea $u = x$, $dv = e^x\, dx$. Entonces, $du = dx$, $v = e^x$, y

$$\int xe^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + C$$

3. Calcular $\int x^2 \ln x\, dx$.

Sea $u = \ln x$, $dv = x^2\, dx$. Por tanto, $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = \dfrac{x^3}{3}$, y

$$\int x^2 \ln x\, dx \quad \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

4. Calcular $\int x\sqrt{1+x}\, dx$.

Haciendo $u = x$, $dv = \sqrt{1+x}\, dx$. Tendremos $du = dx$, $v = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}$, y

$$\int x\sqrt{1+x}\, dx = \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{2}{3}\int (1+x)^{3/2}\, dx = \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + C$$

5. Calcular $\int \text{arc sen } x\, dx$.

Haciendo $u = \text{arc sen } x$, $dv = dx$. Tendremos $du = dx/\sqrt{1-x^2}$, $v = x$, y

$$\int \text{arc sen } x\, dx \;=\; x \text{ arc sen } x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \;=\; x \text{ arc sen } x + \sqrt{1-x^2} + C$$

6. Calcular $\int \text{sen}^2 x\, dx$.

Haciendo $u = \text{sen } x$, $dv = \text{sen } x\, dx$. Tendremos $du = \cos x\, dx$, $v = -\cos x$, y

$$\int \text{sen}^2 x\, dx \;=\; -\text{sen } x \cos x + \int \cos^2 x\, dx$$

$$=\; -\text{sen } x \cos x + \int (1 - \text{sen}^2 x)\, dx \;=\; -\tfrac{1}{2}\text{ sen } 2x + \int dx - \int \text{sen}^2 x\, dx$$

Pasando al primer miembro la integral del segundo,

$$2\int \text{sen}^2 x\, dx \;=\; -\tfrac{1}{2}\text{ sen } 2x + x + C' \qquad \text{y} \qquad \int \text{sen}^2 x\, dx \;=\; \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\text{ sen } 2x + C$$

7. Calcular $\int \sec^3 x\, dx$.

Haciendo $u = \sec x$, $dv = \sec^2 x\, dx$. Tendremos $du = \sec x \text{ tag } x\, dx$, $v = \text{tag } x$, y

$$\int \sec^3 x\, dx \;=\; \sec x \text{ tag } x - \int \sec x \text{ tag}^2 x\, dx \;=\; \sec x \text{ tag } x - \int \sec x (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$=\; \sec x \text{ tag } x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$

Por tanto $\quad 2\int \sec^3 x\, dx \;=\; \sec x \text{ tag } x + \int \sec x\, dx \;=\; \sec x \text{ tag } x + \ln|\sec x + \text{tag } x| + C'$

y $\quad \int \sec^3 x\, dx \;=\; \tfrac{1}{2}\{\sec x \text{ tag } x + \ln|\sec x + \text{tag } x|\} + C$

8. Calcular $\int x^2 \text{ sen } x\, dx$.

Haciendo $u = x^2$, $dv = \text{sen } x\, dx$. Tendremos $du = 2x\, dx$, $v = -\cos x$, y

$$\int x^2 \text{ sen } x\, dx \;=\; -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx$$

Haciendo en la integral resultante $u = x$ y $dv = \cos x\, dx$. Tendremos $du = dx$, $v = \text{sen } x$, y

$$\int x^2 \text{ sen } x\, dx \;=\; -x^2 \cos x + 2\,\{x \text{ sen } x - \int \text{sen } x\, dx\}$$

$$=\; -x^2 \cos x + 2x \text{ sen } x + 2 \cos x + C$$

9. Calcular $\int x^3 e^{2x}\, dx$.

Haciendo $u = x^3$, $dv = e^{2x}\, dx$. Tendremos $du = 3x^2\, dx$, $v = \tfrac{1}{2}e^{2x}$, y

$$\int x^3 e^{2x}\, dx \;=\; \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{2}\int x^2 e^{2x}\, dx$$

Haciendo en la integral resultante $u = x^2$ y $dv = e^{2x}\, dx$. Tendremos $du = 2x\, dx$, $v = \tfrac{1}{2}e^{2x}$, y

$$\int x^3 e^{2x}\, dx \;=\; \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{2}\left\{\frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int x e^{2x}\, dx\right\} \;=\; \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{2}\int x e^{2x}\, dx$$

Haciendo en la integral resultante $u = x$ y $dv = e^{2x}\, dx$. Tendremos $du = dx$, $v = \tfrac{1}{2}e^{2x}$, y

$$\int x^3 e^{2x}\, dx \;=\; \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{2}\left\{\frac{1}{2}x e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\, dx\right\}$$

$$=\; \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{4}x e^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x} + C$$

10. (*a*) Haciendo $= x$, $dv = \dfrac{x\,dx}{(a^2 \pm x^2)^m}$; Tendremos $du = dx$, $v = \dfrac{\mp 1}{(2m-2)(a^2 \pm x^2)^{m-1}}$, y

$$\int \frac{x^2\, dx}{(a^2 \pm x^2)^m} \;=\; \frac{\mp x}{(2m-2)(a^2 \pm x^2)^{m-1}} \pm \frac{1}{2m-2}\int \frac{dx}{(a^2 \pm x^2)^{m-1}}$$

(*b*) Haciendo $u = x$, $dv = x(a^2 \pm x^2)^{m-1}\, dx$; Tendremos $du = dx$, $v = \dfrac{\pm 1}{2m}(a^2 \pm x^2)^m$, y

$$\int x^2(a^2 \pm x^2)^{m-1}\, dx \;=\; \frac{\pm x}{2m}(a^2 \pm x^2)^m \mp \frac{1}{2m}\int (a^2 \pm x^2)^m\, dx$$

11. Hallar: (*a*) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{5/2}}$, (*b*) $\int (9+x^2)^{3/2}\,dx$.

(*a*) Como la fórmula de reducción (A) reduce a una unidad el exponente del denominador, aplicándola dos veces resulta:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{5/2}} = \frac{x}{3(1+x^2)^{3/2}} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{3(1+x^2)^{3/2}} + \frac{2}{3}\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}} + C$$

(*b*) Aplicando la fórmula de reducción (B),

$$\int (9+x^2)^{3/2}\,dx = \frac{1}{4}x(9+x^2)^{3/2} + \frac{27}{4}\int (9+x^2)^{1/2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x(9+x^2)^{3/2} + \frac{27}{8}\{x(9+x^2)^{1/2} + 9\ln(x+\sqrt{9+x^2})\} + C$$

Problemas propuestos

12. $\int x\cos x\,dx = x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x + C$

13. $\int x\sec^2 3x\,dx = \frac{x}{3}\,\mathrm{tag}\,3x - \frac{1}{9}\ln|\sec 3x| + C$

14. $\int \mathrm{arc}\cos 2x\,dx = x\,\mathrm{arc}\cos 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$

15. $\int \mathrm{arc\,tag}\,x\,dx = x\,\mathrm{arc\,tag}\,x - \ln\sqrt{1+x^2} + C$

16. $\int x^2\sqrt{1-x}\,dx = -\frac{2}{105}(1-x)^{3/2}(15x^2+12x+8) + C$

17. $\int \frac{xe^x\,dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x} + C$

18. $\int x\,\mathrm{arc\,tag}\,x\,dx = \frac{1}{2}(x^2+1)\,\mathrm{arc\,tag}\,x - \frac{1}{2}x + C$

19. $\int x^2 e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}) + C$

20. $\int \mathrm{sen}^3 x\,dx = -\frac{2}{3}\cos^3 x - \mathrm{sen}^2 x\cos x + C$

21. $\int x^3\,\mathrm{sen}\,x\,dx = -x^3\cos x + 3x^2\,\mathrm{sen}\,x + 6x\cos x - 6\,\mathrm{sen}\,x + C$

22. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(bx-2a)\sqrt{a+bx}}{3b^2} + C$

23. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x}} = \frac{2}{15}(3x^2-4x+8)\sqrt{1+x} + C$

24. $\int x\,\mathrm{arc\,sen}\,x^2\,dx = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arc\,sen}\,x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + C$

25. $\int \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,3x\,dx = \frac{1}{8}\,\mathrm{sen}\,3x\cos x - \frac{3}{8}\,\mathrm{sen}\,x\cos 3x + C$

26. $\int \mathrm{sen}(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}x(\mathrm{sen}\ln x - \cos\ln x) + C$

27. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(b\,\mathrm{sen}\,bx + a\cos bx)}{a^2+b^2} + C$

28. $\int e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\,\mathrm{sen}\,bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C$

29. (*a*) Poniendo $\int \frac{a^2\,dx}{(a^2\pm x^2)^m} = \int \frac{(a^2\pm x^2)\mp x^2}{(a^2\pm x^2)^m}\,dx = \int \frac{dx}{(a^2\pm x^2)^{m-1}} \mp \int \frac{x^2\,dx}{(a^2\pm x^2)^m}$ y aplicando el resultado del Problema 10 (*a*) deducir la fórmula de reducción (A).

(*b*) Poniendo $\int (a^2\pm x^2)^m\,dx = a^2\int (a^2\pm x^2)^{m-1}\,dx \pm \int x^2(a^2\pm x^2)^{m-1}\,dx$ y aplicando el resultado del Problema 10 (*b*) deducir la fórmula de reducción (B).

30. Deducir las fórmulas de reducción (C)-(J).

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)^3} = \frac{x(5-3x^2)}{8(1-x^2)^2} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$ 32. $\displaystyle\int \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{4(4+x^2)^{1/2}} + C$

33. $\displaystyle\int (4-x^2)^{3/2}\,dx = \tfrac{1}{4}x(10-x^2)\sqrt{4-x^2} + 6\,\text{arc sen}\,\tfrac{1}{2}x + C$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-16)^3} = \frac{1}{2048}\left\{\frac{x(3x^2-80)}{(x^2-16)^2} + \frac{3}{8}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|\right\} + C$

35. $\displaystyle\int (x^2-1)^{5/2}\,dx = \tfrac{1}{48}x(8x^4-26x^2+33)\sqrt{x^2-1} - \tfrac{5}{16}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C$

36. $\displaystyle\int \text{sen}^4 x\,dx = \tfrac{3}{8}x - \tfrac{3}{8}\,\text{sen}\,x\cos x - \tfrac{1}{4}\,\text{sen}^3 x\cos x + C$

37. $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx = \tfrac{1}{15}(3\cos^4 x + 4\cos^2 x + 8)\,\text{sen}\,x + C$

38. $\displaystyle\int \text{sen}^3 x\cos^2 x\,dx = -\tfrac{1}{5}\cos^3 x\,(\text{sen}^2 x + \tfrac{2}{3}) + C$

39. $\displaystyle\int \text{sen}^4 x\cos^5 x\,dx = \tfrac{1}{9}\,\text{sen}^5 x\,(\cos^4 x + \tfrac{4}{7}\cos^2 x + \tfrac{8}{35}) + C$

Otro procedimiento útil en los casos más complejos y laboriosos de esta sección, resulta al considerar que en (ver Problema 9)

(i) $$\int x^3e^{2x}\,dx = \tfrac{1}{2}x^3e^{2x} - \tfrac{3}{4}x^2e^{2x} + \tfrac{3}{4}xe^{2x} - \tfrac{3}{8}e^{2x} + C$$

los términos del segundo miembro, sin tener en cuenta los coeficientes, se obtienen al derivar sucesivamente el integrando x^3e^{2x}. Así pues,

(ii) $$\int x^3e^{2x}\,dx = Ax^3e^{2x} + Bx^2e^{2x} + Dxe^{2x} + Ee^{2x} + C$$

y derivando

$$x^3e^{2x} = 2Ax^3e^{2x} + (3A+2B)x^2e^{2x} + (2B+2D)xe^{2x} + (D+2E)e^{2x}$$

Identificando coeficientes, tendremos

$$2A = 1,\quad 3A+2B = 0,\quad 2B+2D = 0,\quad D+2E = 0$$

De donde $A = \tfrac{1}{2}$, $B = -\tfrac{3}{2}A = -\tfrac{3}{4}$, $D = -B = \tfrac{3}{4}$, $E = -\tfrac{1}{2}D = -\tfrac{3}{8}$. Sustituyendo A, B, D, E en (ii), obtenemos (i).

Este método se puede aplicar en el cálculo de $\int f(x)\,dx$ siempre que al derivar repetidamente $f(x)$ se obtenga un número finito de términos diferentes.

40. Calcular $\int e^{2x}\cos 3x\,dx = {}^1/_{13}e^{2x}(3\,\text{sen}\,3x + 2\cos 3x) + C$ haciendo

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = Ae^{2x}\,\text{sen}\,3x + Be^{2x}\cos 3x + C$$

41. Calcular $\int e^{3x}(2\,\text{sen}\,4x - 5\cos 4x)\,dx = {}^1/_{25}\,e^{3x}(-14\,\text{sen}\,4x - 23\cos 4x) + C$ haciendo

$$\int e^{3x}(2\,\text{sen}\,4x - 5\cos 4x)\,dx = Ae^{3x}\,\text{sen}\,4x + Be^{3x}\cos 4x + C$$

42. Calcular $\int \text{sen}\,3x\cos 2x\,dx = -{}^1/_5(2\,\text{sen}\,3x\,\text{sen}\,2x + 3\cos 3x\cos 2x) + C$ haciendo

$$\int \text{sen}\,3x\cos 2x\,dx = A\,\text{sen}\,3x\,\text{sen}\,2x + B\cos 3x\cos 2x + D\cos 3x\,\text{sen}\,2x + E\,\text{sen}\,3x\cos 2x + C$$

43. Calcular $\int e^{3x}x^2\,\text{sen}\,x\,dx = \dfrac{e^{3x}}{250}\,[25x^2(3\,\text{sen}\,x - \cos x) - 10x(4\,\text{sen}\,x - 3\cos x) + 9\,\text{sen}\,x - 13\cos x] + C$

Capítulo 27

Integrales trigonométricas

LAS IDENTIDADES que se utilizan en la resolución de las integrales trigonométricas de este capítulo son las siguientes:

1. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $1 + \operatorname{tag}^2 x = \sec^2 x$
3. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
4. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
5. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
6. $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$
7. $\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)]$
8. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$
9. $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$
10. $1 - \cos x = 2\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x$
11. $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{1}{2}x$
12. $1 \pm \operatorname{sen} x = 1 \pm \cos(\frac{1}{2}\pi - x)$

Problemas resueltos

SENOS Y COSENOS

1. $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$

2. $\int \cos^2 3x\, dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 6x)\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6x + C$

3. $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x\, dx = \int (1 - \cos^2 x)\operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$

4. $$\int \cos^5 x\, dx = \int \cos^4 x \cos x\, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x\, dx$$
$$= \int \cos x\, dx - 2\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx + \int \operatorname{sen}^4 x \cos x\, dx$$
$$= \operatorname{sen} x - \tfrac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \tfrac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C$$

5. $$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \cos x\, dx = \int \operatorname{sen}^2 x(1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x\, dx$$
$$= \int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx - \int \operatorname{sen}^4 x \cos x\, dx = \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \tfrac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C$$

6. $$\int \cos^4 2x \operatorname{sen}^3 2x\, dx = \int \cos^4 2x \operatorname{sen}^2 2x \operatorname{sen} 2x\, dx = \int \cos^4 2x(1 - \cos^2 2x)\operatorname{sen} 2x\, dx$$
$$= \int \cos^4 2x \operatorname{sen} 2x\, dx - \int \cos^6 2x \operatorname{sen} 2x\, dx = -\tfrac{1}{10}\cos^5 2x + \tfrac{1}{14}\cos^7 2x + C$$

7. $$\int \operatorname{sen}^3 3x \cos^5 3x\, dx = \int (1 - \cos^2 3x)\cos^5 3x \operatorname{sen} 3x\, dx$$
$$= \int \cos^5 3x \operatorname{sen} 3x\, dx - \int \cos^7 3x \operatorname{sen} 3x\, dx = -\tfrac{1}{18}\cos^6 3x + \tfrac{1}{24}\cos^8 3x + C$$

o

$$\int \operatorname{sen}^3 3x \cos^5 3x\, dx = \int \operatorname{sen}^3 3x(1 - \operatorname{sen}^2 3x)^2 \cos 3x\, dx$$
$$= \int \operatorname{sen}^3 3x \cos 3x\, dx - 2\int \operatorname{sen}^5 3x \cos 3x\, dx + \int \operatorname{sen}^7 3x \cos 3x\, dx$$
$$= \tfrac{1}{12}\operatorname{sen}^4 3x - \tfrac{1}{9}\operatorname{sen}^6 3x + \tfrac{1}{24}\operatorname{sen}^8 3x + C$$

8. $\int \cos^3 \frac{x}{3}\, dx \;=\; \int \left(1 - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{3}\right) \cos \frac{x}{3}\, dx \;=\; 3 \operatorname{sen} \frac{x}{3} - \operatorname{sen}^3 \frac{x}{3} + C$

9. $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx \;=\; \int (\operatorname{sen}^2 x)^2\, dx \;=\; \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2\, dx$

$$= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + C \;=\; \frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + C$$

10. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx \;=\; \frac{1}{4} \int \operatorname{sen}^2 2x\, dx \;=\; \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x)\, dx \;=\; \frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + C$

11. $\int \operatorname{sen}^4 3x \cos^2 3x\, dx \;=\; \int (\operatorname{sen}^2 3x \cos^2 3x) \operatorname{sen}^2 3x\, dx \;=\; \frac{1}{8} \int \operatorname{sen}^2 6x\, (1 - \cos 6x)\, dx$

$$= \frac{1}{8} \int \operatorname{sen}^2 6x\, dx - \frac{1}{8} \int \operatorname{sen}^2 6x \cos 6x\, dx$$

$$= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 12x)\, dx - \frac{1}{8} \int \operatorname{sen}^2 6x \cos 6x\, dx$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{192} \operatorname{sen} 12x - \frac{1}{144} \operatorname{sen}^3 6x + C$$

12. $\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x\, dx \;=\; \int \frac{1}{2}\{\cos (3x - 2x) - \cos (3x + 2x)\}\, dx \;=\; \frac{1}{2} \int (\cos x - \cos 5x)\, dx$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sen} x - \frac{1}{10} \operatorname{sen} 5x + C$$

13. $\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x\, dx \;=\; \int \frac{1}{2}\{\operatorname{sen} (3x - 5x) + \operatorname{sen} (3x + 5x)\}\, dx \;=\; \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C$

14. $\int \cos 4x \cos 2x\, dx \;=\; \frac{1}{2} \int (\cos 2x + \cos 6x)\, dx \;=\; \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{12} \operatorname{sen} 6x + C$

15. $\int \sqrt{1 - \cos x}\, dx \;=\; \sqrt{2} \int \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}x\, dx \;=\; -2\sqrt{2} \cos \tfrac{1}{2}x + C$

16. $\int (1 + \cos 3x)^{3/2}\, dx \;=\; 2\sqrt{2} \int \cos^3 \tfrac{3}{2}x\, dx \;=\; 2\sqrt{2} \int (1 - \operatorname{sen}^2 \tfrac{3}{2}x) \cos \tfrac{3}{2}x\, dx$

$$= 2\sqrt{2}\, (\tfrac{2}{3} \operatorname{sen} \tfrac{3}{2}x - \tfrac{2}{9} \operatorname{sen}^3 \tfrac{3}{2}x) + C$$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} 2x}} \;=\; \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \cos (\frac{1}{2}\pi - 2x)}} \;=\; \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dx}{\operatorname{sen} (\frac{1}{4}\pi - x)} \;=\; \frac{\sqrt{2}}{2} \int \csc (\tfrac{1}{4}\pi - x)\, dx$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \ln |\csc (\tfrac{1}{4}\pi - x) - \cot (\tfrac{1}{4}\pi - x)| + C$$

TANGENTES, SECANTES, COTANGENTES, COSECANTES

18. $\int \operatorname{tag}^4 x\, dx \;=\; \int \operatorname{tag}^2 x \operatorname{tag}^2 x\, dx \;=\; \int \operatorname{tag}^2 x (\sec^2 x - 1)\, dx \;=\; \int \operatorname{tag}^2 x \sec^2 x\, dx - \int \operatorname{tag}^2 x\, dx$

$$= \int \operatorname{tag}^2 x \sec^2 x\, dx - \int (\sec^2 x - 1)\, dx \;=\; \tfrac{1}{3} \operatorname{tag}^3 x - \operatorname{tag} x + x + C$$

19. $\int \operatorname{tag}^5 x\, dx \;=\; \int \operatorname{tag}^3 x \operatorname{tag}^2 x\, dx \;=\; \int \operatorname{tag}^3 x (\sec^2 x - 1)\, dx$

$$= \int \operatorname{tag}^3 x \sec^2 x\, dx - \int \operatorname{tag}^3 x\, dx \;=\; \int \operatorname{tag}^3 x \sec^2 x\, dx - \int \operatorname{tag} x (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \tfrac{1}{4} \operatorname{tag}^4 x - \tfrac{1}{2} \operatorname{tag}^2 x + \ln |\sec x| + C$$

20. $\int \sec^4 2x\, dx \;=\; \int \sec^2 2x \sec^2 2x\, dx \;=\; \int \sec^2 2x\, (1 + \operatorname{tag}^2 2x)\, dx$

$$= \int \sec^2 2x\, dx + \int \operatorname{tag}^2 2x \sec^2 2x\, dx \;=\; \tfrac{1}{2} \operatorname{tag} 2x + \tfrac{1}{6} \operatorname{tag}^3 2x + C$$

21. $\int \operatorname{tag}^3 3x \sec^4 3x \, dx = \int \operatorname{tag}^3 3x \,(1 + \operatorname{tag}^2 3x) \sec^2 3x \, dx$

$= \int \operatorname{tag}^3 3x \sec^2 3x \, dx + \int \operatorname{tag}^5 3x \sec^2 3x \, dx = \frac{1}{12} \operatorname{tag}^4 3x + \frac{1}{18} \operatorname{tag}^6 3x + C$

22. $\int \operatorname{tag}^2 x \sec^3 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \sec^3 x \, dx = \int \sec^5 x \, dx - \int \sec^3 x \, dx$

$= \frac{1}{4} \sec^3 x \operatorname{tag} x - \frac{1}{8} \sec x \operatorname{tag} x - \frac{1}{8} \ln |\sec x + \operatorname{tag} x| + C$, integrando por partes.

23. $\int \operatorname{tag}^3 2x \sec^3 2x \, dx = \int \operatorname{tag}^2 2x \sec^2 2x \cdot \sec 2x \operatorname{tag} 2x \, dx$

$= \int (\sec^2 2x - 1) \sec^2 2x \cdot \sec 2x \operatorname{tag} 2x \, dx$

$= \int \sec^4 2x \cdot \sec 2x \operatorname{tag} 2x \, dx - \int \sec^2 2x \cdot \sec 2x \operatorname{tag} 2x \, dx$

$= \frac{1}{10} \sec^5 2x - \frac{1}{6} \sec^3 2x + C$

24. $\int \cot^3 2x \, dx = \int \cot 2x \,(\csc^2 2x - 1) \, dx = -\frac{1}{4} \cot^2 2x + \frac{1}{2} \ln |\csc 2x| + C$

25. $\int \cot^4 3x \, dx = \int \cot^2 3x \,(\csc^2 3x - 1) \, dx = \int \cot^2 3x \csc^2 3x \, dx - \int \cot^2 3x \, dx$

$= \int \cot^2 3x \csc^2 3x \, dx - \int (\csc^2 3x - 1) \, dx = -\frac{1}{9} \cot^3 3x + \frac{1}{3} \cot 3x + x + C$

26. $\int \csc^6 x \, dx = \int \csc^2 x \,(1 + \cot^2 x)^2 \, dx$

$= \int \csc^2 x \, dx + 2 \int \cot^2 x \csc^2 x \, dx + \int \cot^4 x \csc^2 x \, dx$

$= -\cot x - \frac{2}{3} \cot^3 x - \frac{1}{5} \cot^5 x + C$

27. $\int \cot 3x \csc^4 3x \, dx = \int \cot 3x \,(1 + \cot^2 3x) \csc^2 3x \, dx$

$= \int \cot 3x \csc^2 3x \, dx + \int \cot^3 3x \csc^2 3x \, dx = -\frac{1}{6} \cot^2 3x - \frac{1}{12} \cot^4 3x + C$

28. $\int \cot^3 x \csc^5 x \, dx = \int \cot^2 x \csc^4 x \cdot \csc x \cot x \, dx = \int (\csc^2 x - 1) \csc^4 x \cdot \csc x \cot x \, dx$

$= \int \csc^6 x \cdot \csc x \cot x \, dx - \int \csc^4 x \cdot \csc x \cot x \, dx$

$= -\frac{1}{7} \csc^7 x + \frac{1}{5} \csc^5 x + C$

Problemas propuestos

29. $\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C$

30. $\int \operatorname{sen}^3 2x \, dx = \frac{1}{6} \cos^3 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$

31. $\int \operatorname{sen}^4 2x \, dx = \frac{3}{8} x - \frac{1}{8} \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{64} \operatorname{sen} 8x + C$

32. $\int \cos^4 \frac{1}{2} x \, dx = \frac{3}{8} x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{16} \operatorname{sen} 2x + C$

33. $\int \operatorname{sen}^7 x \, dx = \frac{1}{7} \cos^7 x - \frac{3}{5} \cos^5 x + \cos^3 x - \cos x + C$

34. $\int \cos^6 \frac{1}{2}x\,dx = \frac{5}{16}x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{3}{32}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{24}\operatorname{sen}^3 x + C$

35. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \frac{2}{5}\operatorname{sen}^5 x + \frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x + C$

36. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\,dx = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$

37. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x\,dx = \frac{1}{48}\cos^3 2x - \frac{1}{16}\cos 2x + C$

38. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x\,dx = \frac{1}{128}(3x - \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 8x) + C$

39. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 4x\,dx = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{12}\cos 6x + C$

40. $\int \cos 3x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{10}\operatorname{sen} 5x + C$

41. $\int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x - \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6x + C$

42. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{1 - \operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$

43. $\int \frac{\cos^{2/3} x}{\operatorname{sen}^{8/3} x}\,dx = -\frac{3}{5}\cot^{5/3} x + C$

44. $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx = \csc x - \frac{1}{3}\csc^3 x + C$

45. $\int x(\cos^3 x^2 - \operatorname{sen}^3 x^2)\,dx = \frac{1}{12}(\operatorname{sen} x^2 + \cos x^2)(4 + \operatorname{sen} 2x^2) + C$

46. $\int \operatorname{tag}^3 x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{tag}^2 x + \ln|\cos x| + C$

47. $\int \operatorname{tag}^3 3x \sec 3x\,dx = \frac{1}{9}\sec^3 3x - \frac{1}{3}\sec 3x + C$

48. $\int \operatorname{tag}^{3/2} x \sec^4 x\,dx = \frac{2}{5}\operatorname{tag}^{5/2} x + \frac{2}{9}\operatorname{tag}^{9/2} x + C$

49. $\int \operatorname{tag}^4 x \sec^4 x\,dx = \frac{1}{7}\operatorname{tag}^7 x + \frac{1}{5}\operatorname{tag}^5 x + C$

50. $\int \cot^3 x\,dx = -\frac{1}{2}\cot^2 x - \ln|\operatorname{sen} x| + C$

51. $\int \cot^3 x \csc^4 x\,dx = -\frac{1}{4}\cot^4 x - \frac{1}{6}\cot^6 x + C$

52. $\int \cot^3 x \csc^3 x\,dx = -\frac{1}{5}\csc^5 x + \frac{1}{3}\csc^3 x + C$

53. $\int \csc^4 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cot 2x - \frac{1}{6}\cot^3 2x + C$

54. $\int \left(\frac{\sec x}{\operatorname{tag} x}\right)^4 dx = -\frac{1}{3\operatorname{tag}^3 x} - \frac{1}{\operatorname{tag} x} + C$

55. $\int \frac{\cot^3 x}{\csc x}\,dx = -\operatorname{sen} x - \csc x + C$

56. $\int \operatorname{tag} x\sqrt{\sec x}\,dx = 2\sqrt{\sec x} + C$

57. Aplicar la integración por partes para deducir las fórmulas de reducción

(a) $\int \sec^m u\,du = \frac{1}{m-1}\sec^{m-2} u \operatorname{tag} u + \frac{m-2}{m-1}\int \sec^{m-2} u\,du$

(b) $\int \csc^m u\,du = -\frac{1}{m-1}\csc^{m-2} u \cot u + \frac{m-2}{m-1}\int \csc^{m-2} u\,du$

Aplicar las fórmulas de reducción por partes del Problema 57 para resolver los Problemas 58-60.

58. $\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \operatorname{tag} x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tag} x| + C$

59. $\int \csc^5 x\,dx = -\frac{1}{4}\csc^3 x \cot x - \frac{3}{8}\csc x \cot x + \frac{3}{8}\ln|\csc x - \cot x| + C$

60. $\int \sec^6 x\,dx = \frac{1}{5}\sec^4 x \operatorname{tag} x + \frac{4}{15}\sec^2 x \operatorname{tag} x + \frac{8}{15}\operatorname{tag} x + C$

$= \frac{1}{5}\operatorname{tag}^5 x + \frac{2}{3}\operatorname{tag}^3 x + \operatorname{tag} x + C$

Capítulo 28

Cambios de variable trigonométricos

UN INTEGRANDO, que sea de una de las formas, $\sqrt{a^2 - b^2u^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2u^2}$ o $\sqrt{b^2u^2 - a^2}$, se puede transformar, si no contiene otro factor irracional, en otro formado a base de funciones trigonométricas de una nueva variable, efectuando los cambios siguientes:

Para	hacer el cambio	para obtener
$\sqrt{a^2 - b^2u^2}$	$u = \frac{a}{b}\,\text{sen}\,z$	$a\sqrt{1 - \text{sen}^2 z} = a \cos z$
$\sqrt{a^2 + b^2u^2}$	$u = \frac{a}{b}\,\text{tag}\,z$	$a\sqrt{1 + \text{tag}^2 z} = a \sec z$
$\sqrt{b^2u^2 - a^2}$	$u = \frac{a}{b}\sec z$	$a\sqrt{\sec^2 z - 1} = a\,\text{tag}\,z$

En cada caso, la integración conduce a una expresión en función de la variable z. Para obtener la solución correspondiente en función de la variable original no hay más que deshacer el cambio, es decir tener en cuenta las relaciones pitagóricas en todo triángulo rectángulo, como se indica en los problemas resueltos.

Problemas resueltos

1. Calcular $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 + x^2}}$.

Haciendo $x = 2\,\text{tag}\,z$; tendremos $dx = 2\sec^2 z\,dz$ y $\sqrt{4 + x^2} = 2\sec z$.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2 z\,dz}{(4\,\text{tag}^2 z)(2\sec z)} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec z}{\text{tag}^2 z}\,dz$$

$$= \frac{1}{4}\int \text{sen}^{-2} z \cos z\,dz = -\frac{1}{4\,\text{sen}\,z} + C = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$$

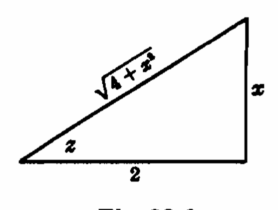


Fig. 28-1

2. Calcular $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}\,dx$.

Haciendo $x = 2\sec z$; tendremos $dx = 2\sec z\,\text{tag}\,z\,dz$ y $\sqrt{x^2 - 4} = 2\,\text{tag}\,z$.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}dx = \int \frac{4\sec^2 z}{2\,\text{tag}\,z}(2\sec z\,\text{tag}\,z\,dz) = 4\int \sec^3 z\,dz$$

$$= 2\sec z\,\text{tag}\,z + 2\ln|\sec z + \text{tag}\,z| + C'$$

$$= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} + 2\ln|x + \sqrt{x^2-4}| + C$$

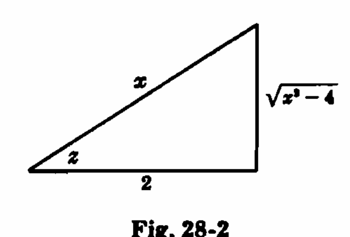


Fig. 28-2

3. Calcular $\int \frac{\sqrt{9 - 4x^2}}{x}\,dx$.

Haciendo $x = \frac{3}{2}\,\text{sen}\,z$; tendremos $dx = \frac{3}{2}\cos z\,dz$ y $\sqrt{9 - 4x^2} = 3\cos z$.

$$\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}\,dx \;=\; \int \frac{3\cos z}{\frac{3}{2}\operatorname{sen} z}\left(\tfrac{3}{2}\cos z\,dz\right) \;=\; 3\int \frac{\cos^2 z}{\operatorname{sen} z}\,dz$$

$$= \; 3\int \frac{1-\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen} z}\,dz \;=\; 3\int \csc z\,dz \;-\; 3\int \operatorname{sen} z\,dz$$

$$= \; 3\ln|\csc z - \cot z| \;+\; 3\cos z \;+\; C'$$

$$= \; 3\ln\left|\frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{x}\right| \;+\; \sqrt{9-4x^2} \;+\; C$$

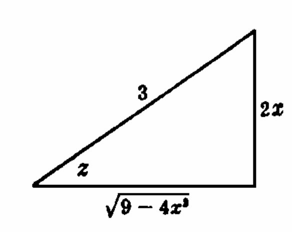


Fig. 28-3

4. Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}}$.

Haciendo $x = \frac{3}{2}$ tag z, tendremos $dx = \frac{3}{2}\sec^2 z\,dz$ y $\sqrt{9+4x^2} = 3\sec z$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}} \;=\; \int \frac{\frac{3}{2}\sec^2 z\,dz}{\frac{3}{2}\operatorname{tag} z\cdot 3\sec z} \;=\; \frac{1}{3}\int \csc z\,dz$$

$$= \; \frac{1}{3}\ln|\csc z - \cot z| \;+\; C' \;=\; \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9+4x^2}-3}{x}\right| \;+\; C$$

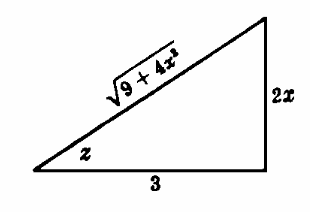


Fig. 28-4

5. Calcular $\displaystyle\int \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{x^6}\,dx$.

Haciendo $x = —$ sen z, tendremos $dx = —\cos z\,dz$ y $\sqrt{16-9x^2} = 4\cos z$.

$$\int \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{x^6}\,dx \;=\; \int \frac{64\cos^3 z\cdot\frac{4}{3}\cos z\,dz}{\frac{4096}{729}\operatorname{sen}^6 z} \;=\; \frac{243}{16}\int \frac{\cos^4 z}{\operatorname{sen}^6 z}\,dz$$

$$= \; \frac{243}{16}\int \cot^4 z\csc^2 z\,dz \;=\; -\frac{243}{80}\cot^5 z \;+\; C$$

$$= \; -\frac{243}{80}\cdot\frac{(16-9x^2)^{5/2}}{243x^5} \;+\; C \;=\; -\frac{1}{80}\cdot\frac{(16-9x^2)^{5/2}}{x^5} \;+\; C$$

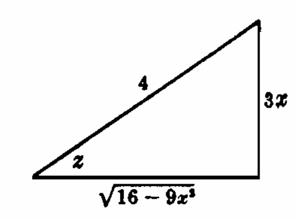
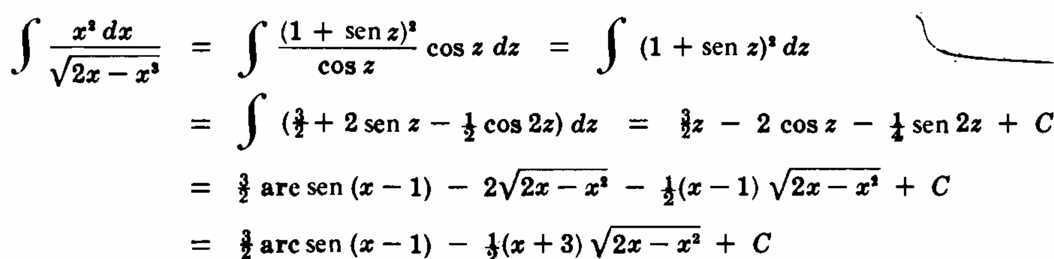


Fig. 28-5

6. Calcular $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$.

Haciendo $x - 1 = \operatorname{sen} z$, tendremos $dx = \cos z\,dz$ y $\sqrt{2x-x^2} = \cos z$.



$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2x-x^2}} \;=\; \int \frac{(1+\operatorname{sen} z)^2}{\cos z}\cos z\,dz \;=\; \int (1+\operatorname{sen} z)^2\,dz$$

$$= \; \int \left(\tfrac{3}{2} + 2\operatorname{sen} z - \tfrac{1}{2}\cos 2z\right)dz \;=\; \tfrac{3}{2}z \;-\; 2\cos z \;-\; \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2z \;+\; C$$

$$= \; \tfrac{3}{2}\operatorname{arc\,sen}(x-1) \;-\; 2\sqrt{2x-x^2} \;-\; \tfrac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2} \;+\; C$$

$$= \; \tfrac{3}{2}\operatorname{arc\,sen}(x-1) \;-\; \tfrac{1}{2}(x+3)\sqrt{2x-x^2} \;+\; C$$

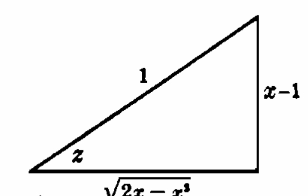


Fig. 28-6

7. Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{(4x^2-24x+27)^{3/2}} = \int \frac{dx}{\{4(x-3)^2-9\}^{3/2}}$.

Haciendo $x - 3 = \frac{3}{2}\sec z$, tendremos $dx = \frac{3}{2}\sec z$ tag $z\,dz$ y $\sqrt{4x^2-24x+27} = 3$ tag z.

$$\int \frac{dx}{(4x^2-24x+27)^{3/2}} \;=\; \int \frac{\frac{3}{2}\sec z\ \operatorname{tag} z\,dz}{27\ \operatorname{tag}^3 z}$$

$$= \; \frac{1}{18}\int \operatorname{sen}^{-2} z\cos z\,dz$$

$$= \; -\frac{1}{18}\csc z \;+\; C$$

$$= \; -\frac{1}{9}\,\frac{x-3}{\sqrt{4x^2-24x+27}} \;+\; C$$

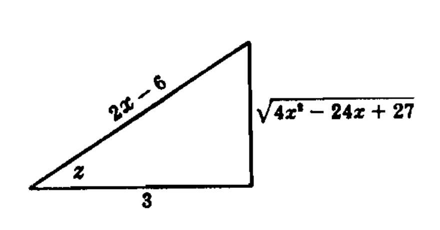


Fig. 28-7

Problemas propuestos

8. $\int \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + C$

9. $\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\,dx = 5 \ln \left|\frac{5-\sqrt{25-x^2}}{x}\right| + \sqrt{25-x^2} + C$

10. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C$

11. $\int \sqrt{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+4} + 2\ln(x+\sqrt{x^2+4}) + C$

12. $\int \frac{x^2\,dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C$

13. $\int \sqrt{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} - 2\ln|x+\sqrt{x^2-4}| + C$

14. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a}{2}\ln\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{\sqrt{a^2+x^2}+a} + C$

15. $\int \frac{x^2\,dx}{(4-x^2)^{5/2}} = \frac{x^3}{12(4-x^2)^{3/2}} + C$

16. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C$

17. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C$

18. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-16}} = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-16} + 8\ln|x+\sqrt{x^2-16}| + C$

19. $\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{5}(a^2-x^2)^{5/2} - \frac{a^2}{3}(a^2-x^2)^{3/2} + C$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+13}} = \ln(x-2+\sqrt{x^2-4x+13}) + C$

21. $\int \frac{dx}{(4x-x^2)^{3/2}} = \frac{x-2}{4\sqrt{4x-x^2}} + C$

22. $\int \frac{dx}{(9+x^2)^2} = \frac{1}{54}\operatorname{arc\,tag}\frac{x}{3} + \frac{x}{18(9+x^2)} + C$

Aplicar la integración, por partes y el método de este capítulo, en la resolución de los Problemas 23-24.

23. $\int x \operatorname{arc\,sen} x\,dx = \frac{1}{4}(2x^2-1)\operatorname{arc\,sen} x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C$

24. $\int x \operatorname{arc\,cos} x\,dx = \frac{1}{4}(2x^2-1)\operatorname{arc\,cos} x - \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C$

Capítulo 29

Integración por descomposición en fracciones simples

UN POLINOMIO EN x es una función de la forma $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, en donde los coeficientes son constantes, $a_0 \neq 0$ y n un número entero y positivo cualquiera, incluido el cero.

Si dos polinomios del mismo grado toman iguales valores numéricos para todos los valores de la variable, los coeficientes de los términos de igual grado de ésta, en ambos polinomios, son iguales.

Todo polinomio de coeficientes reales se puede expresar (al menos teóricamente) como producto de factores reales lineales, de la forma $ax + b$, y de factores cuadráticos reales irreducibles, de la forma $ax^2 + bx + c$.

UNA FUNCION $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ en la que $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios recibe el nombre de *fracción racional.*

Si el grado de $f(x)$ es menor que el de $g(x)$, $F(x)$ recibe el nombre de función *propia*; en caso contrario, $F(x)$ se denomina *impropia.*

Toda fracción racional impropia se puede expresar (al menos teóricamente) como suma de un polinomio y una fracción propia. Por ejemplo, $\dfrac{x^3}{x^2+1} = x - \dfrac{x}{x^2+1}$.

Toda fracción racional propia se puede expresar (al menos teóricamente) como suma de *fracciones simples* cuyos denominadores son de la forma $(ax + b)^n$ y $(ax^2 + bx + c)^n$, siendo n un número entero y positivo. Atendiendo a la naturaleza de los factores del denominador, se pueden considerar cuatro casos.

CASO I. FACTORES LINEALES DISTINTOS

A cada factor lineal, $ax + b$, del denominador de una fracción racional propia, le corresponde una fracción de la forma $\dfrac{A}{ax+b}$, siendo A una constante a determinar.

(Ver Problemas 1-2.)

CASO II. FACTORES LINEALES IGUALES

A cada factor lineal, $ax + b$, que figure n veces en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una suma de n fracciones de la forma

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

siendo los numeradores constantes a determinar.

(Ver Problemas 3-4.)

CASO III. FACTORES CUADRATICOS DISTINTOS

A cada factor cuadrático reducible, $ax^2 + bx + c$, que figure en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una fracción de la forma $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, siendo A y B constantes a determinar.

(Ver Problemas 5-6.)

CASO IV. FACTORES CUADRATICOS IGUALES

A cada factor cuadrático irreducible, $ax^2 + bx + c$, que se repita n veces en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una suma de n fracciones de la forma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

siendo los valores de A y B constantes a determinar.

(Ver Problemas 7-8.)

Problemas resueltos

1. Hallar $\int \frac{dx}{x^2 - 4}$.

(*a*) Descomposición del denominador en factores: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

Por tanto $\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2}$; quitando denominadores

(*1*) $1 = A(x + 2) + B(x - 2)$ o bien (*2*) $1 = (A + B)x + (2A - 2B)$

(*b*) Cálculo de las constantes.

Método general. Se identifican los coeficientes de igual potencia de x en (2) y se resuelve el sistema de ecuaciones obtenido para determinar las constantes. Esto es, $A + B = 0$ y $2A - 2B = 1$; $A = \frac{1}{4}$ y $B = -\frac{1}{4}$.

Método abreviado. Se sustituyen en (1) los valores de x que anulen los denominadores de las fracciones. Es decir, para $x = 2$ y $x = -2$, obtenemos $1 = 4A$ y $1 = -4B$, de donde, $A = \frac{1}{4}$ y $B = -\frac{1}{4}$, como antes.

(*c*) Hemos obtenido $\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{\frac{1}{4}}{x - 2} - \frac{\frac{1}{4}}{x + 2}$ con lo cual

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x - 2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x + 2} = \frac{1}{4}\ln|x - 2| - \frac{1}{4}\ln|x + 2| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x - 2}{x + 2}\right| + C$$

2. Calcular $\int \frac{(x + 1)\,dx}{x^3 + x^2 - 6x}$.

(*a*) $x^3 + x^2 - 6x = x(x - 2)(x + 3)$. Por tanto $\frac{x + 1}{x^3 + x^2 - 6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 3}$ y

(*1*) $x + 1 = A(x - 2)(x + 3) + Bx(x + 3) + Cx(x - 2)$ o

(*2*) $x + 1 = (A + B + C)x^2 + (A + 3B - 2C)x - 6A$

(*b*) *Método general.* Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$A + B + C = 0, \quad A + 3B - 2C = 1, \quad \text{y} \quad -6A = 1$$

obtenemos $A = -1/6$, $B = 3/10$, y $C = -2/15$.

Método abreviado. Sustituyendo en (1) los valores $x = 0$, $x = 2$, y $x = -3$ obtenemos $1 = -6A$, o sea, $A = -1/6$, $3 = 10B$ ó $B = 3/10$, y $-2 = 15C$ ó $C = -2/15$.

(*c*) $$\int \frac{(x + 1)\,dx}{x^3 + x^2 - 6x} = -\frac{1}{6}\int \frac{dx}{x} + \frac{3}{10}\int \frac{dx}{x - 2} - \frac{2}{15}\int \frac{dx}{x + 3}$$

$$= -\frac{1}{6}\ln|x| + \frac{3}{10}\ln|x - 2| - \frac{2}{15}\ln|x + 3| + C = \ln\frac{|x - 2|^{3/10}}{|x|^{1/6}\,|x + 3|^{2/15}} + C$$

3. Calcular $\int \frac{(3x + 5)\,dx}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

$x^3 - x^2 - x + 1 = (x + 1)(x - 1)^2$. Tendremos $\frac{3x + 5}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2}$ y

$$3x + 5 = A(x - 1)^2 + B(x + 1)(x - 1) + C(x + 1)$$

Para $x = -1$, $2 = 4A$ y $A = \frac{1}{2}$. Para $x = 1$, $8 = 2C$ y $C = 4$. Para determinar las demás constantes, se sustituye otro valor de x, por ejemplo, $x = 0$; para $x = 0$, $5 = A - B + C$ y $B = -\frac{1}{2}$. Por tanto,

$$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} + 4\int\frac{dx}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + C = -\frac{4}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$$

4. Calcular $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx$.

El integrando es una fracción impropia. Dividiendo,

$$\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2} = x - \frac{x+1}{x^3-x^2} = x - \frac{x+1}{x^2(x-1)}$$

Descomponiendo $\frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$. Tendremos,

$$x + 1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2$$

Para $x = 0$, $1 = -B$ y $B = -1$. Para $x = 1$, $2 = C$. Para $x = 2$, $3 = 2A + B + 4C$ y $A = -2$. Por tanto,

$$\int\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx = \int x\,dx + 2\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dx}{x^2} - 2\int\frac{dx}{x-1}$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x| - \frac{1}{x} - 2\ln|x-1| + C = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + 2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + C$$

5. Calcular $\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx$.

$x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2+1)(x^2+2)$. Con lo que $\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$. De donde

$$x^3 + x^2 + x + 2 = (Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1)$$
$$= (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (2A+C)x + (2B+D)$$

Luego $A + C = 1$, $B + D = 1$, $2A + C = 1$, y $2B + D = 2$. Resolviendo el sistema, $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 0$. Es decir,

$$\int\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx = \int\frac{dx}{x^2+1} + \int\frac{x\,dx}{x^2+2} = \text{arc tag}\,x + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + C$$

6. Resolver la ecuación $\int\frac{x^2\,dx}{a^4-x^4} = \int k\,dt$ que se presenta en química física.

Tendremos $\frac{x^2}{a^4-x^4} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{a+x} + \frac{Cx+D}{a^2+x^2}$. Por tanto,

$$x^2 = A(a+x)(a^2+x^2) + B(a-x)(a^2+x^2) + (Cx+D)(a-x)(a+x)$$

Para $x = a$, $a^2 = 4Aa^3$ y $A = 1/4a$. Para $x = -a$, $a^2 = 4Ba^3$ y $B = 1/4a$. Para $x = 0$, $0 = Aa^3 + Ba^3 + Da^2 = a^2/2 + Da^2$ y $D = -1/2$. Para $x = 2a$, $4a^2 = 15Aa^3 - 5Ba^3 - 6Ca^3 - 3Da^2$ y $C = 0$. Así, pues,

$$\int\frac{x^2\,dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a}\int\frac{dx}{a-x} + \frac{1}{4a}\int\frac{dx}{a+x} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{a^2+x^2}$$
$$= -\frac{1}{4a}\ln|a-x| + \frac{1}{4a}\ln|a+x| - \frac{1}{2a}\text{arc tag}\frac{x}{a} + C$$

y

$$\int k\,dt = kt = \frac{1}{4a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| - \frac{1}{2a}\text{arc tag}\frac{x}{a} + C$$

7. Calcular $\int\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}\,dx$.

Tendremos $\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^3}$. De donde

$$x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = (Ax+B)(x^2+2)^2 + (Cx+D)(x^2+2) + Ex + F$$
$$= Ax^5 + Bx^4 + (4A+C)x^3 + (4B+D)x^2$$
$$+ (4A+2C+E)x + (4B+2D+F)$$

se obtiene $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 0$, $E = 4$, $F = 0$. Así, pues, la integral dada es igual a

$$\int \frac{x-1}{x^2+2}\,dx + 4\int \frac{x\,dx}{(x^2+2)^3} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{2}\text{arc tag}\,\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{(x^2+2)^2} + C$$

8. Calcular $\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx$.

Tendremos $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$. Por tanto

$$2x^2+3 = (Ax+B)(x^2+1) + Cx + D = Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + (B+D)$$

de donde $A = 0$, $B = 2$, $A + C = 0$, $B + D = 3$. Por tanto $A = 0$, $B = 2$, $C = 0$, $D = 1$ y

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{2\,dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

Para la segunda integral del segundo miembro, hacemos $x = \text{tag}\,z$. Con lo cual

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{\sec^2 z\,dz}{\sec^4 z} = \int \cos^2 z\,dz = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2z + C$$

y $$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx = 2\,\text{arc tag}\,x + \frac{1}{2}\text{arc tag}\,x + \frac{\frac{1}{2}x}{x^2+1} + C = \frac{5}{2}\text{arc tag}\,x + \frac{\frac{1}{2}x}{x^2+1} + C$$

Problemas propuestos

9. $\int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$

10. $\int \frac{dx}{x^2+7x+6} = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x+1}{x+6}\right| + C$

11. $\int \frac{x\,dx}{x^2-3x-4} = \frac{1}{5}\ln|(x+1)(x-4)^4| + C$

12. $\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}\,dx = x + \ln|(x+2)(x-4)^4| + C$

13. $\int \frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx = \ln\left|\frac{x^{1/2}(x+2)^{3/2}}{x-1}\right| + C$

14. $\int \frac{x\,dx}{(x-2)^2} = \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C$

15. $\int \frac{x^4}{(1-x)^3}\,dx = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \ln(1-x)^6 - \frac{4}{1-x} + \frac{1}{2(1-x)^2} + C$

16. $\int \frac{dx}{x^3+x} = \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + C$

17. $\int \frac{x^3+x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+3)}\,dx = \ln\sqrt{x^2+3} + \text{arc tag}\,x + C$

18. $\int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x+3}{x^3-2x^2+3x}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+3}}\right| + C$

19. $\int \frac{2x^3\,dx}{(x^2+1)^2} = \ln(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} + C$

20. $\int \frac{2x^3+x^2+4}{(x^2+4)^2}\,dx = \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\text{arc tag}\,\frac{1}{2}x + \frac{4}{x^2+4} + C$

21. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2}\,dx = \ln\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\text{arc tag}\,x - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + C$

22. $\int \frac{x^4+8x^3-x^2+2x+1}{(x^2+x)(x^3+1)}\,dx = \ln\left|\frac{x^3-x^2+x}{(x+1)^2}\right| - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arc tag}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$

23. $\int \frac{x^3+x^2-5x+15}{(x^2+5)(x^2+2x+3)}\,dx = \ln\sqrt{x^2+2x+3} + \frac{5}{\sqrt{2}}\text{arc tag}\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} - \sqrt{5}\,\text{arc tag}\,\frac{x}{\sqrt{5}} + C$

24. $\int \frac{x^6+7x^5+15x^4+32x^3+23x^2+25x-3}{(x^2+x+2)^2(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{x^2+x+2} - \frac{3}{x^2+1} + \ln\frac{x^2+1}{x^2+x+2} + C$

25. $\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x} = \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9}\ln\left|\frac{e^x-3}{e^x}\right| + C$ (Hacer $e^x = u$.)

26. $\int \frac{\text{sen}\,x\,dx}{\cos x\,(1+\cos^2 x)} = \ln\left|\frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos x}\right| + C$ (Hacer $\cos x = u$.)

27. $\int \frac{(2+\text{tag}^2\,\theta)\sec^2\theta\,d\theta}{1+\text{tag}^3\,\theta} = \ln|1+\text{tag}\,\theta| + \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arc tag}\,\frac{2\,\text{tag}\,\theta-1}{\sqrt{3}} + C$

Capítulo 30

Diversos cambios de variable

INTEGRANDO RACIONAL de la forma:

1. $\sqrt[n]{au + b}$. Se transforma en racional mediante el cambio de variable $au + b = z^n$.
2. $\sqrt{q + pu + u^2}$. Se transforma en racional mediante el cambio de variable $q + pu + u^2 = (z - u)^2$.
3. $\sqrt{q + pu - u^2} = \sqrt{(\alpha + u)(\beta - u)}$. Se transforma en racional mediante el cambio de variable $q + pu - u^2 = (\alpha + u)^2 z^2$, o bien $q + pu - u^2 = (\beta - u)^2 z^2$.

(Ver Problemas 1-5.)

EL CAMBIO DE VARIABLE $u = 2 \text{ arc tag } z$ transforma una función racional de sen u y cos u en una función de z,

$$\text{sen } u = \frac{2z}{1+z^2}, \qquad \cos u = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \qquad \text{y} \qquad du = \frac{2\,dz}{1+z^2}$$

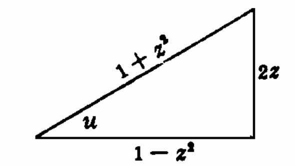


Fig. 30-1

Las dos primeras relaciones se deducen de la Fig. 30-1 y la tercera, diferenciando la expresión

$$u = 2 \text{ arc tag } z$$

Después de efectuar la integración se deshace el cambio, es decir, $z = \text{tag } \frac{1}{2}u$, con objeto de expresar el resultado en función de la variable original.

(Ver Problemas 6-10.)

OTROS CAMBIOS DE VARIABLE. Según la forma que presente el integrando se pueden aplicar otros cambios de variable de suma utilidad en el cálculo de integrales.

(Ver Problemas 11-12.)

Problemas resueltos

1. Calcular $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$. Haciendo $1 - x = z^2$, tendremos $x = 1 - z^2$, $dx = -2z\,dz$, y

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} = \int \frac{-2z\,dz}{(1-z^2)z} = -2\int \frac{dz}{1-z^2} = -\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + C = \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right| + C$$

2. Calcular $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$. Haciendo $x + 2 = z^2$, tendremos $x = z^2 - 2$, $dx = 2z\,dz$, y

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}} = \int \frac{2z\,dz}{z(z^2-4)} = 2\int \frac{dz}{z^2-4} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}+2}\right| + C$$

3. Calcular $\int \frac{dx}{x^{1/2} - x^{1/4}}$. Haciendo $x = z^4$, tendremos $dx = 4z^3\,dz$ y

$$\int \frac{dx}{x^{1/2}-x^{1/4}} = \int \frac{4z^3\,dz}{z^2-z} = 4\int \frac{z^2}{z-1}\,dz = 4\int \left(z + 1 + \frac{1}{z-1}\right)dz$$
$$= 4(\tfrac{1}{2}z^2 + z + \ln|z-1|) + C = 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + \ln(\sqrt[4]{x} - 1)^4 + C$$

4. Calcular $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}}$. Haciendo $x^2 + x + 2 = (z - x)^2$, tendremos

$$x = \frac{z^2-2}{1+2z}, \quad dx = \frac{2(z^2+z+2)\,dz}{(1+2z)^2}, \quad \sqrt{x^2+x+2} = \frac{z^2+z+2}{1+2z}, \quad \text{y}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}} = \int \frac{\frac{2(z^2+z+2)}{(1+2z)^2}}{\frac{z^2-2}{1+2z}\cdot\frac{z^2+z+2}{1+2z}}\,dz = 2\int \frac{dz}{z^2-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+2}+x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+x+2}+x+\sqrt{2}}\right| + C$$

5. Calcular $\int \frac{x\,dx}{(5-4x-x^2)^{3/2}}$. Haciendo $5 - 4x - x^2 = (5 + x)(1 - x) = (1 - x)^2z^2$, tendremos

$$x = \frac{z^2-5}{1+z^2}, \quad dx = \frac{12z\,dz}{(1+z^2)^2}, \quad \sqrt{5-4x-x^2} = (1-x)z = \frac{6z}{1+z^2}, \quad \text{y}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(5-4x-x^2)^{3/2}} = \int \frac{\frac{z^2-5}{1+z^2}\cdot\frac{12z}{(1+z^2)^2}}{\frac{216z^3}{(1+z^2)^3}}\,dz = \frac{1}{18}\int\left(1-\frac{5}{z^2}\right)dz$$

$$= \frac{1}{18}\left(z+\frac{5}{z}\right) + C = \frac{5-2x}{9\sqrt{5-4x-x^2}} + C$$

6. $$\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x-\cos x} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}-\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{z(1+z)} = \ln|z| - \ln|1+z| + C$$

$$= \ln\left|\frac{z}{1+z}\right| + C = \ln\left|\frac{\operatorname{tag}\frac{1}{2}x}{1+\operatorname{tag}\frac{1}{2}x}\right| + C$$

7. $$\int \frac{dx}{3-2\cos x} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{3-2\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{2\,dz}{1+5z^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\operatorname{arc\,tag} z\sqrt{5} + C$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}\operatorname{arc\,tag}(\sqrt{5}\operatorname{tag}\tfrac{1}{2}x) + C$$

8. $$\int \sec x\,dx = \int \frac{1+z^2}{1-z^2}\cdot\frac{2\,dz}{1+z^2} = 2\int\frac{dz}{1-z^2} = \ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\operatorname{tag}\frac{1}{2}x}{1-\operatorname{tag}\frac{1}{2}x}\right| + C$$

$$= \ln|\operatorname{tag}(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}\pi)| + C$$

9. $$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{2+\frac{1-z^2}{1+z^2}} = 2\int\frac{dz}{3+z^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tag}\frac{z}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tag}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tag}\tfrac{1}{2}x\right) + C$$

10. $$\int \frac{dx}{5+4\operatorname{sen} x} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{5+4\frac{2z}{1+z^2}} = \int\frac{2\,dz}{5+8z+5z^2} = \frac{2}{5}\int\frac{dz}{(z+\frac{4}{5})^2+\frac{9}{25}}$$

$$= \frac{2}{3}\operatorname{arc\,tag}\frac{z+4/5}{3/5} + C = \frac{2}{3}\operatorname{arc\,tag}\frac{5\operatorname{tag}\frac{1}{2}x+4}{3} + C$$

11. Por medio del cambio de variable $1 - x^3 = z^2$ calcular $\int x^5\sqrt{1-x^3}\,dx$. $x^3 = 1 - z^2$, $3x^2\,dx = -2z\,dz$, y

$$\int x^5\sqrt{1-x^3}\,dx = \int x^3\sqrt{1-x^3}\cdot x^2\,dx = \int(1-z^2)z(-\tfrac{2}{3}z\,dz) = -\frac{2}{3}\int(1-z^2)z^2\,dz$$

$$= -\frac{2}{3}\left(\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5}\right) + C = -\frac{2}{45}(1-x^3)^{3/2}(2+3x^3) + C$$

12. Haciendo $x = \frac{1}{z}$, calcular $\int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x^4}\,dx$. Tendremos $dx = -\frac{dz}{z^2}$, $\sqrt{x-x^2} = \frac{1}{z}\sqrt{z-1}$, y

$$\int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x^4}\,dx \;=\; \int \frac{\frac{1}{z}\sqrt{z-1}\left(-\frac{dz}{z^2}\right)}{1/z^4} \;=\; -\int z\sqrt{z-1}\,dz$$

Haciendo $z - 1 = s^2$, tendremos

$$-\int z\sqrt{z-1}\,dz \;=\; -\int (s^2+1)s{\cdot}2s\,ds \;=\; -2\left(\frac{s^5}{5}+\frac{s^3}{3}\right) + C$$

$$=\; -2\left(\frac{(z-1)^{5/2}}{5} + \frac{(z-1)^{3/2}}{3}\right) + C \;=\; -2\left(\frac{(1-x)^{5/2}}{5x^{5/2}} + \frac{(1-x)^{3/2}}{3x^{3/2}}\right) + C$$

Problemas propuestos

13. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx \;=\; 2\sqrt{x} - 2\,\text{arc tag}\,\sqrt{x} + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} \;=\; 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$

15. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+2}} \;=\; 2\sqrt{x+2} - 6\ln(3+\sqrt{x+2}) + C$

16. $\int \frac{1-\sqrt{3x+2}}{1+\sqrt{3x+2}}\,dx \;=\; -x + \frac{4}{3}\left\{\sqrt{3x+2} - \ln(1+\sqrt{3x+2})\right\} + C$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} \;=\; \ln\left|2\sqrt{x^2-x+1} + 2x - 1\right| + C$

18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}} \;=\; 2\,\text{arc tag}\,(\sqrt{x^2+x-1} + x) + C$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{6+x-x^2}} \;=\; \text{arc sen}\,\frac{2x-1}{5} + C$

20. $\int \frac{\sqrt{4x-x^2}}{x^3}\,dx \;=\; -\frac{(4x-x^2)^{3/2}}{6x^3} + C$

21. $\int \frac{dx}{(x+1)^{1/2} + (x+1)^{1/4}} \;=\; 2(x+1)^{1/2} - 4(x+1)^{1/4} + 4\ln(1+(x+1)^{1/4}) + C$

22. $\int \frac{dx}{2+\text{sen}\,x} \;=\; \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arc tag}\,\frac{2\,\text{tag}\,\frac{1}{2}x + 1}{\sqrt{3}} + C$

23. $\int \frac{dx}{1-2\,\text{sen}\,x} \;=\; \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{\text{tag}\,\frac{1}{2}x - 2 - \sqrt{3}}{\text{tag}\,\frac{1}{2}x - 2 + \sqrt{3}}\right| + C$

24. $\int \frac{dx}{3+5\,\text{sen}\,x} \;=\; \frac{1}{4}\ln\left|\frac{3\,\text{tag}\,\frac{1}{2}x + 1}{\text{tag}\,\frac{1}{2}x + 3}\right| + C$

25. $\int \frac{dx}{\text{sen}\,x - \cos x - 1} \;=\; \ln\left|\text{tag}\,\frac{1}{2}x - 1\right| + C$

26. $\int \frac{dx}{5+3\,\text{sen}\,x} \;=\; \frac{1}{2}\,\text{arc tag}\,\frac{5\,\text{tag}\,\frac{1}{2}x + 3}{4} + C$

27. $\int \frac{\text{sen}\,x\,dx}{1+\text{sen}^2 x} \;=\; \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\text{tag}^2\,\frac{1}{2}x + 3 - 2\sqrt{2}}{\text{tag}^2\,\frac{1}{2}x + 3 + 2\sqrt{2}}\right| + C$

28. $\int \frac{dx}{1+\text{sen}\,x+\cos x} \;=\; \ln\left|1 + \text{tag}\,\frac{1}{2}x\right| + C$

29. $\int \frac{dx}{2-\cos x} \;=\; \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arc tag}\,(\sqrt{3}\,\text{tag}\,\frac{1}{2}x) + C$

30. $\int \text{sen}\sqrt{x}\,dx \;=\; -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\,\text{sen}\sqrt{x} + C$

31. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x-1}} \;=\; -\text{arc sen}\,\frac{1-x}{2x} + C$ Hacer $x = 1/z$.

32. $\int \frac{(e^x-2)e^x}{e^x+1}\,dx \;=\; e^x - 3\ln(e^x+1) + C$ Hacer $e^x + 1 = z$.

33. $\int \frac{\text{sen}\,x\cos x}{1-\cos x}\,dx \;=\; \cos x + \ln(1-\cos x) + C$ Hacer $\cos x = z$.

34. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} \;=\; -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$ Hacer $x = 2/z$.

35. $\int \frac{dx}{x^2(4+x^2)} \;=\; -\frac{1}{4x} + \frac{1}{8}\,\text{arc tag}\,\frac{2}{x} + C$

36. $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx \;=\; \frac{4}{5}(1+\sqrt{x})^{5/2} - \frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{3/2} + C$

37. $\int \frac{dx}{3(1-x^2) - (5+4x)\sqrt{1-x^2}} \;=\; \frac{2\sqrt{1+x}}{3\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + C$

Capítulo 31

Integración de funciones hiperbólicas

FORMULAS DE INTEGRACION

$$\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C \qquad \int \operatorname{sech}^2 u\, du = \operatorname{tagh} u + C$$

$$\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C \qquad \int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$$

$$\int \operatorname{tagh} u\, du = \ln \cosh u + C \qquad \int \operatorname{sech} u \operatorname{tagh} u\, du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\int \coth u\, du = \ln|\operatorname{senh} u| + C \qquad \int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a} + C \qquad \int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{tagh}^{-1}\frac{u}{a} + C, \quad u^2 < a^2$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{u}{a} + C, \quad u > a > 0 \qquad \int \frac{du}{u^2-a^2} = -\frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{u}{a} + C, \quad u^2 > a^2$$

Problemas resueltos

1. $\int \operatorname{senh} \tfrac{1}{2}x\, dx = 2\cosh \tfrac{1}{2}x + C$

2. $\int \cosh 2x\, dx = \tfrac{1}{2}\operatorname{senh} 2x + C$

3. $\int \operatorname{sech}^2 (2x-1)\, dx = \tfrac{1}{2}\operatorname{tagh}(2x-1) + C$

4. $\int \operatorname{csch} 3x \coth 3x\, dx = -\tfrac{1}{3}\operatorname{csch} 3x + C$

5. $\int \operatorname{sech} x\, dx = \int \frac{1}{\cosh x}dx = \int \frac{\cosh x}{\cosh^2 x} = \int \frac{\cosh x}{1+\operatorname{senh}^2 x}dx = \operatorname{arc\,tag}(\operatorname{senh} x) + C$

6. $\int \operatorname{senh}^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cosh 2x - 1)\, dx = \tfrac{1}{4}\operatorname{senh} 2x - \tfrac{1}{2}x + C$

7. $\int \operatorname{tagh}^2 2x\, dx = \int (1-\operatorname{sech}^2 2x)\, dx = x - \tfrac{1}{2}\operatorname{tagh} 2x + C$

8. $\int \cosh^3 \tfrac{1}{2}x\, dx = \int (1+\operatorname{senh}^2 \tfrac{1}{2}x)\cosh \tfrac{1}{2}x\, dx = 2\operatorname{senh}\tfrac{1}{2}x + \tfrac{2}{3}\operatorname{senh}^3 \tfrac{1}{2}x + C$

9. $\int \operatorname{sech}^4 x\, dx = \int (1-\operatorname{tagh}^2 x)\operatorname{sech}^2 x\, dx = \operatorname{tagh} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{tagh}^3 x + C$

10. $\int e^x \cosh x\, dx = \int e^x\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int (e^{2x}+1)\, dx = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}x + C$

11. $\int x \operatorname{senh} x\, dx = \int x\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int xe^x\, dx - \frac{1}{2}\int xe^{-x}\, dx$

$$= \frac{1}{2}(xe^x - e^x) - \frac{1}{2}(-xe^{-x} - e^{-x}) + C = x\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) - \frac{e^x-e^{-x}}{2} + C$$

$$= x\cosh x - \operatorname{senh} x + C$$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}} = \frac{1}{2}\cosh^{-1}\frac{2x}{3} + C$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2-25} = -\frac{1}{15}\coth^{-1}\frac{3x}{5} + C$

14. Calcular $\int \sqrt{x^2+4}\,dx$. Haciendo $x = 2\,\text{senh}\,z$, tendremos $dx = 2\cosh z\,dz$, $\sqrt{x^2+4} = 2\cosh z$, y

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = 4\int \cosh^2 z\,dz = 2\int (\cosh 2z + 1)\,dz = \text{senh}\,2z + 2z + C$$
$$= 2\,\text{senh}\,z\cosh z + 2z + C = \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+4} + 2\,\text{senh}^{-1}\tfrac{1}{2}x + C$$

15. Calcular $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$. Haciendo $x = \text{sech}\,z$, tendremos $dx = -\text{sech}\,z\,\text{tagh}\,z\,dz$, $1 - x^2 = \text{tagh}\,z$, y

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{\text{sech}\,z\;\text{tagh}\,z}{\text{sech}\,z\;\text{tagh}\,z}\,dz = -\int dz = -z + C = -\text{sech}^{-1}x + C$$

Problemas propuestos

16. $\int \text{senh}\,3x\,dx = \frac{1}{3}\cosh 3x + C$

17. $\int \cosh\frac{1}{4}x\,dx = 4\,\text{senh}\,\frac{1}{4}x + C$

18. $\int \coth\frac{3}{2}x\,dx = \frac{2}{3}\ln|\text{senh}\,\frac{3}{2}x| + C$

19. $\int \text{csch}^2(1+3x)\,dx = -\frac{1}{3}\coth(1+3x) + C$

20. $\int \text{sech}\,2x\;\text{tagh}\,2x\,dx = -\frac{1}{2}\,\text{sech}\,2x + C$

21. $\displaystyle\int \text{csch}\,x\,dx = \ln\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}} + C$

22. $\int \cosh^2\frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2}(\text{senh}\,x + x) + C$

23. $\int \coth^2 3x\,dx = x - \frac{1}{3}\coth 3x + C$

24. $\int \text{senh}^3 x\,dx = \frac{1}{3}\cosh^3 x - \cosh x + C$

25. $\int e^x\,\text{senh}\,x\,dx = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x + C$

26. $\int e^{2x}\cosh x\,dx = \frac{1}{6}e^{3x} + \frac{1}{2}e^x + C$

27. $\int x\cosh x\,dx = x\,\text{senh}\,x - \cosh x + C$

28. $\int x^2\,\text{senh}\,x\,dx = (x^2+2)\cosh x - 2x\,\text{senh}\,x + C$

29. $\int \text{senh}^3 x\cosh^2 x\,dx = \frac{1}{5}\cosh^5 x - \frac{1}{3}\cosh^3 x + C$

30. $\int \text{senh}\,x\ln\cosh^2 x\,dx = \cosh x\,(\ln\cosh^2 x - 2) + C$

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = \text{senh}^{-1}\frac{x}{3} + C$

32. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}} = \cosh^{-1}\frac{x}{5} + C$

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{4-9x^2} = \frac{1}{6}\,\text{tagh}^{-1}\frac{3}{2}x + C$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{16x^2-9} = -\frac{1}{12}\coth^{-1}\frac{4}{3}x + C$

35. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-9}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-9} - \frac{9}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{3} + C$

36. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+17}} = \text{senh}^{-1}\frac{x-1}{4} + C$

37. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+12x+5} = -\frac{1}{4}\coth^{-1}\left(x+\frac{3}{2}\right) + C$

38. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+4)^{3/2}}\,dx = \text{senh}^{-1}\frac{1}{2}x - \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + C$

39. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx = \text{senh}^{-1}x - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$

Capítulo 32

Aplicaciones de las integrales indefinidas

CONOCIENDO la ecuación de una curva, $y = f(x)$, la pendiente m de la tangente a ella en uno de sus puntos, $P(x, y)$, viene dada por $m = f'(x)$. Recíprocamente, si la pendiente de la tangente en un punto, $P(x, y)$, de una curva es $m = dy/dx = f'(x)$ se puede hallar, por integración, una familia de curvas, $y = f(x) + C$. Para determinar una de ellas en particular es necesario asignar o determinar el valor de la constante C. Esto se puede realizar obligando a que la curva pase por el punto dado.

(Ver Problemas 1-4.)

UNA ECUACION $s = f(t)$, siendo s el espacio y t el tiempo, define de forma completa el movimiento rectilíneo de un cuerpo con respecto a un punto fijo, razón por la cual se denomina ley del movimiento. La velocidad y la aceleración vendrán dadas, en función del tiempo t, por

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t) \quad \text{y} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t)$$

Recíprocamente, si se conoce la velocidad (aceleración) en función del tiempo t y la posición (posición y velocidad) en un instante dado, normalmente el instante inicial $t = 0$, se puede obtener la ley del movimiento.

(Ver Problemas 7-10.)

Problemas resueltos

1. Hallar la ecuación de la familia de curvas cuya pendiente en un punto dado sea igual y de signo contrario al doble de la abscisa en dicho punto. Determinar la curva de la familia que pasa por el punto (1, 1).

Se sabe que $dy/dx = -2x$. Por tanto, $dy = -2x\,dx$, $\int dy = \int -2x\,dx$, e $y = -x^2 + C$. Esta es la ecuación de una familia de parábolas.

Sustituyendo $x = 1$, $y = 1$ en la ecuación de la familia, $1 = -1 + C$ y $C = 2$.
La ecuación de la curva de la familia que pasa por el punto (1, 1) es $y = -x^2 + 2$.

2. Hallar la ecuación de la familia de curvas cuya pendiente en un punto, $P(x, y)$, es $m = 3x^2y$ y determinar la curva de la familia que pasa por el punto (0, 8).

$$m = \frac{dy}{dx} = 3x^2y \quad \text{o} \quad \frac{dy}{y} = 3x^2\,dx. \quad \text{Por tanto} \quad \ln y = x^3 + C = x^3 + \ln c \quad \text{e} \quad y = ce^{x^3}.$$

Para $x = 0$ e $y = 8$, $8 = ce^0 = c$. La ecuación de la curva pedida es $y = 8e^{x^3}$.

3. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, 1) y es tangente a la recta $x + 12y = 13$ en dicho punto, sabiendo que en cualquier punto de ella se verifica $y'' = x^2 - 1$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = x^2 - 1. \quad \text{Por tanto} \quad \int \frac{d}{dx}(y')\,dx = \int (x^2 - 1)\,dx \quad \text{e} \quad y' = \frac{x^3}{3} - x + C_1.$$

En el punto (1, 1) la pendiente y' de la curva es igual a la pendiente, $-1/12$, de la recta. Por tanto, $-1/12 = \frac{1}{3} - 1 + C_1$ $C_1 = 7/12$, con lo cual

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{7}{12}, \quad \int dy = \int \left(\frac{1}{3}x^3 - x + \frac{7}{12}\right) dx, \quad y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{12}x + C_2$$

En (1, 1), $1 = \frac{1}{12} - \frac{1}{2} + \frac{7}{12} + C_2$ y $C_2 = \frac{5}{6}$. La ecuación pedida es $y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{12}x + \frac{5}{6}$.

4. La familia de *curvas ortogonales* a un sistema de curvas dado es otro sistema de curvas en el que cada una de ellas corta en ángulo recto a cualquiera de la familia dada. Hallar la ecuación de la familia de curvas ortogonales a la familia de hipérbolas $x^2 - y^2 = c$.

En un punto cualquiera, $P(x, y)$, la pendiente de la hipérbola que pasa por él es $m_1 = x/y$ y, por tanto, la pendiente de la curva ortogonal que pasa por P será, $m_2 = dy/dx = -y/x$. Así pues,

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = -\ln|x| + \ln C' \quad \text{y} \quad |xy| = C'$$

La ecuación pedida es $xy = \pm C'$ o, simplemente, $xy = C$.

5. El incremento respecto del tiempo de una cierta magnitud q es proporcional al valor de dicha magnitud. Sabiendo que en el instante inicial $t = 0$, $q = 25$, y que en el instante $t = 2$, $q = 75$, hallar el valor de q en el instante $t = 6$.

Como $\dfrac{dq}{dt} = kq$, tendremos $\dfrac{dq}{q} = k\,dt$. De donde $\ln q = kt + \ln c$ o sea, $q = ce^{kt}$.

Para $t = 0$, $q = 25 = ce^0 = c$; o sea, $q = 25e^{kt}$.
Para $t = 2$, $q = 25e^{2k} = 75$; es decir, $e^{2k} = 3 = e^{1,10}$ y $k = 0{,}55$.
Para $t = 6$, $q = 25e^{0,55t} = 25e^{3,3} = 25(e^{1,1})^3 = 25(27) = 675$.

6. La velocidad con que una sustancia se transforma en otra es proporcional a la cantidad que queda sin transformar. Sabiendo que la cantidad de sustancia inicialmente presente es igual a 50 y que en el instante $t = 3$ es igual a 25, hallar el tiempo que transcurre hasta que la cantidad que queda sin transformar sea igual a $^1/_{10}$ de la inicial.

Si representamos por q la cantidad transformada en tiempo t; entonces

$$\frac{dq}{dt} = k(50 - q), \quad \frac{dq}{50 - q} = k\,dt, \quad \ln(50 - q) = -kt + \ln c, \quad \text{y} \quad 50 - q = de^{-kt}$$

Para $t = 0$, $q = 0$ y $c = 50$; por tanto, $50 - q = 50e^{-kt}$.
Para $t = 3$, $50 - q = 25 = 50e^{-3k}$; es decir, $e^{-3k} = 0{,}5 = e^{-0,69}$, $k = 0{,}23$, y $50 - q = 50e^{-0,23t}$,
Cuando la cantidad sin transformar es 5, $50e^{-0,23t} = 5$; o sea, $e^{-0,23t} = 0{,}1 = e^{-2,30}$ y $t = 10$.

7. Se lanza una pelota rodando por una superficie horizontal con una velocidad inicial de 25 metros por segundo. Debido al rozamiento, la velocidad disminuye a razón de 6 metros por segundo cada segundo. Hallar el espacio que recorrerá la pelota hasta detenerse.

$\dfrac{dv}{dt} = -6$ y $v = -6t + C_1$. Para $t = 0$, $v = 25$; por tanto $C_1 = 25$ y $v = -6t + 25$.

$v = ds/dt = -6t + 25$ y $s = -3t^2 + 25t + C_2$. Para $t = 0$, $s = 0$; por tanto $C_2 = 0$ y $s = -3t^2 + 25t$.
Para $v = 0$, $t = 25/6$, es decir, la pelota rueda durante 25/6 seg hasta que se detiene.
Para $t = 25/6$, $s = -3(25/6)^2 + 25(25/6) = -625/12 + 625/6 = 625/12$ m.

8. Desde un globo en reposo situado a una altura de 3 000 metros sobre la tierra, se lanza un objeto verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial de 15 metros por segundo.

Suponiendo que la aceleración de la gravedad, g, es de 10 metros por segundo cada segundo, hallar la posición del objeto, y su velocidad, 20 segundos después de iniciado el descenso.

Tomando la vertical hacia arriba como sentido positivo, cuando el objeto abandone el globo,

$$a = dv/dt = -10 \text{ m/s}^2, \text{ de donde } v = -10t + C_1$$

Para $t = 0$, $v = -15$; por tanto, $C_1 = -15$. En estas condiciones $v = ds/dt = -10t - 15$, de donde $s = -5t^2 - 15t + C_2$.
Para $t = 0$, $s = 3\,000$; por tanto, $C_2 = 3\,000$, con lo que $s = -5t^2 - 15t + 3\,000$.
Para $t = 20$, $s = -5(20)^2 - 15(20) + 3\,000 = 700$ y $v = -10(20) - 15 = -215$.
Al cabo de 20 segundos, el objeto está a una altura de 700 metros sobre la tierra y su velocidad es de 215 m/s.

9. Desde un globo que se eleva a una velocidad de 15 metros por segundo, se deja caer un objeto cuando la altura de aquél sobre la tierra es de 200 metros. Hallar, suponiendo el valor de 10 metros por segundo cada segundo para la aceleración de la gravedad, g:

(a) la máxima altura sobre la tierra a la que llega a estar el objeto.
(b) el tiempo que está el objeto en el aire.
(c) la velocidad del objeto cuando llega al suelo.

Tomando la vertical hacia arriba como sentido positivo, tendremos:

$$a = dv/dt = -10 \text{ m/s}^2, \text{ de donde } v = -10t + C_1$$

Para $t = 0$, $v = 15$; por tanto $C_1 = 15$. En estas condiciones $v = ds/dt = -10t + 15$, con lo que $s = -5t^2 + 15t + C_2$.
Para $t = 0$, $s = 200$; por tanto, $C_2 = 200$, de donde $s = -5t^2 + 15t + 200$.

(a) Cuando $v = 0$, $t = 3/2$ y $s = -5(3/2)^2 + 15(3/2) + 200 = 211{,}25$. La máxima altura alcanzada por el objeto es de 211,25 metros.
(b) Cuando $s = 0$, $-5t^2 + 15t + 200 = 0$, de donde $t = 8$. El objeto está en el aire durante 8 segundos.
(c) Cuando $t = 8$, $v = -10(8) + 15 = -65$. El objeto llega al suelo con una velocidad de 65 m/s.

10. La velocidad con que sale el agua por un orificio situado a una distancia de h metros con respecto a la superficie es $0,6\sqrt{2gh}$ metros por segundo, siendo la aceleración de la gravedad de 9,8 metros por segundo cada segundo. Hallar el tiempo que tardará en vaciarse un depósito cilíndrico de 1,5 metros de altura y 30 centímetros de radio a través de un orificio de 2 centímetros de diámetro situado en el fondo.

Sea h la profundidad del agua en el instante t. El agua que sale en un tiempo dt, forma un cilindro de vdt metros de altura, 0,01 metros de radio y $\pi(0{,}01)^2\, v\, dt = 0{,}6\pi(0{,}01)^2\sqrt{2gh}\, dt$ metros cúbicos de volumen.

Si llamamos $-dh$ al descenso de la superficie del agua, la disminución de volumen es $-\pi(0{,}3)^2 dh$ metros cúbicos. Por tanto, $0{,}6\pi(0{,}01)^2 \cdot 4{,}42\sqrt{h}\, dt = -\pi(0{,}3)^2 dh$, o sea, $dt = -(340\, dh)/\sqrt{h}$, de donde $t = -680\sqrt{h} + C$. Para $t = 0$, $h = 1{,}5$ y $C = 680\sqrt{1{,}5}$; por tanto, $t = -680\sqrt{h} + 680\sqrt{1{,}5}$. Cuando el depósito esté vacío, $h = 0$, y $t = 680\sqrt{1{,}5}$ seg $= 14$ min, aproximadamente.

Problemas propuestos

11. Hallar la ecuación de la familia de curvas cuya pendiente es la indicada y la ecuación de la curva de la familia que pasa por el punto dado.

(*a*) $m = 4x$; (1, 5) (*c*) $m = (x - 1)^3$; (3, 0) (*e*) $m = x/y$; (4, 2) (*g*) $m = 2y/x$; (2, 8)
(*b*) $m = \sqrt{x}$; (9, 18) (*d*) $m = 1/x^2$; (1, 2) (*f*) $m = x^2/y^3$; (3, 2) (*h*) $m = xy/(1 + x^2)$; (3, 5)

Sol. (*a*) $y = 2x^2 + C$; $y = 2x^2 + 3$
(*b*) $3y = 2x^{3/2} + C$; $3y = 2x^{3/2}$
(*c*) $4y = (x - 1)^4 + C$; $4y = (x - 1)^4 - 16$
(*d*) $xy = Cx - 1$; $xy = 3x - 1$
(*e*) $x^2 - y^2 = C$; $x^2 - y^2 = 12$
(*f*) $3y^4 = 4x^3 + C$; $3y^4 = 4x^3 - 60$
(*g*) $y = Cx^2$; $y = 2x^2$
(*h*) $y^2 = C(1 + x^2)$; $2y^2 = 5(1 + x^2)$

12. (*a*) Hallar la ecuación de una curva sabiendo que pasa por el punto $P(2,6)$ en el que la pendiente es igual a 10 y que, en cualquier punto de ella, se verifica que $y'' = 2$. *Sol.* $y = x^2 + 6x - 10$.

(*b*) Hallar la ecuación de una curva sabiendo que pasa por el punto $P(1,0)$ en el que la pendiente es igual a 4 y que, en cualquiera de sus puntos, se verifica $y'' = 6x - 8$. *Sol.* $y = x^3 - 4x^2 + 9x - 6$.

13. Una partícula con movimiento rectilíneo, parte del origen O, en el instante $t = 0$, con una velocidad v. Hallar el espacio recorrido por la partícula durante el intervalo $t = t_1$ hasta $t = t_2$:

(*a*) $v = 4t + 1$; 0, 4 (*c*) $v = 3t^2 + 2t$; 2, 4 (*e*) $v = 2t - 2$; 0, 5
(*b*) $v = 6t + 3$; 1, 3 (*d*) $v = \sqrt{t} + 5$; 4, 9 (*f*) $v = t^2 - 3t + 2$; 0, 4

Sol. (*a*) 36, (*b*) 30, (*c*) 68, (*d*) $37\frac{2}{3}$, (*e*) 17, (*f*) 17/3.

14. Hallar la ecuación de la familia de curvas cuya subtangente en un punto cualquiera sea igual al doble de la abscisa en ese punto. *Sol.* $y^2 = Cx$.

15. Hallar la ecuación de la familia de curvas ortogonales a la familia de parábolas $y^2 = 2x + C$. *Sol.* $y = Ce^{-x}$.

16. Una partícula con movimiento rectilíneo parte del origen (en $t = 0$) con una velocidad inicial v_0 y aceleración a. Hallar la posición s en función del tiempo t (ley del movimiento).

(*a*) $a = 32$; $v_0 = 2$ (*b*) $a = -32$; $v_0 = 96$ (*c*) $a = 12t^2 + 6t$; $v_0 = -3$ (*d*) $a = 1/\sqrt{t}$; $v_0 = 4$

Sol. (*a*) $s = 16t^2 + 2t$ (*b*) $s = -16t^2 + 96t$ (*c*) $s = t^4 + t^3 - 3t$ (*d*) $s = \frac{4}{3}(t^{3/2} + 3t)$

17. Un vehículo lleva una velocidad de 15 kilómetros por hora y frena a razón de 0,8 metros por segundo en cada segundo. Hallar el espacio que recorre antes de detenerse. *Sol.* 11 metros.

18. Se lanza verticalmente hacia arriba una partícula desde un punto situado a una altura de 40 metros sobre el suelo con una velocidad inicial de 30 metros por segundo. Hallar (*a*) la velocidad de la partícula cuando está a una altura, de 80 metros, (*b*) el tiempo que tardará en alcanzar la máxima altura, (*c*) la velocidad de la partícula al llegar al suelo. Tómese $g = 10$ m/s². *Sol.* (*a*)10 m/s, (*b*) 4 s, (*c*) 41,2 m/s.

19. Un bloque de hielo desliza hacia abajo por una pendiente con una aceleración de 4 metros por segundo al cuadrado. La pendiente tiene 60 metros de longitud y el bloque emplea en bajar 5 segundos. Hallar la velocidad inicial del bloque y la velocidad que lleva cuando diste 20 metros del fin de la pendiente. *Sol.* 2 m/s; 18 m/s.

20. Hallar la aceleración constante que debe tener una partícula para (*a*) recorrer 50 metros en 5 segundos, (*b*) detenerla en un espacio de 15 metros desde el instante en que su velocidad es de 45 metros por segundo. *Sol.* (*a*) 4 m/s², (*b*) —67,5 m/s².

21. La ley del crecimiento de una cierta bacteria viene dada por $dN/dt = 0{,}25N$. Sabiendo que inicialmente $N = 200$ hallar N en el instante $t = 8$. *Sol.* 1 478.

Capítulo 33

Integral definida

INTEGRAL DEFINIDA. Sea la función $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$. Consideremos el intervalo dividido en n subintervalos $h_1, h_2, \ldots, h_n$, mediante los $(n-1)$ puntos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, siendo $a < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{n-1} < b$ y representemos ahora el punto a por ξ_0 y el b por ξ_n. A las longitudes de los subintervalos $h_1, h_2, \ldots, h_n$, las denominamos $\Delta_1 x = \xi_1 - \xi_0$, $\Delta_2 x$

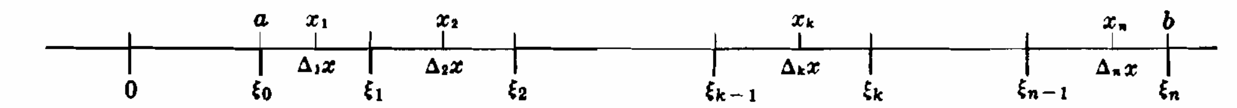


Fig. 33-1

$= \xi_2 - \xi_1, \ldots, \Delta_n x = \xi_n - \xi_{n-1}$, respectivamente. (Estas distancias se consideran con signo, siendo positivas cuando están de acuerdo con la desigualdad anterior.) Elijamos en cada subintervalo un punto; x_1 en h_1, x_2 en $h_2, \ldots, x_n$ en h_n y formemos la suma

(i) $$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x = f(x_1)\,\Delta_1 x + f(x_2)\,\Delta_2 x + \cdots + f(x_n)\,\Delta_n x$$

en la que cada término es igual al producto de la longitud del subintervalo por un valor de la función en el punto elegido del mismo. Sea λ_n la longitud del mayor de los subintervalos que figuran en (i) y supongamos que el número de estos aumenta indefinidamente de forma que $\lambda_n \to 0$. (Una forma de conseguirlo sería dividiendo los subintervalos iniciales en dos partes, cada una de ellas en otras dos, y así sucesivamente.) En estas condiciones,

(ii) $$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x$$

existe y su valor es independiente de la forma de subdividir el intervalo $a \leq x \leq b$ siempre que $\lambda_n \to 0$, y del punto x_k elegido en los subintervalos.

La demostración de este teorema queda fuera del propósito de este libro. En los Problemas 1-3 se halla este límite en el caso de funciones $f(x)$ convenientemente elegidos. Se comprenderá, sin embargo, que este procedimiento no se puede aplicar en la práctica con una función cualquiera. Además, con objeto de poder efectuar los cálculos que aquí figuran es necesario dar alguna relación entre las longitudes de los subintervalos (a los que supondremos todos de igual longitud) y seguir algún criterio en la elección del punto de cada subintervalo (por ejemplo, elegir el extremo izquierdo, el derecho o el punto medio de cada subintervalo).

Por convenio, se escribe

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x$$

El símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ se lee «integral definida de $f(x)$ con respecto a x, desde $x = a$ a $x = b$».

La función $f(x)$ recibe el nombre de *integrando* y a y b el de *límites inferior y superior de integración*, respectivamente.

(Ver Problemas 1-3.)

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA. Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el intervalo de integración $a \leq x \leq b$:

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3. $\displaystyle\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, siendo c una constante.

Ver demostraciones en el Problema 4.

4. $\displaystyle\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

5. $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$, cuando $a < c < b$

6. Primer teorema del valor medio:

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(x_0)$ para al menos un valor $x = x_0$ entre a y b.

Ver demostración en el Problema 5.

7. Si $F(u) = \displaystyle\int_a^u f(x)\,dx$, se verifica $\dfrac{d}{du}F(u) = f(u)$. Ver demostración en el Problema 6.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO INTEGRAL. Regla de Barrow. Si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, y $F(x)$ es la primitiva o integral indefinida da $f(x)$, se verifica

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ver demostración en el Problema 7.

Ejemplo 1:

(*a*) Sea $f(x) = c$, una constante, y $F(x) = cx$; tendremos $\displaystyle\int_a^b c\,dx = cx\Big|_a^b = c(b-a)$.

(*b*) Sea $f(x) = x$ y $F(x) = \frac{1}{2}x^2$; tendremos $\displaystyle\int_0^5 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^5 = \frac{25}{2} - 0 = \frac{25}{2}$.

(*c*) Sea $f(x) = x^3$ y $F(x) = \frac{1}{4}x^4$; tendremos $\displaystyle\int_1^3 x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_1^3 = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20$.

Compárese este resultado con el de los Problemas 1-3. Se deja para el alumno la demostración de que para obtener el valor de (*c*), siendo $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$, se puede utilizar una primitiva o integral indefinida *cualquiera* de $f(x)$.

(Ver Problemas 8-20.)

TEOREMA DE BLISS. Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ y se divide, como antes, este intervalo en subintervalos eligiendo dos puntos en cada uno de ellos (es decir, x_k y x'_k en el k-ésimo subintervalo), se verifica:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot g(x'_k)\,\Delta_k x = \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$$

Observemos en primer lugar que el teorema es cierto si los puntos x_k y x'_k son idénticos. El valor del teorema reside en que cuando los puntos de cada subintervalo son distintos el resultado es el mismo que cuando coinciden. Para probar la validez del teorema, tendremos

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot g(x'_k)\,\Delta_k x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot g(x_k)\,\Delta_k x + \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\{g(x'_k) - g(x_k)\}\,\Delta_k x$$

y observando que cuando $n \to +\infty$ (esto es, $\Delta_k x \to 0$), x_k y x'_k tienden a confundirse y al ser $g(x)$ continua, $g(x'_k) - g(x_k) \to 0$.

Problemas resueltos

Hallar en los Problemas 1-3 las integrales definidas estableciendo el valor S_n y calculando su límite cuando $n \to +\infty$.

1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, siendo c una constante.

Dividamos el intervalo $a \leq x \leq b$ en n subintervalos de longitud $\Delta x = (b-a)/n$. Como el integrando es $f(x) = c$, resulta $f(x_k) = c$, cualquiera que sea el punto x_k del k-enésimo subintervalo y, por tanto,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x = \sum_{k=1}^{n} c(\Delta x) = (c + c + \cdots + c)(\Delta x) = nc \cdot \Delta x = nc\frac{b-a}{n} = c(b-a)$$

Luego $$\int_a^b c\,dx = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} c(b-a) = c(b-a)$$

2. $\int_0^5 x\,dx = 25/2.$

Fig. 33-2

Dividamos el intervalo $0 \leq x \leq 5$ en n subintervalos de longitud $\Delta x = 5/n$. Eligiendo los puntos x_k coincidiendo con el extremo derecho de cada subintervalo, es decir, $x_1 = \Delta x$, $x_2 = 2\,\Delta x, \ldots, x_n = n\,\Delta x$, tendremos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x = \sum_{k=1}^{n} (k \cdot \Delta x)\,\Delta x = (1 + 2 + \cdots + n)(\Delta x)^2 = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{5}{n}\right)^2 = \frac{25}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

y $$\int_0^5 x\,dx = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{25}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{25}{2}$$

3. $\int_1^3 x^3\,dx = 20.$

Dividir el intervalo $1 \leq x \leq 3$ en n subintervalos de longitud $\Delta x = 2/n$

I. Tomemos los puntos x_k coincidiendo con el extremo izquierdo de cada subintervalo, como se indica en la Fig. 33-3, es decir, $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + \Delta x, \ldots, x_n = 1 + (n-1)\,\Delta x$. En estas condiciones,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k n = x_1^3 \cdot \Delta x + x_2^3 \cdot \Delta x + \cdots + x_n^3 \cdot \Delta x \\
&= [1 + (1 + \Delta x)^3 + (1 + 2 \cdot \Delta x)^3 + \cdots + \{1 + (n-1)\,\Delta x\}^3]\,\Delta x \\
&= [n + 3\{1 + 2 + \cdots + (n-1)\}\,\Delta x + 3\{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\}\,(\Delta x)^2 \\
&\qquad + \{1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3\}\,(\Delta x)^3]\,\Delta x \\
&= \left[n + 3\,\frac{(n-1)n}{1 \cdot 2}\left(\frac{2}{n}\right) + 3\,\frac{(n-1)n(2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{(n-1)^2 n^2}{(1 \cdot 2)^2}\left(\frac{2}{n}\right)^3\right]\frac{2}{n} \\
&= 2 + \left(6 - \frac{6}{n}\right) + \left(8 - \frac{12}{n} + \frac{4}{n^2}\right) + \left(4 - \frac{8}{n} + \frac{4}{n^2}\right) = 20 - \frac{26}{n} + \frac{8}{n^2}
\end{aligned}$$

y $$\int_1^3 x^3\,dx = \lim_{n \to +\infty}\left(20 - \frac{26}{n} + \frac{8}{n^2}\right) = 20$$

Fig. 33-3

Fig. 33-4

II. Tomemos los puntos x_k coincidiendo con los puntos medios de los subintervalos, como se indica en la Fig. 33-4; es decir,

$$x_1 = 1 + \tfrac{1}{2}\Delta x,\quad x_2 = 1 + \tfrac{3}{2}\Delta x,\quad \ldots,\quad x_n = 1 + \frac{2n-1}{2}\Delta x. \quad \text{Tendremos}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \left[(1 + \tfrac{1}{2}\Delta x)^3 + (1 + \tfrac{3}{2}\Delta x)^3 + \cdots + \left(1 + \frac{2n-1}{2}\Delta x\right)^3\right]\Delta x \\
&= \Big[\{1 + 3(\tfrac{1}{2})\Delta x + 3(\tfrac{1}{2})^2(\Delta x)^2 + (\tfrac{1}{2})^3(\Delta x)^3\} + \{1 + 3(\tfrac{3}{2})(\Delta x) + 3(\tfrac{3}{2})^2(\Delta x)^2 + (\tfrac{3}{2})^3(\Delta x)^3\} + \cdots \\
&\qquad + \left\{1 + 3\left(\frac{2n-1}{2}\right)(\Delta x) + 3\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2(\Delta x)^2 + \left(\frac{2n-1}{2}\right)^3(\Delta x)^3\right\}\Big]\Delta x \\
&= n\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{3}{2}n^2\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{4}(4n^3 - n)\left(\frac{2}{n}\right)^3 + \frac{1}{8}(2n^4 - n^2)\left(\frac{2}{n}\right)^4 \\
&= 2 + 6 + \left(8 - \frac{2}{n^2}\right) + \left(4 - \frac{2}{n^2}\right) = 20 - \frac{4}{n^2}
\end{aligned}$$

y
$$\int_1^3 x^3\,dx = \lim_{n\to+\infty}\left(20 - \frac{4}{n^2}\right) = 20$$

4. Demostrar que:

(a) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$. La longitud del intervalo de integración es 0; luego $\Delta x = 0$, $S_n = 0$, y

$$\int_a^a f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = 0.$$

Fig. 33-5 Fig. 33-6

(b) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$. Para la integral del primer miembro, dividamos el intervalo $a \le x \le b$ de forma que los puntos x_k sean los indicados en la Fig. 33-5. Para la integral del segundo miembro, elegimos el intervalo (Fig. 33-6) exactamente igual al anterior, excepto que los puntos ξ_k y x_k se numeran de derecha a izquierda en lugar de izquierda a derecha. En estas condiciones, el valor de S_n a partir de lo indicado en la Fig. 33-5 será igual al calculado a partir de la Fig. 33-6, salvo que los signos de $\Delta_k x$ son positivos en el primer caso, y negativos en el segundo. Así pues,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

(c) $\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$. Efectuando apropiadamente la subdivisión del intervalo y la elección de los puntos de los subintervalos,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c\,f(x_k)\,\Delta_k x = c\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x$$

De donde
$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x = c\int_a^b f(x)\,dx$$

5. Demostrar el primer teorema del valor medio del cálculo integral: Si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \le x \le b$, se verifica: $\int_a^b f(x)\,dx = (b - a)\cdot f(x_0)$ al menos para un valor $x = x_0$ comprendido entre a y b.

El teorema es cierto [ver Ejemplo 1 (a)] cuando $f(x) = c$, una constante. En los demás casos, sean m y M el mínimo y el máximo absolutos, respectivamente, de $f(x)$ en el intervalo $a \le x \le b$. Realizando de forma conveniente la subdivisión del intervalo y la elección de los puntos de los subintervalos,

$$\sum_{k=1}^{n} m\,\Delta_k x \quad < \quad \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x \quad < \quad \sum_{k=1}^{n} M\,\Delta_k x$$

Ahora bien, cuando $n \to +\infty$, tenemos

$$\int_a^b m\,dx \quad < \quad \int_a^b f(x)\,dx \quad < \quad \int_a^b M\,dx$$

que, por el Problema 1, se transforma en

$$m(b-a) \quad < \quad \int_a^b f(x)\,dx \quad < \quad M(b-a)$$

Por tanto

$$m \quad < \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad < \quad M$$

de forma que $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = N$, siendo N un número comprendido entre m y M. Como $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$, tomará, al menos una vez, todos los valores comprendidos entre m y M (ver Teorema I, Capítulo 3). Por consiguiente, debe existir un valor de x, $x = x_0$, para el cual $f(x_0) = N$. Así pues,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \;=\; N \;=\; f(x_0) \qquad \text{y} \qquad \int_a^b f(x)\,dx \;=\; (b-a)\,f(x_0)$$

6. Demostrar que si $F(u) = \int_a^u f(x)\,dx$, se verifica $\frac{d}{du}F(u) = f(u)$.

Para calcular la derivada, pondremos

$$F(u+\Delta u) - F(u) \quad = \quad \int_a^{u+\Delta u} f(x)\,dx - \int_a^u f(x)\,dx$$

y según las Propiedades 2, 5 y 6, llegamos a

$$\begin{aligned} F(u+\Delta u) - F(u) \quad &= \quad \int_u^a f(x)\,dx + \int_a^{u+\Delta u} f(x)\,dx \quad = \quad \int_u^{u+\Delta u} f(x)\,dx \\ &= \quad f(u_0)\cdot\Delta u, \quad \text{siendo } u < u_0 < u+\Delta u \end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{F(u+\Delta u) - F(u)}{\Delta u} = f(u_0) \qquad \text{y} \qquad \frac{dF}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{F(u+\Delta u) - F(u)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} f(u_0) = f(u)$$

ya que cuando $\Delta u \to 0$, $u_0 \to u$.

Esta propiedad se suele expresar en la forma:

(i) $$\text{Si } F(x) = \int_a^x f(x)\,dx, \quad \text{se verifica } F'(x) = f(x).$$

El haber empleado la letra u en el desarrollo anterior, es debido a evitar toda confusión entre las diversas x. Obsérvese en (i) que $F(x)$ es una función del límite superior de integración x y no de la letra x que figura en el integrando $f(x)\,dx$. En otras palabras, esta propiedad también se puede expresar en la forma:

$$\text{Si } F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad \text{se verifica } F'(x) = f(x).$$

De (i) se deduce que $F(x)$ es simplemente una primitiva o integral indefinida de $f(x)$.

7. Demostrar que si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ y si $F(x)$ es una integral indefinida de $f(x)$, se verifica

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad F(b) - F(a)$$

Aplicando la última expresión del Problema 6

$$\int_a^x f(x)\,dx \quad = \quad F(x) + C$$

Cuando el límite superior de integración es $x = a$, tenemos

$$\int_a^a f(x)\,dx \;=\; 0 \;=\; F(a) + C \qquad \text{y} \qquad C = -F(a)$$

Así pues, $\int_a^b f(x)\,dx = F(x) - F(a)$ y cuando el límite superior de integración es $x = b$, tenemos lo que queremos demostrar,

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad F(b) - F(a)$$

Aplicar el teorema fundamental del cálculo integral o regla de Barrow para calcular las integrales siguientes.

8. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(2x^2 - x^3)\,dx \;=\; \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} \;=\; \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) \;=\; \frac{4}{3}$

9. $\displaystyle\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)dx \;=\; \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right]_{-3}^{-1} \;=\; \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{18}\right) \;=\; \frac{10}{9}$

10. $\displaystyle\int_{1}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}} \;=\; 2\sqrt{x}\,\Big]_{1}^{4} \;=\; 2(\sqrt{4} - \sqrt{1}) \;=\; 2$

11. $\displaystyle\int_{-2}^{3} e^{-x/2}\,dx \;=\; -2e^{-x/2}\Big]_{-2}^{3} \;=\; -2(e^{-3/2} - e) \;=\; 4{,}9904$

12. $\displaystyle\int_{-6}^{-10}\frac{dx}{x+2} \;=\; \ln|x+2|\,\Big]_{-6}^{-10} \;=\; \ln 8 \,-\, \ln 4 \;=\; \ln 2$

13. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/4}\operatorname{sen} x\,dx \;=\; -\cos x\,\Big]_{\pi/2}^{3\pi/4} \;=\; -\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - 0\right) \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{2}$

14. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+4} \;=\; \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tag}\frac{1}{2}x\,\Big]_{-2}^{2} \;=\; \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\pi - \left(-\frac{1}{4}\pi\right)\right] \;=\; \frac{1}{4}\pi$

15. $\displaystyle\int_{-5}^{-3}\sqrt{x^2-4}\,dx \;=\; \left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} \,-\, 2\ln|\,x + \sqrt{x^2-4}\,|\right]_{-5}^{-3} \;=\; \frac{5}{2}\sqrt{21} - \frac{3}{2}\sqrt{5} - 2\ln\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{21}}$

16. $\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x^2-9} \;=\; \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\,\Bigg]_{-1}^{2} \;=\; \frac{1}{6}\left(\ln\frac{1}{5} - \ln 2\right) \;=\; \frac{1}{6}\ln 0{,}1$

17. $\displaystyle\int_{1}^{e}\ln x\,dx \;=\; \Big[x\ln x \,-\, x\Big]_{1}^{e} \;=\; (e\ln e - e) \,-\, (\ln 1 - 1) \;=\; 1$

18. **Calcular** $\displaystyle\int_{3}^{6} xy\,dx$ **siendo** $x = 6\cos\theta,\ y = 2\operatorname{sen}\theta,$

Expresando x, y, dx, **en función del parámetro** θ **y** $d\theta$, **y escribiendo los nuevos límites de integración correspondientes a los valores del parámetro, se halla la integral que resulta.**

$dx = -6\operatorname{sen}\theta\,d\theta$. Cuando $x = 6\cos\theta = 6,\ \theta = 0$; y cuando $x = 6\cos\theta = 3,\ \theta = \pi/3$. Luego

$$\int_{3}^{6} xy\,dx \;=\; \int_{\pi/3}^{0}(6\cos\theta)(2\operatorname{sen}\theta)(-6\operatorname{sen}\theta)\,d\theta$$

$$=\; -72\int_{\pi/3}^{0}\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta \;=\; -24\operatorname{sen}^3\theta\,\Big]_{\pi/3}^{0} \;=\; -24\{0 - (\sqrt{3}/2)^3\} \;=\; 9\sqrt{3}$$

19. Calcular $\displaystyle\int_{0}^{2\pi/3}\frac{d\theta}{5 + 4\cos\theta}$. $\qquad\displaystyle\int\frac{d\theta}{5+4\cos\theta} \;=\; \int\frac{\dfrac{2\,dz}{1+z^2}}{5 + 4\dfrac{1-z^2}{1+z^2}} \;=\; \int\frac{2\,dz}{9+z^2}.$

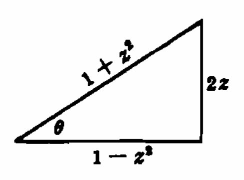


Fig. 33-7

Para determinar los límites de integración de z ($\theta = 2\operatorname{arc\,tag} z$): Cuando $\theta = 0$, $z = 0$; cuando $\theta = 2\pi/3$, $\operatorname{arc\,tag} z = \pi/3$ y $z = \sqrt{3}$. Por tanto,

$$\int_{0}^{2\pi/3}\frac{d\theta}{5+4\cos\theta} \;=\; 2\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{dz}{9+z^2} \;=\; \frac{2}{3}\operatorname{arc\,tag}\frac{z}{3}\Big]_{0}^{\sqrt{3}} \;=\; \frac{\pi}{9}$$

20. Calcular $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x}$. $\quad \int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{1-\frac{2z}{1+z^2}} = \int \frac{2\,dz}{(1-z)^2}$.

Para $x=0$, $\operatorname{arc\,tag} z = 0$ y $z=0$; Para $x=\pi/3$, $\operatorname{arc\,tag} z = \pi/6$ y $z=\sqrt{3}/3$. Por tanto

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x} = 2\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{dz}{(1-z)^2} = \left.\frac{2}{1-z}\right]_0^{\sqrt{3}/3} = \frac{2}{1-\sqrt{3}/3} - 2 = \sqrt{3}+1$$

Problemas propuestos

21. Hallar la integral $\int_a^b c\,dx$ del Problema 1 dividiendo el intervalo $a \le x \le b$ en n subintervalos de longitudes $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \ldots, \Delta_n x$. Obsérvese que $\sum_{k=1}^{n} \Delta_k x = b-a$.

22. Hallar la integral $\int_0^5 x\,dx$ del Problema 2 empleando subintervalos de igual longitud y (*a*) eligiendo los puntos x_k coincidiendo con el extremo izquierdo de los subintervalos, (*b*) eligiendo los puntos x_k coincidiendo con los puntos medios de los subintervalos, (*c*) eligiendo los puntos x_k a un tercio de sus longitudes, es decir, tomando $x_1 = \frac{1}{3}\Delta x$, $x_2 = \frac{4}{3}\Delta x, \ldots$

23. Comprobar que $\int_1^4 x^2\,dx = 21$ empleando subintervalos de igual longitud y eligiendo los puntos x_k (*a*) en el extremo derecho de los subintervalos (*b*) en el extremo izquierdo de los subintervalos, (*c*) en el punto medio de los subintervalos.

24. Con los mismos subintervalos y puntos elegidos en el Problema 23(*a*), calcular las integrales $\int_1^4 x\,dx$ y $\int_1^4 (x^2+x)\,dx$ y demostrar que $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

25. Hallar las integrales $\int_1^2 x^2\,dx$ y $\int_2^4 x^2\,dx$. Comparar la suma con el resultado del Problema 23 y demostrar que

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{cuando } a<c<b.$$

26. Calcular $\int_0^1 e^x\,dx = e-1$.

Ind. $S_n = \sum_{k=1}^{n} e^{k\cdot\Delta x}\Delta x = e^{\Delta x}(e-1)\frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1}$ y $\lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1}$ es una forma indeterminada del tipo 0/0.

27. Demostrar las propiedades 4 y 5 de la integral definida.

28. Aplicar el teorema fundamental o regla de Barrow para calcular:

(*a*) $\int_0^2 (2+x)\,dx = 6$

(*b*) $\int_0^2 (2-x)^2\,dx = 8/3$

(*c*) $\int_0^3 (3-2x+x^2)\,dx = 9$

(*d*) $\int_{-1}^2 (1-t^2)t\,dt = -9/4$

(*e*) $\int_1^4 (1-u)\sqrt{u}\,du = -116/15$

(*f*) $\int_1^8 \sqrt{1+3x}\,dx = 26$

(*g*) $\int_0^2 x^2(x^3+1)\,dx = 40/3$

(*h*) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2$

(*i*) $\int_0^1 x(1-\sqrt{x})^2\,dx = 1/30$

(*j*) $\int_4^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-15}} = 6$

(*k*) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{4}a^2\pi$

(*l*) $\int_{-1}^1 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

(*m*) $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{25-x^2} = \frac{1}{5}\ln\frac{3}{2}$

(*n*) $\displaystyle\int_{-1/2}^0 \frac{x^3\,dx}{x^2+x+1} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{9} - \frac{5}{8}$

(*o*) $\displaystyle\int_2^4 \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}\,dx = 4\ln(2+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}$

(*p*) $\displaystyle\int_8^{27} \frac{dx}{x-x^{1/3}} = \frac{3}{2}\ln\frac{8}{3}$

(*q*) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx = \ln 2 + \tfrac{1}{2}\pi - 2$

(*r*) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}t\,dt = 4$

(*s*) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} x^2 \operatorname{sen} 3x\,dx = \tfrac{1}{27}(\pi^2-4)$

(*t*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+\cos 2x} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{8}$

29. Demostrar que $\displaystyle\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}} = \int_{-5}^{-3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$.

30. Hallar $\displaystyle\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} y\,dx = 3\pi$, siendo $x = \theta - \operatorname{sen}\theta$, $y = 1 - \cos\theta$.

31. Hallar $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \tfrac{15}{2} + \tfrac{1}{4}\ln 2$, siendo $y = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}\ln x$.

32. Hallar $\displaystyle\int_2^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \sqrt{2}\,e^2(e-1)$, siendo $x = e^t\cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$.

33. Por medio de las fórmulas de reducción (Capítulo 26) deducir las fórmulas de Wallis:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \frac{1\cdot 3\ldots(n-3)(n-1)}{2\cdot 4\ldots(n-2)n}\cdot\frac{\pi}{2} \quad \text{si } n \text{ es par y} > 0$$

$$= \frac{2\cdot 4\ldots(n-3)(n-1)}{1\cdot 3\ldots(n-2)n} \quad \text{si } n \text{ es impar y} > 1$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m x\cos^n x\,dx = \frac{1\cdot 3\ldots(m-1)\cdot 1\cdot 3\ldots(n-1)}{2\cdot 4\ldots(m+n-2)(m+n)}\cdot\frac{\pi}{2} \quad \text{si } m \text{ y } n \text{ son pares y} > 0$$

$$= \frac{2\cdot 4\ldots(m-3)(m-1)}{(n+1)(n+3)\ldots(n+m)} \quad \text{si } m \text{ es impar y} > 1$$

$$= \frac{2\cdot 4\ldots(n-3)(n-1)}{(m+1)(m+3)\ldots(m+n)} \quad \text{si es impar y} > 1$$

34. Hallar:

(*a*) $\displaystyle\int_3^{11} \sqrt{2x+3}\,dx = 98/3$

(*b*) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x - 1}{\cos 2x + 1}\,dx = \frac{1}{4}\pi - 1$

(*c*) $\displaystyle\int_4^9 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = 4\ln\frac{3}{4} - 1$

(*d*) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}(e^2+1)$

(*e*) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos^2 x - 5\cos x + 4} = \frac{1}{3}\ln\frac{7+3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}$

(*f*) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x+3}}\,dx = \ln\frac{3-2\sqrt{2}}{4-\sqrt{15}} + 2\sqrt{2} - \sqrt{15}$

(*g*) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\operatorname{sen} 2x} = \ln\sqrt{3}$

(*h*) $\displaystyle\int_1^3 \ln(x+\sqrt{x^2-1})\,dx = 3\ln(3+2\sqrt{2}) - 2\sqrt{2}$

(*i*) $\displaystyle\int_{-1}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \ln(\sqrt{2}-1)$

(*j*) $\displaystyle\int_{1/4}^{3/4} \frac{(x+1)\,dx}{x^2(x-1)} = 4\ln\frac{1}{3} - \frac{8}{3}$

(*k*) $\displaystyle\int_{-6}^{-3} \frac{(x+2)\,dx}{x(x-2)^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} + \frac{1}{5}$

(*l*) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{2+\operatorname{tag} x} = \frac{1}{5}\ln\frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi}{10}$

Capítulo 34

Cálculo de áreas planas por integración

CONCEPTO DE AREA COMO LIMITE DE UNA SUMA. Sea $f(x)$ una función continua no negativa en ningún punto del intervalo cerrado $a \leq x \leq b$; la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k x$ admite una interpretación geométrica sumamente importante. Dividamos el intervalo $a \leq x \leq b$ eligiendo los puntos x_k, como hemos visto en el capítulo anterior y levantemos, desde los extremos $\xi_0 = a, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n = b$, perpendiculares al eje x; la región del plano limitada por la curva, el eje x y las ordenadas en los puntos $x = a$ y $x = b$, quedará dividida en n franjas, cada una de las cuales es, aproximadamente, un rectángulo cuya base está apoyada en el eje x y cuya altura es la ordenada levantada desde el punto x_k del subintervalo correspondiente. El área de la franja representada en la Fig. 34-1 es igual a $f(x_k)\Delta_k x$. Así, pues, la suma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k x$ representa el área de los n rectángulos.

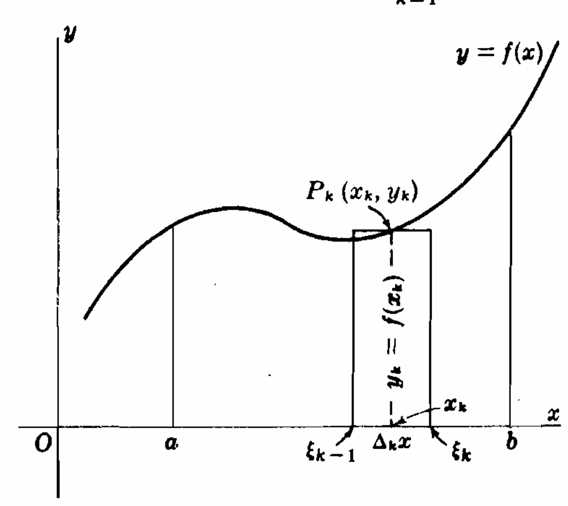


Fig. 34-1

El límite de esta suma, $\int_a^b f(x)\,dx$, cuando el número de franjas crece indefinidamente en la forma indicada en el Capítulo 33 es, por definición, el área de la porción del plano citada anteriormente, o dicho en pocas palabras, el área encerrada por la curva desde $x = a$ hasta $x = b$.

(Ver Problemas 1-2.)

Análogamente, sea $x = g(y)$ una función continua no negativa en ningún punto del intervalo $c \leq y \leq d$; la integral definida $\int_c^d g(y)\,dy$ es, por definición, el área limitada por la curva $x = g(y)$, el eje y y las ordenadas extremas $y = c$ e $y = d$. (Ver Problema 3.)

Si $y = f(x)$ es una función continua que no toma valor positivo en ningún punto del intervalo $a \leq x \leq b$, la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ será negativa, queriendo esto decir que el área está situada por debajo del eje x. De igual forma, si $x = g(y)$ es continua y no toma valor positivo en ningún punto del intervalo $c \leq y \leq d$, la integral $\int_c^d g(y)\,dy$ será negativa y el área estará situada a la izquierda del eje y. (Ver Problema 4.)

Si $y = f(x)$ cambia de signo en el intervalo $a \leq x \leq b$, o si $x = g(y)$ cambia de signo en el $c \leq y \leq d$, el área encerrada por la curva se hallará por medio de dos o más integrales definidas.

(Ver Problema 5.)

CALCULO DE AREAS POR INTEGRACION. Los pasos a tener en cuenta para plantear la integral definida que proporciona el valor del área a calcular son:

(1) Trazar un diagrama en el que figuren (*a*) el área a determinar, (*b*) una franja representativa y (*c*) el rectángulo genérico. Para ello tomaremos, sistemáticamente, el subintervalo representativo de longitud Δx (o Δy) y el punto x_k (o y_k) de este subintervalo en su mitad.

(2) Hallar el área del rectángulo y la suma correspondiente al área de los n rectángulos.

(3) Aplicar la regla de Barrow o teorema fundamental del cálculo integral (Capítulo 33) suponiendo que el número de rectángulos crece indefinidamente.

(Ver Problemas 6-14.)

Problemas resueltos

1. Hallar el área limitada por la curva $y = x^2$, el eje x y las ordenadas en los puntos $x = 1$ y $x = 3$.

En la Fig. 34-2 se representa el área a calcular, *KLMN*, una franja representativa, *RSTU*, y su rectángulo genérico, *RVWU*. La base de este rectángulo es $\Delta_k x$, la altura es $y_k = f(x_k) = x_k^2$ y, por tanto, su área vale $x_k^2 \cdot \Delta_k x$. Así pues,

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \Delta_k x = \int_1^3 x^2\,dx$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} \text{ unidades de superficie}$$

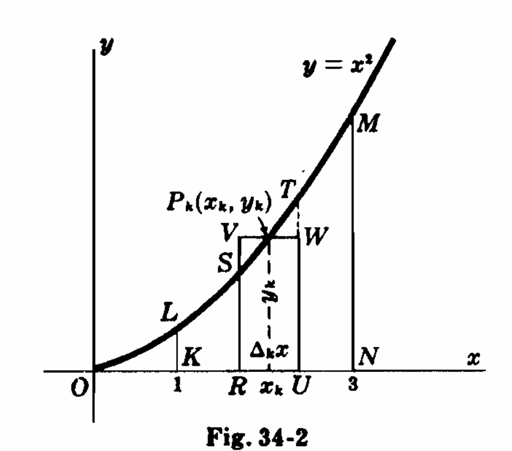


Fig. 34-2

2. Hallar el área comprendida entre el eje x y la parábola $y = 4x - x^2$.

La curva dada corta al eje x en los puntos $x = 0$ y $x = 4$, que serán los límites de integración. La base del rectángulo genérico es $\Delta_k x$, la altura $y_k = 4x_k - x_k^2$, y su área vale $(4x_k - x_k^2) \cdot \Delta_k x$. Por tanto,

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} (4x_k - x_k^2)\,\Delta_k x = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx$$

$$= \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^4 = 32/3 \text{ unidades de superficie}$$

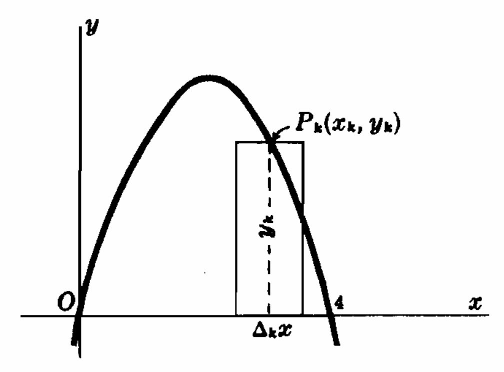


Fig. 34-3

Una vez que el alumno tenga en su mente todas las operaciones a realizar para hallar el valor de un área, es relativamente fácil plantear, directamente, la integral a resolver, una vez conocidos los límites de integración.



3. Hallar el área comprendida entre la parábola $x = 8 + 2y - y^2$, el eje y y las rectas $y = -1$ e $y = 3$.

En este caso, dividimos el área en franjas horizontales. La base del rectángulo genérico (Fig. 34-4) es Δy, la altura es $x = 8 + 2y - y^2$, y su área vale $(8 + 2y - y^2)\,\Delta y$. Por tanto, el área pedida será:

$$\int_{-1}^{3} (8 + 2y - y^2)\,dy = \left[8y + y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{3} = \frac{92}{3} \text{ unidades de superficie}$$

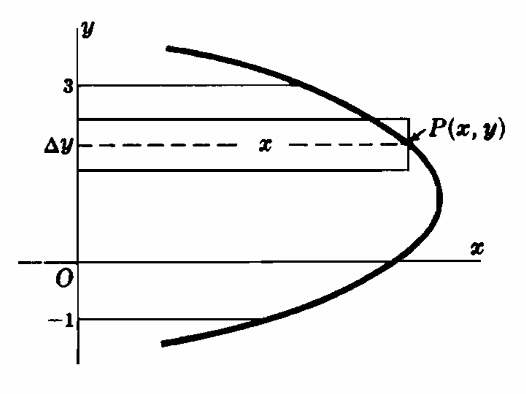


Fig. 34-4

4. Hallar el área limitada por la parábola $y = x^2 - 7x + 6$, el eje x y las rectas $x = 2$ y $x = 6$.

La base del rectángulo genérico (Fig. 34-5) es Δx, la altura es $-y = -(x^2 - 7x + 6)$, y el área vale $-(x^2 - 7x + 6)\,\Delta x$. El área pedida es,

$$A = \int_2^6 -(x^2 - 7x + 6)\,dx = -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x\right)\Big]_2^6$$

$$= \frac{56}{3} \text{ unidades de superficie}$$

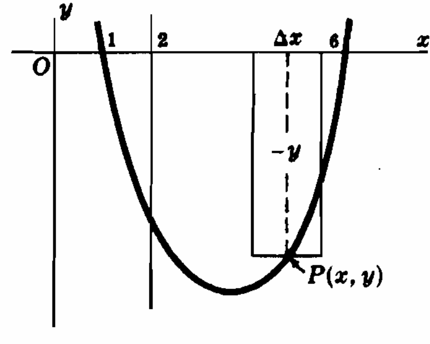


Fig. 34-5

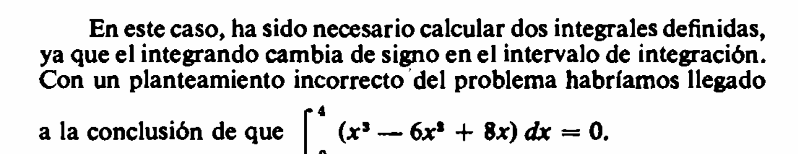
5. Hallar el área comprendida entre la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje x.

La curva corta al eje x en $x = 0$, $x = 2$ y $x = 4$, como se indica en la Fig. 34-6. Trazando franjas verticales, el área del rectángulo genérico, con su base en el intervalo $0 < x < 2$, es $(x^3 - 6x^2 + 8x)\,\Delta x$, y el área situada por encima del eje x vendrá dada por $\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$. El área del rectángulo genérico con su base en el intervalo $2 < x < 4$ vale $-(x^3 - 6x^2 + 8x)\,\Delta x$, y el área situada por debajo del eje x viene dado por $\int_2^4 -(x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$. El área buscada será, en definitiva,

$$A = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx + \int_2^4 -(x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 - \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4$$

$$= 4 + 4 = 8 \text{ unidades de superficie}$$



En este caso, ha sido necesario calcular dos integrales definidas, ya que el integrando cambia de signo en el intervalo de integración. Con un planteamiento incorrecto del problema habríamos llegado a la conclusión de que $\int_0^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx = 0$.

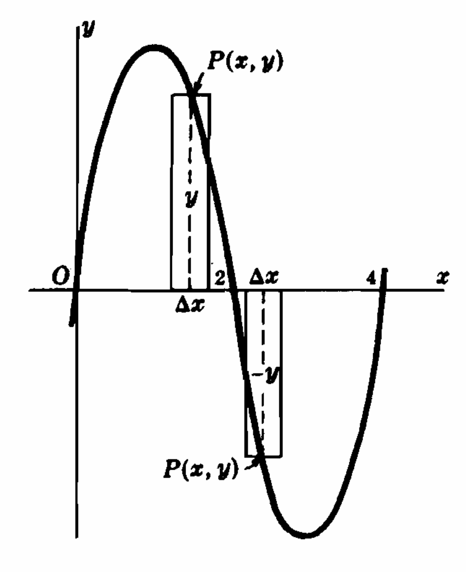


Fig. 34-6

6. Hallar el área comprendida entre la parábola $x = 4 - y^2$ y el eje y.

La parábola corta al eje x en el punto (4, 0) y al eje y en los puntos (0, 2) y (0, —2). Vamos a resolver el problema de dos formas distintas.

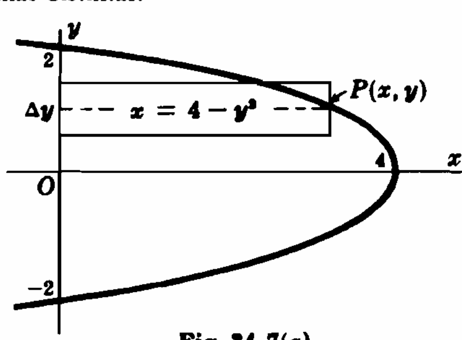


Fig. 34-7(a)

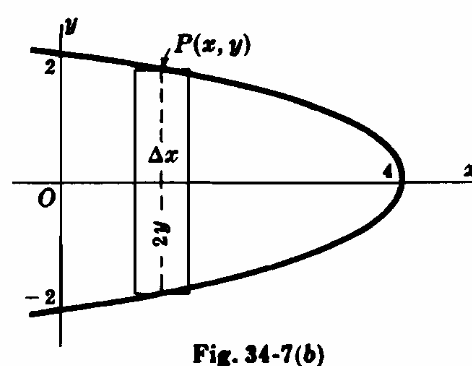


Fig. 34-7(b)

Empleando franjas horizontales. La base del rectángulo genérico [Fig. 34-7(*a*)] es Δy, su altura $4 - y^2$ y su área vale $(4 - y^2)\,\Delta y$. Los límites de integración de la integral definida son $y = -2$ e $y = 2$. Ahora bien, observando que el área situada por debajo del eje x es igual a la situada por encima de él, tendremos:

$$\int_{-2}^{2} (4 - y^2)\,dy = 2\int_0^2 (4 - y^2)\,dy = 2\left(4y - \frac{y^3}{3}\right)\Big]_0^2 = \frac{32}{3} \text{ unidades de superficie}$$

Empleando franjas verticales. La base del rectángulo genérico [Fig. 34-7(*b*)] es Δx, su altura $2y = 2\sqrt{4 - x}$, y su área vale $2\sqrt{4 - x}\,\Delta x$. Los límites de integración son $x = 0$ y $x = 4$. Por tanto, el área será:

$$\int_0^4 2\sqrt{4 - x}\,dx = -\frac{4}{3}(4 - x)^{3/2}\Big]_0^4 = \frac{32}{3} \text{ unidades de superficie}$$

7. Hallar el área comprendida entre la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = 2x - 4$.

La recta corta a la parábola en los puntos (1, —2) y (4, 4). En las figuras se puede observar que, si empleamos franjas verticales, unas van desde una rama de la parábola a la recta y otras desde una rama de la parábola a la otra. Si empleamos franjas horizontales, todas ellas van desde la recta a la parábola. Aquí vamos a resolver el problema de las dos formas para observar cuál de ellas es la más adecuada. Antes de empezar a calcular, conviene considerar, previamente, qué tipo de división del área a resolver es el más apto.

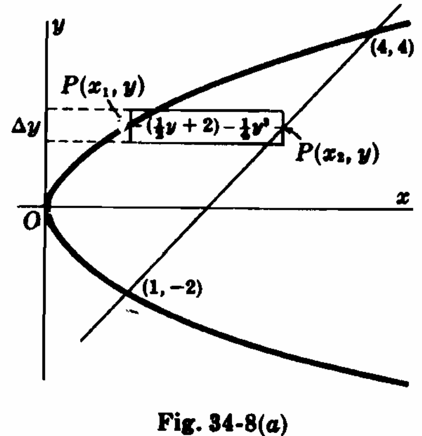


Fig. 34-8(a)

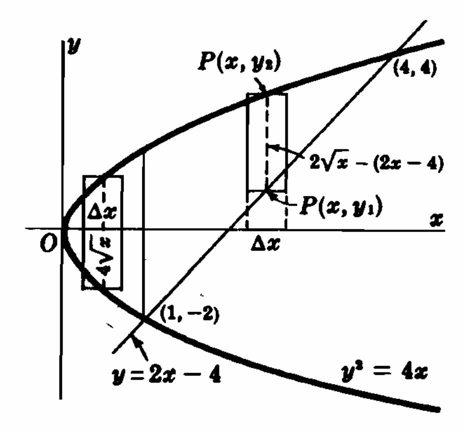


Fig. 34-8(b)

Empleando franjas horizontales. La base del rectángulo genérico [ver Fig. 34-8(*a*)] es Δy, su altura {(valor de x de la recta) — (valor de x de la parábola)} es $(\frac{1}{2}y + 2) - \frac{1}{4}y^2 = 2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2$, y su área vale $(2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2)\Delta y$. El área pedida es

$$\int_{-2}^{4} (2 + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{4}y^2)\,dy \quad = \quad \left[2y + \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{12}\right]_{-2}^{4} \quad = \quad 9 \text{ unidades de superficie}$$

Empleando franjas verticales. Dividimos el área por la recta $x = 1$ [ver Fig. 34-8(*b*)]. El rectángulo genérico, a la izquierda de esta recta, tiene de base Δx, de altura (teniendo en cuenta la simetría de la figura) $2y = 4\sqrt{x}$ y su área vale $4\sqrt{x}\,\Delta x$. El rectángulo genérico, a la derecha de la recta, tiene de base Δx, de altura $2\sqrt{x} - (2x - 4) = 2\sqrt{x} - 2x + 4$ y su área vale $(2\sqrt{x} - 2x + 4)\,\Delta x$. El área pedida es, entonces,

$$\int_0^1 4\sqrt{x}\,dx \; + \; \int_1^4 (2\sqrt{x} - 2x + 4)\,dx \quad = \quad \left[\frac{8}{3}x^{3/2}\right]_0^1 + \left[\frac{4}{3}x^{3/2} - x^2 + 4x\right]_1^4 \quad = \quad \frac{8}{3} + \frac{19}{3} \quad = \quad 9 \text{ un. sup.}$$

8. Hallar el área comprendida entre las parábolas $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$.

Las parábolas se cortan en los puntos (0, 0) y (4, 8). En la figura se observa que lo más adecuado es dividir el área mediante franjas verticales.

El rectángulo genérico tiene de base Δx, de altura, {(valor de y en el límite superior) — (valor de y en el límite inferior)} $= (6x - x^2) - (x^2 - 2x) = 8x - 2x^2$, y su área vale $(8x - 2x^2)\,\Delta x$. El área pedida es

$$\int_0^4 (8x - 2x^2)\,dx \quad = \quad \left[4x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^4 \quad = \quad \frac{64}{3} \text{ un. sup.}$$

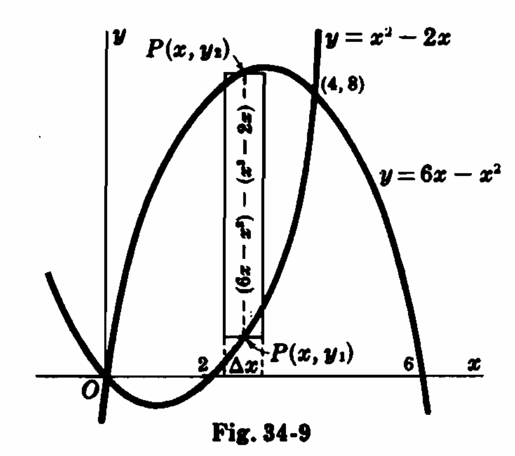


Fig. 34-9

9. Hallar el área limitada por la curva $y^2 = x^2 - x^4$.

La curva es simétrica con respecto a los ejes coordenados. Por tanto, el área será 4 veces la correspondiente al primer cuadrante.

La base del rectángulo genérico es Δx, su altura $y = \sqrt{x^2 - x^4} = x\sqrt{1 - x^2}$, y su área vale $x\sqrt{1 - x^2}\,\Delta x$. El área buscada es, pues,

$$4\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\,dx \quad = \quad \left[-\frac{4}{3}(1 - x^2)^{3/2}\right]_0^1 \quad = \quad \frac{4}{3} \text{ unidades de superficie}$$

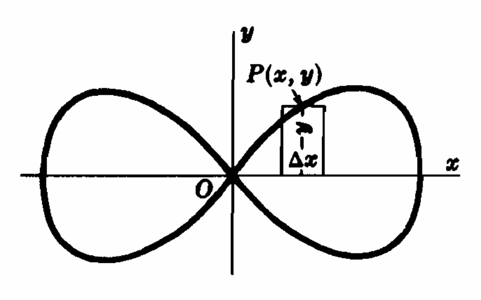


Fig. 34-10

10. Hallar el área del menor de los sectores que la recta $x = 3$ determina en el círculo $x^2 + y^2 = 25$. (Ver Fig. 34-11.)

$$A = \int_3^5 2y\,dx = 2\int_3^5 \sqrt{25 - x^2}\,dx = 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{25 - x^2} + \frac{25}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{5}\right]_3^5$$
$$= \left(\frac{25}{2}\pi - 12 - 25\operatorname{arc\,sen}\frac{3}{5}\right) \text{ unidades de superficie}$$

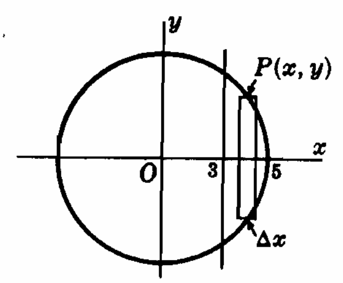


Fig. 34-11

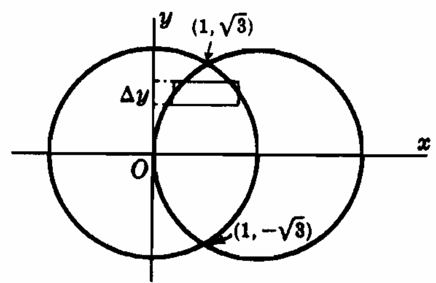


Fig. 34-12

11. Hallar el área de la intersección de los círculos $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 4x$. (Ver Fig. 34-12.)

Los círculos se cortan en los puntos $(1, \pm\sqrt{3})$.

El rectángulo genérico se extiende desde $x = 2 - \sqrt{4 - y^2}$ hasta $x = \sqrt{4 - y^2}$.

$$A = 2\int_0^{\sqrt{3}} \{\sqrt{4 - y^2} - (2 - \sqrt{4 - y^2})\}\,dy = 4\int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4 - y^2} - 1)\,dy$$
$$= 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{4 - y^2} + 2\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{2}y - y\right]_0^{\sqrt{3}} = \left(\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right) \text{ unidades de superficie}$$

12. Hallar el área limitada por la curva $y^2 = x^4(4 + x)$. (Ver Fig. 34-13.)

$$A = \int_{-4}^0 2y\,dx = 2\int_{-4}^0 x^2\sqrt{4 + x}\,dx. \text{ Haciendo } 4 + x = z^2, \text{ tendremos}$$
$$A = 4\int_0^2 (z^2 - 4)^2 z^2\,dz = 4\left[\frac{z^7}{7} - \frac{8z^5}{5} + \frac{16z^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4096}{105} \text{ unidades de superficie}$$

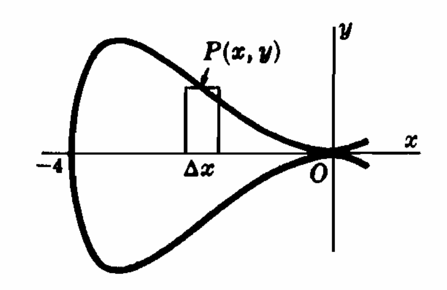


Fig. 34-13

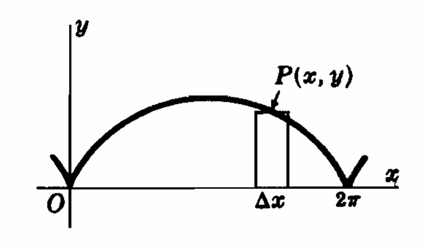


Fig. 34-14

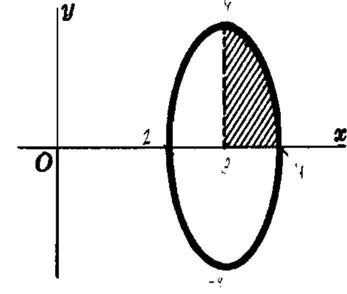


Fig. 34-15

13. Hallar el área limitada por el arco de cicloide $x = \theta - \operatorname{sen}\theta$, $y = 1 - \cos\theta$. (Ver Fig. 34-14.)

Cuando θ varía de 0 a 2π, se describe un arco completo. Por tanto, $dx = (1 - \cos\theta)\,d\theta$ y

$$A = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} y\,dx = \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)(1 - \cos\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$
$$= \left[\frac{3}{2}\theta - 2\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta\right]_0^{2\pi} = 3\pi \text{ unidades de superficie}$$

14. Hallar el área limitada por la curva $x = 3 + \cos\theta$, $y = 4\operatorname{sen}\theta$. (Ver Fig. 34-15.)

Cuando θ varía, de *derecha a izquierda*, desde 0 a $\frac{1}{2}\pi$, se describe el área rayada de la figura, que vale, $\frac{1}{4}$ del área pedida.

$$A = -4\int_0^{\pi/2} (4\operatorname{sen}\theta)(-\operatorname{sen}\theta)\,d\theta = 16\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = 8\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta)\,d\theta$$
$$= 8\left[\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta\right]_0^{\pi/2} = 4\pi \text{ unidades de superficie}$$

Problemas propuestos

15. Hallar el área limitada por las curvas y rectas que se indican:

(*a*) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 5$

(*b*) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$

(*c*) $y = 4x - x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$

(*d*) $x = 1 + y^2$, $x = 10$

(*e*) $x = 3y^2 - 9$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$

(*f*) $x = y^2 + 4y$, $x = 0$

(*g*) $y = 9 - x^2$, $y = x + 3$

(*h*) $y = 2 - x^2$, $y = -x$

(*i*) $y = x^2 - 4$, $y = 8 - 2x^2$

(*j*) $y = x^4 - 4x^2$, $y = 4x^2$

(*k*) La curva dada por $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$

(*l*) La curva dada por $9ay^2 = x(3a - x)^2$

(*m*) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 0$, $x = 2$

(*n*) $y = e^{x/a} + e^{-x/a}$, $y = 0$, $x = \pm a$

(*o*) $xy = 12$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e^2$

(*p*) $y = 1/(1 + x^2)$, $y = 0$, $x = \pm 1$

(*q*) $y = \text{tag}\, x$, $x = 0$, $x = \frac{1}{4}\pi$

(*r*) Un sector circular de radio r y ángulo α.

(*s*) La elipse $x = a \cos t$, $y = b \,\text{sen}\, t$.

(*t*) $x = 2 \cos \theta - \cos 2\theta - 1$, $y = 2 \,\text{sen}\, \theta - \text{sen}\, 2\theta$.

(*u*) $x = a \cos^3 t$, $y = a \,\text{sen}^3\, t$.

(*v*) Primer arco de $y = e^{-ax} \,\text{sen}\, ax$.

(*w*) $y = xe^{-x^2}$, $y = 0$, y la ordenada máxima.

(*x*) Las dos ramas de $(2x - y)^2 = x^3$ y $x = 4$.

(*y*) Dentro de $y = 25 - x^2$, $256x = 3y^2$, $16y = 9x^2$.

Soluciones: (*a*) 39 unidades de superficie, (*b*) 20, (*c*) 22/3, (*d*) 36, (*e*) 8, (*f*) 32/3, (*g*) 125/6, (*h*) 9/2, (*i*) 32, (*j*) $512\sqrt{2}/15$, (*k*) $2a^3/3$, (*l*) $8\sqrt{3}a^2/5$, (*m*) $(e^2 + 1/e^2 - 2)$, (*n*) $2a(e - 1/e)$, (*o*) 24, (*p*) $\frac{1}{2}\pi$, (*q*) $\frac{1}{2}\ln 2$, (*r*) $\frac{1}{2}r^2\alpha$, (*s*) πab, (*t*) 6π, (*u*) $3\pi a^2/8$, (*v*) $(1 + 1/e^{\pi})/2a$, (*w*) $\frac{1}{2}(1 - 1/\sqrt{e})$, (*x*) 128/5, (*y*) 98/3 unidades de superficie.

La *ordenada media* de la curva $y = f(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$ viene dada por

$$\frac{\text{Area}}{\text{Base}} = \frac{\int_a^b f(x)\, dx}{b - a}$$

16. Hallar la ordenada de (*a*) una semicircunferencia, (*b*) la parábola $y = 4 - x^2$ desde $x = -2$ hasta $x = 2$.

Sol. (*a*) $\pi r/4$, (*b*) 8/3.

17. (*a*) Hallar la ordenada media de un arco de la cicloide $x = a(\theta - \text{sen}\, \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ con respecto a x.

(*b*) Idem, con respecto a θ.

Sol. (*a*) $\dfrac{1}{2\pi a}\displaystyle\int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos\theta)^2\, d\theta = \dfrac{3a}{2}$, (*b*) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} a(1 - \cos\theta)\, d\theta = a$

18. En la caída libre de un cuerpo, $s = \frac{1}{2}gt^2$ y $v = gt = \sqrt{2gs}$.

(*a*) Demostrar que el valor medio de v con respecto a t en el intervalo $0 \leq t \leq t_1$ es igual a la mitad de la velocidad final.

(*b*) Demostrar que el valor medio de v con respecto a s en el intervalo $0 \leq s \leq s_1$ es igual a dos tercios de la velocidad final.

Capítulo 35

Volúmenes de sólidos de revolución

UN SOLIDO DE REVOLUCION está generado por la rotación de un área plana alrededor de una recta del plano o eje de revolución. El *volumen* de un sólido de revolución se puede hallar por uno de los procedimientos siguientes:

METODO DEL DISCO

A. El eje de rotación forma parte del contorno del área plana.

(1) Se traza un diagrama indicando el área generatriz, una franja representativa perpendicular al eje de rotación, y su rectángulo genérico, como se hizo en el capítulo anterior.

(2) Se halla el volumen del disco producido en la rotación del rectángulo genérico alrededor del eje de rotación y la suma correspondiente a los n rectángulos.

(3) Se aplica la regla de Barrow o teorema fundamental del cálculo integral (Capítulo 33) suponiendo que el número de rectángulos crece indefinidamente.

(Ver Problemas 1-2.)

B. El eje de rotación no forma parte del contorno del área plana.

(1) Se procede como en el apartado (1) anterior.

(2) Se prolongan los lados del rectángulo genérico, *ABCD*, hasta que corten al eje de rotación en E y en F (ver Fig. 35-3 correspondiente al Problema 3). Cuando este rectángulo gire alrededor del eje de rotación se produce un cilindro cuyo volumen es igual a la diferencia entre los volúmenes generados por los rectángulos *EABF* y *ECDF* al girar con respecto al mismo eje. Se halla la diferencia de los dos volúmenes y se procede como en el apartado (2) anterior.

(3) Se procede como en el apartado (3) anterior. (Ver Problemas 3-4.)

METODO DEL ANILLO

(1) Se dibuja, en un diagrama, el área generatriz, una franja representativa paralela al eje de rotación, y su rectángulo correspondiente.

(2) Se halla el volumen (= circunferencia media $\times$ altura $\times$ espesor) del anillo cilíndrico producido en la rotación del rectángulo genérico con respecto al eje de giro y se halla la suma correspondiente a los n rectángulos.

(3) Se aplica el teorema fundamental, o regla de Barrow, suponiendo que el número de rectángulos crece indefinidamente.

(Ver Problemas 5-8.)

Problemas resueltos

1. Hallar el volumen generado en la rotación del área del primer cuadrante limitada por la parábola $y^2 = 8x$ y la ordenada correspondiente a $x = 2$ con respecto al eje x. (Ver Fig. 35-1.)

Dividiendo el área mediante franjas verticales, cuando el rectángulo genérico de la Fig. 35-1 gire alrededor del eje x se produce un disco de radio y, de altura Δx y de volumen $\pi y^2\,\Delta x$. La suma de los volúmenes de los n discos, correspondientes a los n rectángulos, es $\Sigma \pi y^2\,\Delta x$, y el volumen pedido será,

$$V = \int_a^b dV = \int_0^2 \pi y^2\,dx = \pi\int_0^2 8x\,dx = 4\pi x^2\Big]_0^2 = 16\pi \text{ unidades de volumen}$$

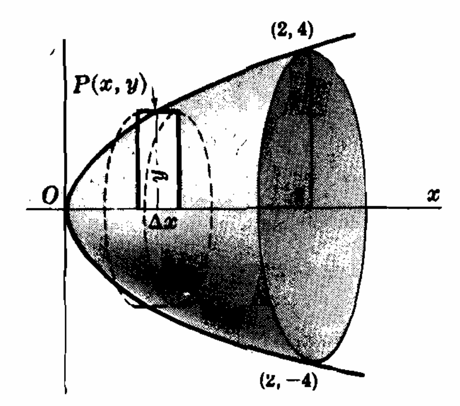


Fig. 35-1

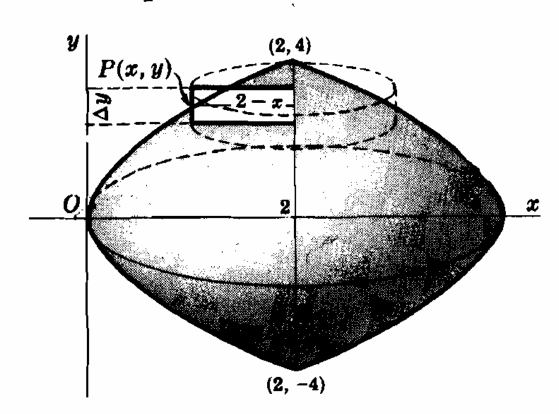


Fig. 35-2

2. Hallar el volumen generado al girar el área limitada por la parábola $y^2 = 8x$ alrededor de la ordenada correspondiente a $x = 2$. (Ver Fig. 35-2.)

Dividiendo el área mediante franjas horizontales, cuando el rectángulo genérico de la Fig. 35-2 gire alrededor del eje y se produce un disco de radio $2 - x$, de altura Δy y de volumen $\pi(2-x)^2\,\Delta y$. El volumen pedido será

$$V = \int_{-4}^{4} \pi(2-x)^2\,dy = 2\pi\int_0^4 (2-x)^2\,dy = 2\pi\int_0^4 \left(2-\frac{y^2}{8}\right)^2 dy = \frac{256}{15}\pi \text{ unidades de volumen}$$

3. Hallar el volumen generado en la rotación del área limitada por $y^2 = 8x$ y la ordenada correspondiente a $x = 2$ con respecto al eje y. (Ver Fig. 35-3.)

Dividiendo el área mediante franjas horizontales, cuando el rectángulo genérico de la Fig. 35-3 gire alrededor del eje y, se produce un disco cuyo volumen es igual a la diferencia entre los volúmenes generados al girar los rectángulos $ECDF$ (de dimensiones 2 por Δy) y $EABF$ (de dimensiones x por Δy) con respecto al eje y, es decir, $\pi(2)^2\,\Delta y - \pi(x)^2\,\Delta y$. El volumen pedido será

$$V = \int_{-4}^{4} 4\pi\,dy - \int_{-4}^{4} \pi x^2\,dy = 2\pi\int_0^4 (4-x^2)\,dy = 2\pi\int_0^4 \left(4-\frac{y^4}{64}\right) dy = \frac{128}{5}\pi \text{ unidades de volumen}$$

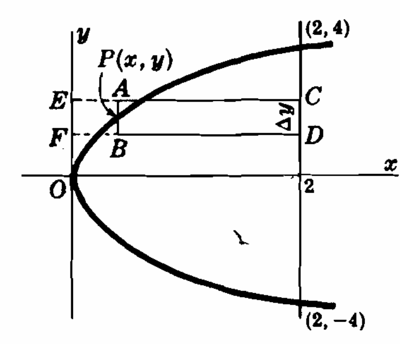


Fig. 35-3

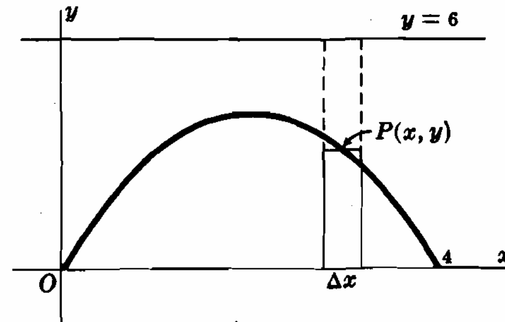


Fig. 35-4

4. Hallar el volumen generado en la rotación del área comprendida entre la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje x con respecto a la recta $y = 6$. (Ver Fig. 35-4.)

Dividiendo el área mediante franjas verticales, el rectángulo genérico, al girar alrededor de la recta $y = 6$, produce un disco de volumen $\pi(6)^2\,\Delta x - \pi(6-y)^2\,\Delta x$. El volumen pedido será

$$V = \pi\int_0^4 \{(6)^2 - (6-y)^2\}\,dx = \pi\int_0^4 (12y - y^2)\,dx$$

$$= \pi\int_0^4 (48x - 28x^2 + 8x^3 - x^4)\,dx = \frac{1408\pi}{15} \text{ unidades de volumen}$$

5. Se trata de hallar el volumen generado en la rotación del área del primer cuadrante limitada por la curva $y = f(x)$ y las ordenadas correspondientes a $x = a$ y $x = b$, alrededor del eje y. (Ver Fig. 35-5.) Dividiendo este área en n franjas y trazando los rectángulos correspondientes, cuando uno de ellos gire alrededor del eje y, se produce un anillo cilíndrico de altura y_k, radio interno ξ_{k-1}, radio externo ξ_k y volumen

(i) $$\Delta_k V = \pi(\xi_k^2 - \xi_{k-1}^2)y_k$$

Por el teorema del valor medio de la derivada

(ii) $$\xi_k^2 - \xi_{k-1}^2 = \frac{d}{dx}(x^2)\Big|_{x=x_k'} \cdot (\xi_k - \xi_{k-1}) = 2x_k'\Delta_k x$$

Siendo $\xi_{k-1} < x_k < \xi_k$. Por tanto, (i) se transforma en

$$\Delta_k V = 2\pi x_k' y_k \Delta_k x = 2\pi x_k' f(x_k) \Delta_k x$$

y

$$V = 2\pi \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k' f(x_k) \Delta_k x = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx \text{ por el teorema de Bliss}$$

Nota. Si los puntos x_k de los subintervalos son los puntos medios de estos, no es necesario acudir al teorema de Bliss. Para los x_k' definidos en (ii), se verifica: $x_k' = \frac{1}{2}(\xi_k + \xi_{k-1}) = x_k$ [ver Problema 17(*b*), Capítulo 21]. El volumen producido al girar los n rectángulos alrededor del eje y es $\sum_{k=1}^{n} 2\pi x_k f(x_k) \Delta_k x = \sum_{k=1}^{n} g(x_k) \Delta_k x$ del tipo (i) del Capítulo 33.

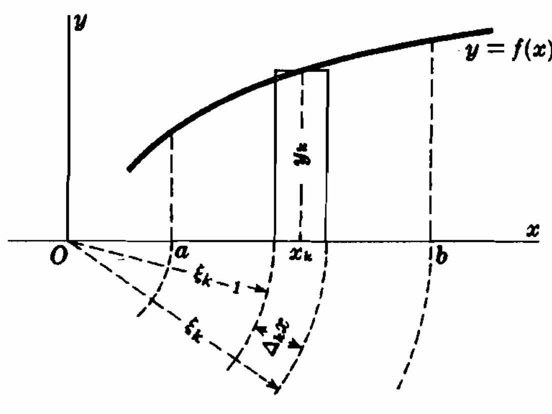


Fig. 35-5

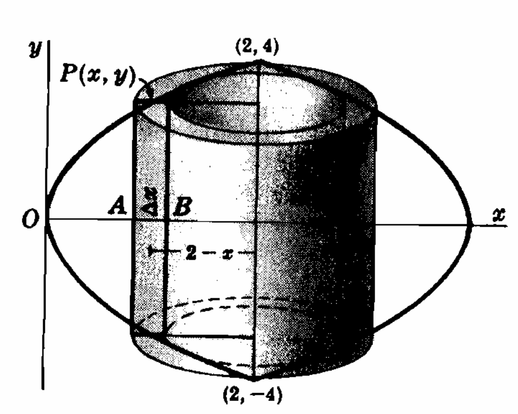


Fig. 35-6

6. Hallar el volumen generado en la rotación del área limitada por la parábola $y^2 = 8x$ y la ordenada correspondiente a $x = 2$ con respecto a esta recta. Aplicar el método del anillo. (Ver Problema 2.)

Dividimos el área (Fig. 35-6) mediante franjas verticales y elegimos, para mayor sencillez, el punto P de forma que sea el punto medio del segmento AB.

La altura del rectángulo genérico es $2y = 4\sqrt{2x}$, su base, Δx y su distancia al eje de giro, es $2 - x$. Cuando este rectángulo gire alrededor de este eje se produce un anillo cilíndrico de volumen $2\pi(2 - x) \cdot 4\sqrt{2x}\,\Delta x$. El volumen pedido será

$$V = 8\sqrt{2}\,\pi\int_0^2 (2-x)\sqrt{x}\,dx = 8\sqrt{2}\,\pi\int_0^2 (2x^{1/2} - x^{3/2})\,dx = \frac{256\pi}{15} \text{ unidades de volumen}$$

7. Hallar el volumen del toro generado en la rotación del círculo $x^2 + y^2 = 4$ alrededor de la recta $x = 3$.

Aplicamos el método del anillo. La altura del rectángulo genérico es $2y$, su base Δx, y la distancia media al eje de revolución vale $3 - x$. El volumen pedido será

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\int_{-2}^{2} 2y(3-x)\,dx = 4\pi\int_{-2}^{2} (3-x)\sqrt{4-x^2}\,dx \\ &= 12\pi\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx - 4\pi\int_{-2}^{2} x\sqrt{4-x^2}\,dx \\ &= \left[12\pi\left(\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2 \text{ arc sen } \frac{x}{2}\right) + \frac{4\pi}{3}(4-x^2)^{3/2}\right]_{-2}^{2} \\ &= 24\pi^2 \text{ unidades de volumen} \end{aligned}$$

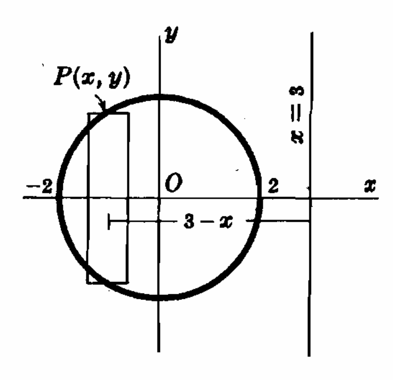


Fig. 35-7

8. Hallar el volumen generado en la rotación alrededor del eje y del área limitada por el primer arco de la cicloide $x = \theta - \operatorname{sen}\theta$, $y = 1 - \cos\theta$ y el eje x. Aplicar el método del anillo.

$$V = 2\pi\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} xy\,dx = 2\pi\int_0^{2\pi}(\theta - \operatorname{sen}\theta)(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)\,d\theta$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi}(\theta - 2\theta\cos\theta + \theta\cos^2\theta - \operatorname{sen}\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta)\,d\theta$$

$$= 2\pi\Big[\tfrac{3}{4}\theta^2 - 2(\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\theta\operatorname{sen}2\theta + \tfrac{1}{4}\cos 2\theta) + \cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \tfrac{1}{3}\cos^3\theta\Big]_0^{2\pi} = 6\pi^3 \text{ unidades de volumen}$$

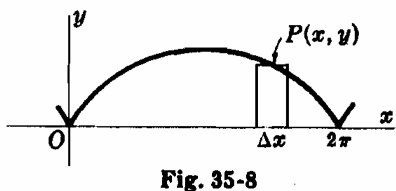


Fig. 35-8

9. Hallar el volumen generado en la rotación del área limitada por $y = -x^2 - 3x + 6$ y $x + y - 3 = 0$ alrededor de la recta, (*a*) $x = 3$, (*b*) $y = 0$.

(*a*) $$V = 2\pi\int_{-3}^{1}(y_C - y_L)(3-x)\,dx = 2\pi\int_{-3}^{1}(x^3 - x^2 - 9x + 9)\,dx = 256\pi/3 \text{ unidades de volumen}$$

(*b*) $$V = \pi\int_{-3}^{1}\{(y_C)^2 - (y_L)^2\}\,dx = \pi\int_{-3}^{1}(x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 30x + 27)\,dx = 1792\pi/15 \text{ unidades de volumen.}$$

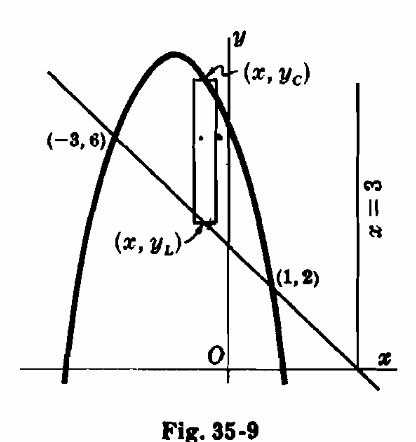


Fig. 35-9

Problemas propuestos

Hallar, en los Problemas 10-19, el volumen generado en la rotación del área plana dada alrededor del eje indicado, aplicando el método del disco. (Soluciones en unidades cúbicas.)

10. $y = 2x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$; eje x *Sol.* $2\,500\pi$
11. $x^2 - y^2 = 16$, $y = 0$, $x = 8$; eje x *Sol.* $256\pi/3$
12. $y = 4x^2$, $x = 0$, $y = 16$; eje y *Sol.* 32π
13. $y = 4x^2$, $x = 0$, $y = 16$; $y = 16$ *Sol.* $4\,096\pi/15$
14. $y^2 = x^3$, $y = 0$, $x = 2$; eje x *Sol.* 4π
15. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$; $x = 2$ *Sol.* $16\pi/5$
16. $y^2 = x^4(1 - x^2)$; eje x *Sol.* $4\pi/35$
17. $4x^2 + 9y^2 = 36$; eje x *Sol.* 16π
18. $4x^2 + 9y^2 = 36$, eje y *Sol.* 24π
19. Dentro de $x = 9 - y^2$, entre $x - y - 7 = 0$, $x = 0$; eje y *Sol.* $963\pi/5$

Hallar, en los Problemas 20-26, el volumen generado en la rotación del área plana dada alrededor del eje indicado, aplicando el método del disco. (Soluciones en unidades cúbicas.)

20. $y = 2x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$; eje y *Sol.* 625π
21. $x^2 - y^2 = 16$, $y = 0$, $x = 8$; eje y *Sol.* $128\sqrt{3}\pi$
22. $y = 4x^2$, $x = 0$, $y = 16$; eje x *Sol.* $2\,048\pi/5$
23. $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$; $x = 2$ *Sol.* $144\pi/5$
24. $y = x^2$, $y = 4x - x^2$; eje x *Sol.* $32\pi/3$
25. $y = x^2$, $y = 4x - x^2$; $y = 6$ *Sol.* $64\pi/3$
26. $x = 9 - y^2$, $x - y - 7 = 0$; $x = 4$ *Sol.* $153\pi/5$

Hallar, en los Problemas 27-32, el volumen generado en la rotación del área plana dada alrededor del eje indicado, aplicando el método del anillo. (Soluciones en unidades cúbicas.)

27. $y = 2x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$; eje y
28. $y = 2x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$; $x = 6$
29. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$; $y = 8$
30. $y = x^2$, $y = 4x - x^2$; $x = 5$
31. $y = x^2 - 5x + 6$, $y = 0$; eje y
32. Dentro de $x = 9 - y^2$, entre $x - y - 7 = 0$, $x = 0$; $y = 3$

Sol. (27) 625π, (28) 375π, (29) $320\pi/7$, (30) $64\pi/3$, (31) $5\pi/6$, (32) $369\pi/2$

Hallar, en los Problemas 33-39, el volumen generado en la rotación del área plana dada alrededor del eje indicado, aplicando el método que sea más idóneo.

33. $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$; eje y *Sol.* $\pi(1 - 1/e)$ unidades de volumen
34. Un arco de $y = \operatorname{sen} 2x$; eje x *Sol.* $\frac{1}{2}\pi^2$ unidades de volumen
35. Primer arco de $y = e^x \operatorname{sen} x$; eje x *Sol.* $\pi(e^{2\pi} - 1)/8$ unidades de volumen
36. Primer arco de $y = e^x \operatorname{sen} x$; eje y *Sol.* $\pi[(\pi - 1)e^{\pi} - 1]$ unidades de volumen
37. Primer arco de $x = \theta - \operatorname{sen}\theta$, $y = 1 - \cos\theta$; eje x *Sol.* $5\pi^2$ unidades de volumen
38. La cardioide $x = 2\cos\theta - \cos 2\theta - 1$, $y = 2\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}2\theta$; eje x *Sol.* $64\pi/3$ unidades de volumen
39. $y = 2x^2$, $2x - y + 4 = 0$; $x = 2$ *Sol.* 27π unidades de volumen
40. Hallar el volumen de un tronco de cono cuya base inferior es de radio R, la superior de radio r y de altura h. *Sol.* $\frac{1}{3}\pi h(r^2 + Rr + R^2)$ unidades cúbicas.

Capítulo 36

Volúmenes de sólidos de sección conocida

EL VOLUMEN DE UN SOLIDO DE REVOLUCION generado en la rotación alrededor del eje x de un área plana limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ viene dado por $\int_a^b \pi y^2\,dx$. El integrando, $\pi y^2 = \pi\{f(x)\}^2$, se puede interpretar como el área de la sección determinada por un plano perpendicular al eje x situado a una distancia del origen igual a x unidades.

Recíprocamente, si el área de la sección ABC determinada en un sólido por un plano perpendicular al eje x situado a una distancia del origen igual a x unidades, se puede expresar como función, $A(x)$, de x, el volumen del sólido viene dado por $V = \int_a^\beta A(x)\,dx$.

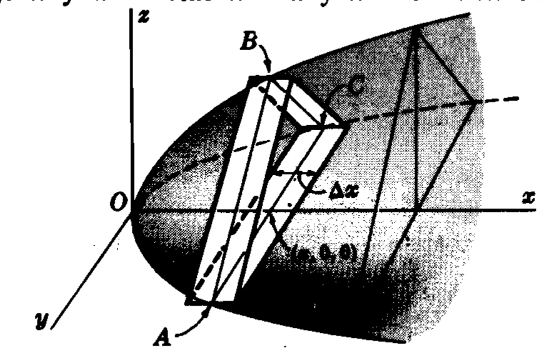


Fig. 36-1

Problemas resueltos

1. Hallar el volumen de un sólido de base circular de 4 unidades de radio sabiendo que toda sección plana perpendicular a un diámetro fijo es un triángulo equilátero.

Tomando el círculo, como en la Fig. 36-2, con el eje x sobre el diámetro fijo, la ecuación del círculo será $x^2+y^2 = 16$. La sección ABC del sólido es un triángulo equilátero de lado $2y$ y área $A(x) = \sqrt{3}\,y^2 = \sqrt{3}\,(16 - x^2)$.

$$V = \int_a^\beta A(x)\,dx = \sqrt{3}\int_{-4}^{4} (16 - x^2)\,dx$$

$$= \sqrt{3}\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{4} = \frac{256}{3}\sqrt{3} \text{ unidades de volumen}$$

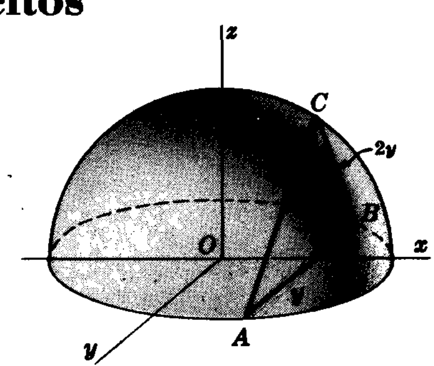
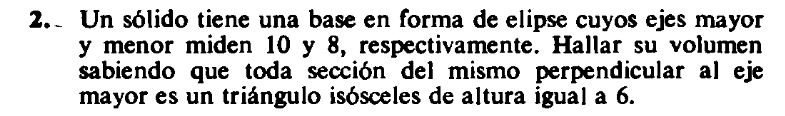


Fig. 36-2



2. Un sólido tiene una base en forma de elipse cuyos ejes mayor y menor miden 10 y 8, respectivamente. Hallar su volumen sabiendo que toda sección del mismo perpendicular al eje mayor es un triángulo isósceles de altura igual a 6.

Situemos la elipse como indica la Fig. 36-3, siendo su ecuación $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. La sección ABC es un triángulo isósceles de base $2y$, altura 6 y área $A(x) = 6y = 6\cdot{}^4/_5\sqrt{25 - x^2}$.

$$V = \frac{24}{5}\int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}\,dx = 60\pi \text{ unidades de volumen}$$

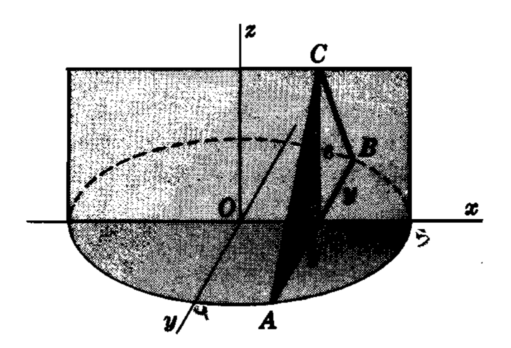


Fig. 36-3

3. Hallar el volumen del sólido limitado por el paraboloide $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = z$ y el plano $z = 10$. (Ver Fig. 36-4.)

La sección determinada en el sólido por un plano paralelo al xOy situado a una distancia z del origen es una elipse de área $\pi xy = \pi(4\sqrt{z})(5\sqrt{z}) = 20\pi z$. En consecuencia,

$$V \quad = \quad 20\pi\int_0^{10} z\,dz \quad = \quad 1000\pi \text{ unidades de volumen}$$

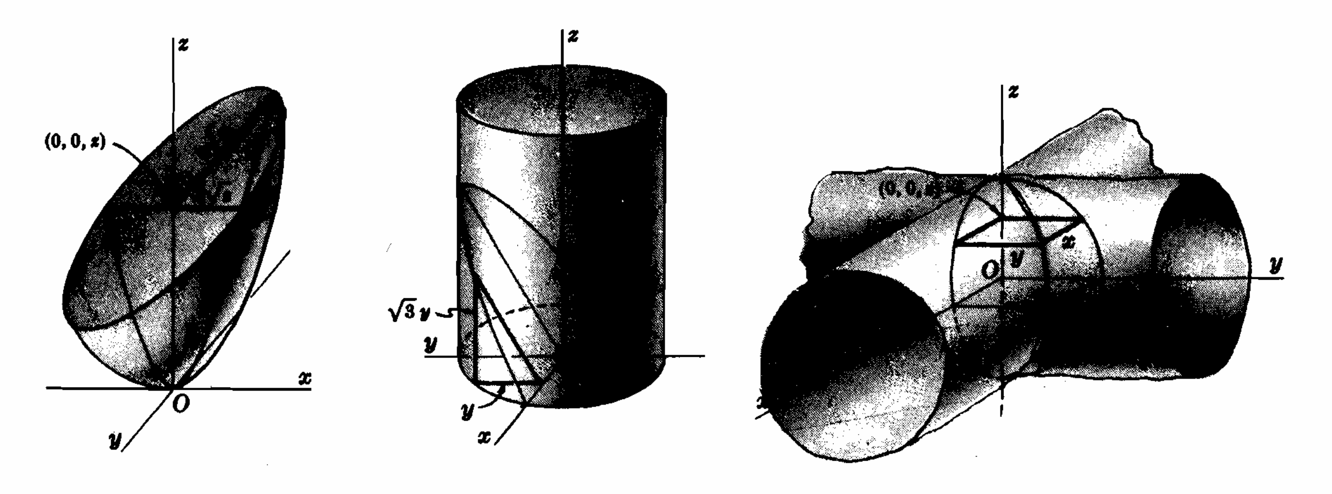


Fig. 36-4 Fig. 36-5 Fig. 36-6

4. En un cilindro recto circular de madera, de 8 centímetros de radio, se efectúa un corte por un plano que pasa por un diámetro de la base y forma con ella un ángulo de 60°. Hallar el volumen de la madera eliminada. (Ver Fig. 36-5.)

Tomando los ejes coordenados que se indican en la figura, la sección determinada por un plano perpendicular al eje x es un triángulo rectángulo en el cual el ángulo agudo adyacente al cateto y es de 60°. La longitud del otro cateto es $\sqrt{3}\,y$ y el área de la sección es $\frac{1}{2}\sqrt{3}\,y^2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(64 - x^2)$. Por tanto,

$$V \quad = \quad \frac{1}{2}\sqrt{3}\int_{-8}^{8} (64 - x^2)\,dx \quad = \quad \frac{1024}{3}\sqrt{3}\text{ cm}^3$$

NOTA ACLARATORIA, esto sale de la ecuación de la circunf.

5. Hallar el volumen de la intersección de dos cilindros circulares de igual radio r que se cortan ortogonalmente. (Fig. 36-6.)

Tomando los ejes coordenados que se indica en la figura, las ecuaciones de los cilindros son $x^2 + z^2 = r^2$ e $y^2 + z^2 = r^2$. La sección determinada en el volumen que se trata de calcular, por un plano perpendicular al eje z, es un cuadrado de lado $2x = 2y = 2\sqrt{r^2 - z^2}$ y área $4(r^2 - z^2)$. Por tanto,

$$V \quad = \quad 4\int_{-r}^{r} (r^2 - z^2)\,dz \quad = \quad \frac{16r^3}{3} \text{ unidades de volumen}$$

6. Hallar el volumen de un cono recto de altura h, cuya base es una elipse de eje mayor $2a$ y eje menor $2b$. (Fig. 36-7.)

La sección determinada en el cono por un plano paralelo a la base es una elipse de eje mayor $2x$ y eje menor $2y$.

De los triángulos semejantes de la figura, se deduce:

$$\frac{PC}{OA} = \frac{PM}{OM} \text{ ó } \frac{x}{a} = \frac{h - z}{h}; \text{ también, } \frac{PD}{OB} = \frac{PM}{OM} \text{ ó } \frac{y}{b} = \frac{h - z}{h}$$

El área de la sección es $\pi xy = \frac{\pi ab(h - z)^2}{h^2}$. Luego

$$V \quad = \quad \frac{\pi ab}{h^2}\int_0^h (h - z)^2\,dz \quad = \quad \frac{1}{3}\pi abh \text{ unidades de volumen}$$

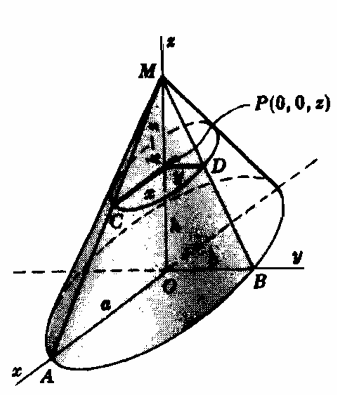


Fig. 36-7

Problemas propuestos

7. Hallar el volumen de un sólido de base circular de 4 unidades de radio sabiendo que la sección determinada en él por un plano perpendicular a un diámetro fijo (eje x de la figura del Problema 1) es (a) un semicírculo, (b) un cuadrado, (c) un triángulo rectángulo isósceles con su hipotenusa en el plano de base.
Sol. (a) $128\pi/3$, (b) 1 024/3, (c) 256/3 unidades de volumen.

8. Hallar el volumen de un sólido de base elíptica de ejes mayor y menor iguales a 10 y 8, respectivamente, sabiendo que la sección determinada en él por un plano perpendicular al eje mayor es un triángulo rectángulo con un cateto en el plano de la base. *Sol.* 640/3 unidades de volumen.

9. Hallar el volumen de un sólido cuya base es el área limitada por la parábola $y^2 = 12x$ y su ordenada correspondiente al punto $x = 3$, sabiendo que la sección determinada en él por un plano perpendicular al eje x de la parábola es un cuadrado. *Sol.* 216 unidades de volumen.

10. Hallar el volumen de un sólido cuya base es el área del primer cuadrante limitada por la recta $4x + 5y = 20$ y los ejes coordenados, sabiendo que la sección determinada en él por un plano perpendicular al eje x es un semicírculo.
Sol. $10\pi/3$ unidades de volumen.

11. Hallar el volumen de un sólido cuya base es el círculo $x^2 + y^2 = 16x$, sabiendo que la sección determinada en él por un plano perpendicular al eje x es un rectángulo de altura igual al doble de la distancia del origen al plano de la sección
Sol. $1\,024\pi$ unidades de volumen.

12. Hallar el volumen del sólido engendrado por un círculo cuyos extremos de un diámetro se apoyan en las parábolas $y^2 + 8x = 64$ e $y^2 + 16x = 64$, cuando se le desplaza paralelamente al plano xz.
Sol. $256\pi/15$ unidades de volumen.

13. Hallar el volumen de un cono cuya base es el círculo $y^2 + z^2 - 2by = 0$, $x = 0$, y su vértice, el punto $(a, 0, 0)$.
Sol. $\frac{1}{3}\pi ab^2$ unidades de volumen.

14. Hallar el volumen del sólido limitado por el paraboloide $y^2 + 4z^2 = x$ y el plano $x = 4$.
Sol. 4π unidades de volumen.

15. Hallar el volumen de un barril cuyo perfil es el de un elipsoide de revolución, sabiendo que su altura es 6, el radio de la sección media es igual a 3 y el radio de las bases igual a 2. *Sol.* 44π unidades de volumen.

16. Hallar el volumen de un sólido sabiendo que la sección determinada en él por un plano perpendicular al eje x es un círculo cuyos extremos de un diámetro se apoyan en las parábolas $y^2 = 9x$ y $x^2 = 9y$.
Sol. $6\,561\pi/280$ unidades de volumen.

17. Hallar el volumen de un sólido sabiendo que la sección determinada en él por un plano perpendicular al eje x es un cuadrado cuyos extremos de una diagonal están situados sobre las parábolas $y^2 = 4x$ y $x^2 = 4y$.
Sol. 144/35 unidades de volumen.

18. En una esfera de 3 centímetros de radio se efectúa un taladro de 1 centímetro de radio, siendo el eje de éste uno de los diámetros de aquélla. Hallar el volumen de la esfera que resulta. *Sol.* $64\pi\sqrt{2}/3$ cm^3.

Capítulo 37

Centro geométrico

Areas planas y sólidos de revolución

LA MASA DE UN SOLIDO es una medida de la materia que contiene y su volumen es una medida del espacio que ocupa. Si la masa por unidad de volumen es la misma en todo el cuerpo se dice que éste es *homogéneo* o que tiene *densidad constante.*

En mecánica se simplifican mucho los cálculos cuando se puede considerar a la masa del cuerpo concentrada en un punto que se denomina centro de masas. En un cuerpo homogéneo este punto coincide con el *centro geométrico* o centroide. Por ejemplo, el centro de masas de una pelota de goma homogénea coincide con el centro geométrico de la pelota considerada como una esfera.

El centro geométrico de una hoja de papel rectangular estará situado entre las dos superficies en la mitad del espesor pero, en este caso, se puede considerar situado sobre una de las superficies en el punto de intersección de las diagonales. Así, pues, el centro de masas de una hoja delgada coincide con el centro geométrico de la hoja considerada como un área plana.

En este Capítulo, y en el siguiente, nos limitaremos a considerar áreas planas y sólidos de revolución. En capítulos posteriores trataremos de otros sólidos, arcos de curvas y cuerpos heterogéneos.

EL MOMENTO (DE PRIMER ORDEN) M_L **DE UN AREA PLANA** con respecto a una recta L es el producto del área por la distancia de su centro geométrico a dicha recta. El momento de un área compuesta de otras varias con respecto a una recta es igual a la suma de los momentos de las áreas individuales con respecto a dicha recta.

Para hallar el momento de un área plana con respecto a un eje coordenado se procede de la manera siguiente:

(1) Se dibuja el área y se traza una franja representativa y su rectángulo genérico correspondiente.

(2) Se efectúa el producto del área del rectángulo por la distancia de su centro geométrico o centroide al eje, y se escribe la suma correspondiente a todos los rectángulos.

(3) Se aplica la regla de Barrow o teorema fundamental del cálculo integral (ver Problema 2) suponiendo que el número de rectángulos crece indefinidamente.

Para un área plana A cuyo centro geométrico es el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ y cuyos momentos con respecto a los ejes x e y son M_x y M_y, respectivamente, se tiene:

$$A\bar{x} = M_y \quad \text{y} \quad A\bar{y} = M_x$$

(Ver Problemas 1-8.)

EL MOMENTO (DE PRIMER ORDEN) DE UN SOLIDO de volumen V, engendrado en la rotación de un área plana alrededor de un eje coordenado, con respecto a un plano que pase por el origen y sea perpendicular a dicho eje, se halla de la manera siguiente:

(1) Se dibuja el área y se traza una franja representativa y su rectángulo genérico.

(2) Se efectúa el producto del volumen del disco o anillo, generado en la rotación del rectángulo con respecto al eje, por la distancia del centro geométrico del rectángulo al plano, y se escribe la suma correspondiente a todos los rectángulos.

(3) Se aplica la regla de Barrow o teorema fundamental del cálculo integral suponiendo que el número de rectángulos crece indefinidamente.

El centro geométrico $(\bar{x}, \bar{y})$ está situado en el eje x si el área gira en torno a dicho eje. Llamando M_{yz} al momento del sólido con respecto al plano que pasa por el origen y es perpendicular al eje x, se tiene

$$V\bar{x} = M_{yz}, \quad \bar{y} = 0$$

Análogamente, si la rotación del área tiene lugar en torno del eje y, el centro geométrico $(\bar{x}, \bar{y})$ está situado en dicho eje. Llamando M_{xz} al momento del sólido con respecto al plano que pase por el origen y sea perpendicular al eje y, se tiene

$$V\bar{y} = M_{xz}, \quad \bar{x} = 0$$

(Ver Problemas 9-12.)

PRIMER TEOREMA DE PAPPUS. El volumen engendrado por un área plana en rotación alrededor de un eje de su plano que no la corte es igual al producto del área por la longitud de la trayectoria descrita por su centro geométrico.

(Ver Problemas 13-15.)

Problemas resueltos

1. Dada el área plana de la figura, hallar (*a*) su momento con respecto a los ejes coordenados y (*b*) las coordenadas de su centro geométrico $(\bar{x}, \bar{y})$.

(*a*) El área del rectángulo superior es $5 \times 2 = 10$ unidades, y su centro geométrico es el punto $A(2{,}5,\ 9)$. Análogamente, las áreas y centros de los otros rectángulos son: 12 unidades, $B(1, 5)$; 2 unidades, $C(2{,}5,\ 5)$; 10 unidades, $D(2{,}5,\ 1)$.

Los momentos de los rectángulos con respecto al eje x son 10(9), 12(5) y 10(1). Por tanto, el momento del área de la figura, con respecto al eje x, es

$$M_x = 10(9) + 12(5) + 2(5) + 10(1) = 170$$

Análogamente, el momento del área de la figura con respecto al eje y es

$$M_y = 10(2{,}5) + 12(1) + 2(2{,}5) + 10(2{,}5) = 67$$

(*b*) El área de la figura es $A = 10 + 12 + 2 + 10 = 34$.

Luego $A\bar{x} = M_y$, $34\bar{x} = 67$ y $\bar{x} = 67/34$,

y $A\bar{y} = M_x$, $34\bar{y} = 170$ e $\bar{y} = 5$.

El punto $(67/34, 5)$ es el centro geométrico.

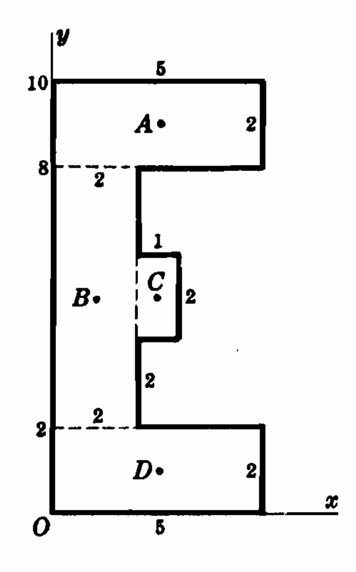


Fig. 37-1

2. Hallar el momento con respecto a los ejes coordenados del área plana del segundo cuadrante limitada por la curva $x = y^2 - 9$.

El área del rectángulo genérico de la figura es $-x \cdot \Delta y$, su centro geométrico es $(\frac{1}{2}x, y)$, y su momento con respecto al eje x vale $y(-x \cdot \Delta y)$. Por tanto,

$$M_x = -\int_0^3 y \cdot x\, dy = -\int_0^3 y(y^2 - 9)\, dy = \frac{81}{4}$$

Análogamente, el momento del rectángulo genérico con respecto al eje y es $\frac{1}{2}x(-x \cdot \Delta y)$. En consecuencia,

$$M_y = -\frac{1}{2}\int_0^3 x^2\, dy = -\frac{1}{2}\int_0^3 (y^2 - 9)^2\, dy = -\frac{324}{5}$$

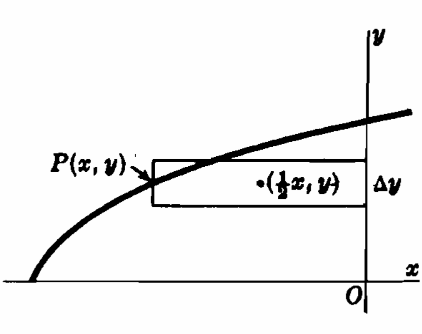


Fig. 37-2

3. Hallar el centro geométrico del área del primer cuadrante limitada por la parábola $y = 4 - x^2$.

El centro geométrico del rectángulo genérico es $(x, \frac{1}{2}y)$.

$$A = \int_0^2 y\,dx = \int_0^2 (4-x^2)\,dx = 16/3$$

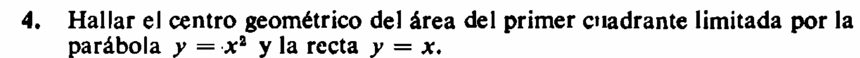
$$M_x = \int_0^2 \tfrac{1}{2}y \cdot y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (4-x^2)^2\,dx = 128/15$$

$$M_y = \int_0^2 x \cdot y\,dx = \int_0^2 x(4-x^2)\,dx = 4$$

Por tanto $\bar{x} = M_y/A = 3/4$, $\bar{y} = M_x/A = 8/5$, y las coordenadas del centro geométrico son $(3/4, 8/5)$.

Fig. 37-3

4. Hallar el centro geométrico del área del primer cuadrante limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x$.



El centro geométrico del rectángulo genérico es $[x, \frac{1}{2}(x + x^2)]$.

$$A = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = 1/6$$

$$M_x = \int_0^1 \tfrac{1}{2}(x+x^2)(x-x^2)\,dx = 1/15$$

$$M_y = \int_0^1 x(x-x^2)\,dx = 1/12$$

Por tanto $\bar{x} = M_y/A = 1/2$, $\bar{y} = M_x/A = 2/5$, y las coordenadas del centro geométrico son $(1/2, 2/5)$.

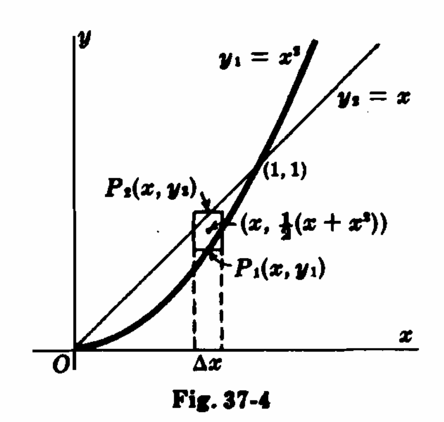
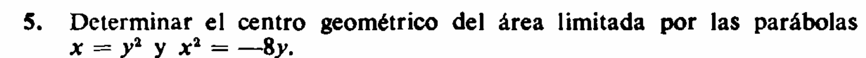


Fig. 37-4

5. Determinar el centro geométrico del área limitada por las parábolas $x = y^2$ y $x^2 = -8y$.



El centro geométrico del rectángulo genérico es $[x, \frac{1}{2}(-x^2/8 - \sqrt{x})]$.

$$A = \int_0^4 \left(-\frac{x^2}{8} + \sqrt{x}\right)dx = \frac{8}{3}$$

$$M_x = \int_0^4 \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{8} - \sqrt{x}\right)\left(-\frac{x^2}{8} + \sqrt{x}\right)dx = -\frac{12}{5}$$

$$M_y = \int_0^4 x\left(-\frac{x^2}{8} + \sqrt{x}\right)dx = \frac{24}{5}$$

y el centro es $(\bar{x}, \bar{y}) = (9/5, -9/10)$.

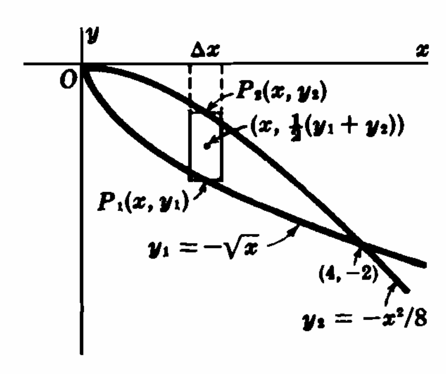
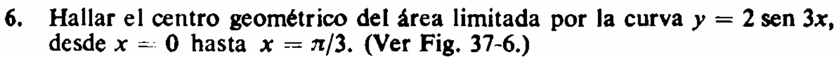


Fig. 37-5

6. Hallar el centro geométrico del área limitada por la curva $y = 2 \operatorname{sen} 3x$, desde $x = 0$ hasta $x = \pi/3$. (Ver Fig. 37-6.)

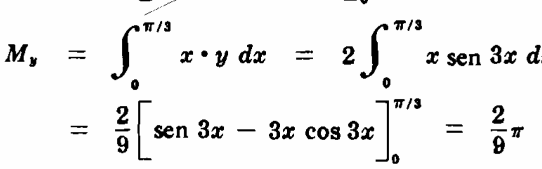


Empleando el rectángulo genérico de la figura cuyo centro geométrico es $(x, \frac{1}{2}y)$,

$$A = \int_0^{\pi/3} y\,dx = \int_0^{\pi/3} 2 \operatorname{sen} 3x\,dx = -\frac{2}{3}\cos 3x\Big]_0^{\pi/3} = \frac{4}{3}$$

$$M_x = \int_0^{\pi/3} \tfrac{1}{2}y \cdot y\,dx = 2\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}^2 3x\,dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6x\right]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{3}$$



$$M_y = \int_0^{\pi/3} x \cdot y\,dx = 2\int_0^{\pi/3} x \operatorname{sen} 3x\,dx$$

$$= \frac{2}{9}\left[\operatorname{sen} 3x - 3x\cos 3x\right]_0^{\pi/3} = \frac{2}{9}\pi$$

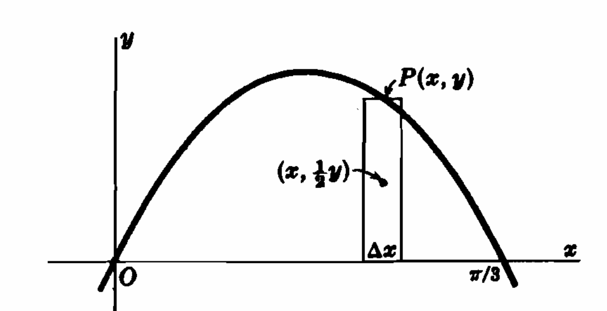


Fig. 37-6

Las coordenadas del centro son $(M_y/A, M_x/A) = (\pi/6, \pi/4)$.

7. Hallar el centro geométrico del área del primer cuadrante de la hipocicloide $x = a\cos^3\theta$, $y = a\,\text{sen}^3\,\theta$. (Ver Fig. 37-7.)

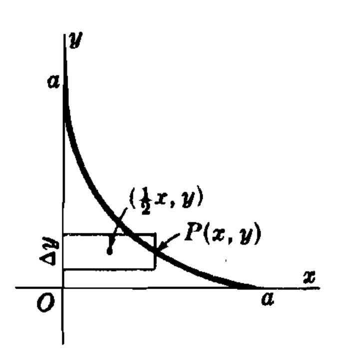


Fig. 37-7

Por simetría, $\bar{x} = \bar{y}$.

$$A = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} x\,dy = \int_0^{\pi/2} a\cos^3\theta \cdot 3a\,\text{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta$$
$$= \frac{3}{4}a^2\int_0^{\pi/2}\text{sen}^2 2\theta\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$
$$= \frac{3}{8}a^2\left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{8}\,\text{sen}\,4\theta + \frac{1}{6}\,\text{sen}^3 2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{32}\pi a^2$$

$$M_x = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} y\cdot x\,dy = 3a^3\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,\text{sen}^5\theta\,d\theta = 3a^3\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,(1-\cos^2\theta)^2\,\text{sen}\,\theta\,d\theta$$
$$= -3a^3\left[\frac{\cos^5\theta}{5} - \frac{2\cos^7\theta}{7} + \frac{\cos^9\theta}{9}\right]_0^{\pi/2} = \frac{24a^3}{315}$$

Por tanto, $\bar{y} = M_x/A = 256a/315\pi$ y las coordenadas del centro son $(256a/315\pi, 256a/315\pi)$.

8. Demostrar que el centro geométrico del área de un sector circular de radio r y ángulo 2θ está situado a una distancia $\dfrac{2r\,\text{sen}\,\theta}{3\theta}$ del centro del círculo.

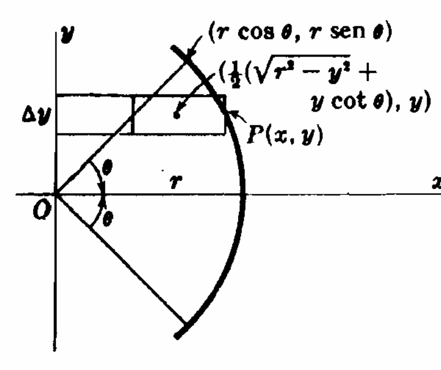


Fig. 37-8

Situemos el sector de forma que su centro geométrico esté situado sobre el eje x. Por simetría, la abscisa de dicho centro será igual a la del área situada por encima del eje x, limitada por la circunferencia y la recta $y = x\,\text{tag}\,\theta$. Para este último sector:

$$A = \int_0^{r\,\text{sen}\,\theta}(\sqrt{r^2-y^2} - y\cot\theta)\,dy$$
$$= \left[\frac{1}{2}y\sqrt{r^2-y^2} + \frac{1}{2}r^2\,\text{arc sen}\,\frac{y}{r} - \frac{1}{2}y^2\cot\theta\right]_0^{r\,\text{sen}\,\theta} = \frac{1}{2}r^2\theta$$

$$M_y = \int_0^{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{1}{2}(\sqrt{r^2-y^2} + y\cot\theta)(\sqrt{r^2-y^2} - y\cot\theta)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{r\,\text{sen}\,\theta}(r^2 - y^2 - y^2\cot^2\theta)\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\left[r^2y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{3}y^3\cot^2\theta\right]_0^{r\,\text{sen}\,\theta} = \frac{1}{3}r^3\,\text{sen}\,\theta, \quad \text{y} \quad \bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{2r\,\text{sen}\,\theta}{3\theta}$$

9. Hallar el centro geométrico $(\bar{x}, 0)$ del sólido generado en la rotación del área del Problema 3 alrededor del eje x.

Aplicando el método del disco al rectángulo genérico del Problema 3,

$$V = \pi\int_0^2 y^2\,dx = \pi\int_0^2(4-x^2)^2\,dx = 256\pi/15,$$
$$M_{yz} = \pi\int_0^2 x\cdot y^2\,dx = \pi\int_0^2 x(4-x^2)^2\,dx = 32\pi/3, \quad \text{y} \quad \bar{x} = M_{yz}/V = 5/8$$

10. Hallar el centro geométrico $(0, \bar{y})$ del sólido generado en la rotación del área del Problema 3 alrededor del eje y.

Aplicando el método del anillo al rectángulo genérico del Problema 3,

$$V = 2\pi\int_0^2 xy\,dx = 2\pi\int_0^2 x(4-x^2)\,dx = 8\pi,$$
$$M_{xz} = 2\pi\int_0^2 \tfrac{1}{2}y\cdot xy\,dx = \pi\int_0^2 x(4-x^2)^2\,dx = 32\pi/3, \text{ de donde } \bar{y} = M_{xz}/V = 4/3$$

11. Hallar el centro geométrico $(\bar{x}, 0)$ del sólido generado en la rotación del área del Problema 4 alrededor del eje x.

Aplicando el método del disco al rectángulo genérico del Problema 4,

$$V = \pi\int_0^1(x^2 - x^4)\,dx = 2\pi/15, \quad M_{yz} = \pi\int_0^1 x(x^2-x^4)\,dx = \pi/12, \quad \text{y} \quad \bar{x} = M_{yz}/V = 5/8.$$

12. Hallar el centro geométrico $(0, \bar{y})$ del sólido generado en la rotación del área del Problema 4 alrededor del eje y.

Aplicando el método del anillo al rectángulo genérico del Problema 4,

$$V = 2\pi \int_0^1 x(x - x^2)\, dx = \pi/6,$$

$$M_{xz} = 2\pi \int_0^1 \tfrac{1}{2}(x + x^2) \cdot x(x - x^2)\, dx = \pi/12, \text{ de donde } \bar{y} = M_{xz}/V = 1/2$$

13. Hallar el centro geométrico del área de un semicírculo de radio r.

Tomando el semicírculo como en la figura, $\bar{x} = 0$.

El área del semicírculo es $\frac{1}{2}\pi r^2$; el sólido generado en la rotación alrededor del eje x es una esfera de volumen $^4/_3\pi r^3$, y el centro geométrico $(0, \bar{y})$ del área describe una circunferencia de radio y. Aplicando el teorema de Pappus, $\frac{1}{2}\pi r^2 \cdot 2\pi\bar{y} = {}^4/_3\pi r^3$ e $\bar{y} = 4r/3\pi$. El centro geométrico es, pues, el punto $(0, 4r/3\pi)$.

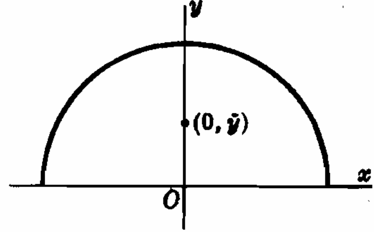


Fig. 37-9

14. Hallar el volumen del toro generado en la rotación del círculo $x^2 + y^2 = 4$ alrededor de la recta $x = 3$. (Fig. 37-10).

El centro geométrico del círculo describe una circunferencia de radio 3.

Por tanto, $V = 4\pi(6\pi) = 24\pi^2$ unidades de volumen.

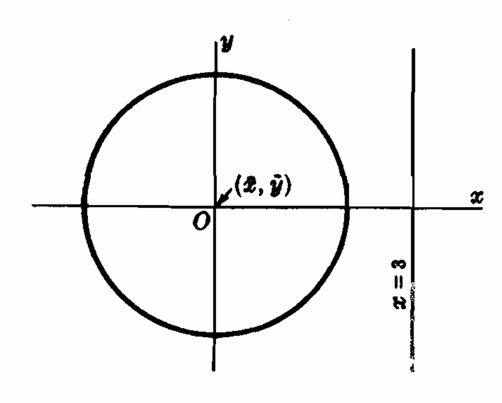


Fig. 37-10

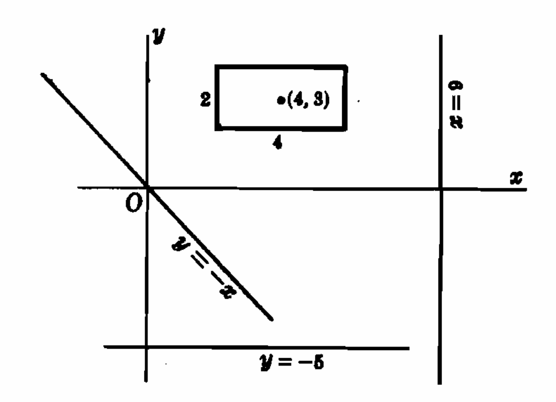


Fig. 37-11

15. Hallar el volumen generado en la rotación del rectángulo de la Fig. 37-11 alrededor de (1) la recta $x = 9$, (2) la recta $y = -5$ y (3) la recta $y = -x$.

(1) El centro (4, 3) del rectángulo describe una circunferencia de radio 5. Luego, $V = 8(10\pi) = 80\pi$ unidades de volumen.

(2) El centro describe una circunferencia de radio 8. Luego, $V = 8(16\pi) = 128\pi$ unidades de volumen.

(3) El centro describe una circunferencia de radio $(4 + 3)/\sqrt{2}$. Luego, $V = 56\sqrt{2}\,\pi$ unidades de volumen.

Problemas propuestos

Calcular el centroide de las áreas dadas en los problemas 16-26.

16. $y = x^2$, $y = 9$ *Sol.* (0,27/5)

17. $y = 4x - x^2$, $y = 0$ *Sol.* (2, 8/5)

18. $y = 4x - x^2$, $y = x$ *Sol.* (3/2, 12/5)

19. $3y^2 = 4(3 - x)$, $x = 0$ *Sol.* (6/5, 0)

20. $x^2 = 8y$, $y = 0$, $x = 4$ *Sol.* (3, 3/5)

21. $y = x^2$, $4y = x^3$ *Sol.* (12/5, 192/35)

22. $x^2 - 8y + 4 = 0$, $x^2 = 4y$, primer cuadrante. *Sol.* $(3/4, 2/5)$

23. Area del primer cuadrante de $x^2 + y^2 = a^2$. *Sol.* $(4a/3\pi, 4a/3\pi)$

24. Area del primer cuadrante de $9x^2 + 16y^2 = 144$. *Sol.* $(16/3\pi, 4/\pi)$

25. Lazo derecho de $y^2 = x^4(1 - x^2)$. *Sol.* $(32/15\pi, 0)$

26. Primer arco de $x = \theta - \operatorname{sen}\theta$, $y = 1 - \cos\theta$. *Sol.* $(\pi, 5/6)$

27. Demostrar que la distancia del centro geométrico de un triángulo a la base es 1/3 de la altura.

Hallar el centro geométrico del sólido generado en la rotación de las áreas planas dadas alrededor de los ejes indicados en los Problemas 28-38.

28. $y = x^2$, $y = 9$, $x = 0$; eje y *Sol.* $\bar{y} = 6$

29. $y = x^2$, $y = 9$, $x = 0$; eje x *Sol.* $\bar{x} = 5/4$

30. $y = 4x - x^2$, $y = x$; eje x *Sol.* $\bar{x} = 27/16$

31. $y = 4x - x^2$, $y = x$; eje y *Sol.* $\bar{y} = 27/10$

32. $x^2 - y^2 = 16$, $y = 0$, $x = 8$; eje x *Sol.* $\bar{x} = 27/4$

33. $x^2 - y^2 = 16$, $y = 0$, $x = 8$; eje y *Sol.* $\bar{y} = 3\sqrt{3}/2$

34. $(x - 2)y^2 = 4$, $y = 0$, $x = 3$, $x = 5$; eje x *Sol.* $\bar{x} \doteq (2 + 2\ln 3)/(\ln 3)$

35. $x^2y = 16(4 - y)$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$; eje y *Sol.* $\bar{y} = 1/(\ln 2)$

36. Area del primer cuadrante limitada por $y^2 = 12x$ y la ordenada en $x = 3$; eje x *Sol.* $\bar{x} = 2$

37. Area del Problema 36; eje y *Sol.* $\bar{y} = 5/2$

38. Area del Problema 36; directriz. *Sol.* $\bar{y} = 75/32$

39. Demostrar el teorema de Pappus de este capítulo.

40. Aplicando el teorema de Pappus, hallar:

(*a*) el volumen de un cono recto circular de altura a y radio de la base b.

(*b*) el volumen del sólido obtenido al girar la elipse $4(x - 6)^2 + 9(y - 5)^2 = 36$ alrededor del eje x.

Sol. (*a*) $\frac{1}{3}\pi ab^2$ u.v. (*b*) $60\pi^2$ u.v.

41. Dada el área A, limitada por $y = -x^2 - 3x + 6$ y $x + y - 3 = 0$, hallar (*a*) su centro geométrico, (*b*) el volumen generado en la rotación de A alrededor de la recta dada.

Sol. (*a*) $(-1, 28/5)$, (*b*) $2\pi\left(\dfrac{\bar{x} + \bar{y} - 3}{\sqrt{2}}\right) \cdot A = \dfrac{256\sqrt{2}}{15}\pi$ cen. vol.

42. Dado el volumen generado en la rotación del área A (rayada en la Fig. 37-12) alrededor de la recta L, obtener:

$$V = 2\pi\left(\frac{a\bar{x} + \bar{y} - b}{\sqrt{a^2+1}}\right) \cdot A = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2+1}}(aM_y + M_x - bA)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}} \int_r^s (y_C - y_L)^2\, dx$$

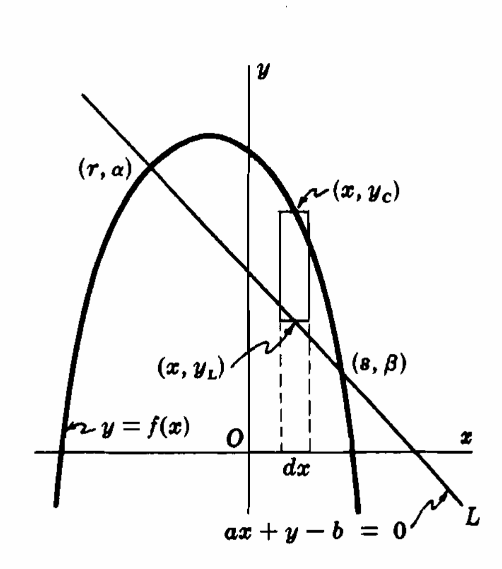


Fig. 37-12

43. Aplicando la fórmula del Problema 42, obtener el volumen generado en la rotación del área alrededor de la recta.

(*a*) $y = -x^2 - 3x + 6$, $x + y - 3 = 0$

(*b*) $y = 2x^2$, $2x - y + 4 = 0$

Sol. (*a*) Ver Problema 41, (*b*) $162\sqrt{5}\,\pi/25$ un. vol.

Capítulo 38

Momentos de Inercia

Areas planas y sólidos de revolución

EL MOMENTO DE INERCIA I_L DE UN AREA PLANA A con respecto a una recta L situada en su plano se halla de la forma siguiente:

(1) Se dibuja el área, trazando una franja representativa paralela a la recta y su rectángulo genérico correspondiente.

(2) Se calcula el producto del área del rectángulo por el cuadrado de la distancia de su centro geométrico a la recta, y se escribe la suma correspondiente a todos los rectángulos.

(3) Se aplica la regla de Barrow o teorema fundamental del cálculo integral suponiendo que el número de rectángulos crece indefinidamente. (Ver Problemas 1-4.)

EL MOMENTO DE INERCIA I_L DE UN SOLIDO de volumen V, generado en la rotación de un área plana alrededor de una recta L de su plano con respecto a esta recta (eje del sólido), se halla de la forma siguiente:

(1) Se dibuja el área, trazando una franja representativa paralela al eje y su rectángulo genérico correspondiente.

(2) Se calcula el producto del volumen generado en la rotación del rectángulo alrededor del eje (anillo) por el cuadrado de la distancia del centro geométrico del rectángulo a dicho eje, y se escribe la suma correspondiente a todos los rectángulos.

(3) Se aplica la regla de Barrow o teorema fundamental de cálculo integral suponiendo que el número de rectángulos crece indefinidamente. (Ver Problemas 5-8.)

RADIO DE GIRO. El número positivo R definido por la relación $I_L = AR^2$ en el caso de un área plana A, y por $I_L = VR^2$ en el caso de un sólido de revolución, recibe el nombre de radio de giro del área o volumen, respectivamente, con respecto a L.

TEOREMA DE STEINER. El momento de inercia de un área, arco, o volumen, con respecto a un eje cualquiera es igual al momento de inercia con respecto a un eje paralelo a él que pase por el centro geométrico más el producto del área, longitud del arco, o volumen, por el cuadrado de la distancia entre dichos ejes. (Ver Problemas 9-10.)

Problemas resueltos

1. Hallar el momento de inercia de un área rectangular A de dimensiones a y b con respecto a un lado.

Consideremos el área como se representa en la figura, y supongamos que el lado en cuestión es el eje y.

El área del rectángulo genérico es $= b \cdot \Delta x$, y su centro geométrico está situado en $(x, \frac{1}{2}b)$. Por tanto, su movimiento vale $x^2 b\ \Delta x$. En consecuencia,

$$I_y = \int_0^a x^2 b\, dx = b\frac{x^3}{3}\Big]_0^a = \frac{ba^3}{3} = \frac{1}{3}Aa^2$$

Así, pues, el momento de inercia de un área rectangular con respecto a uno de sus lados es igual a $\frac{1}{3}$ del producto del área por el cuadrado de la longitud del otro lado.

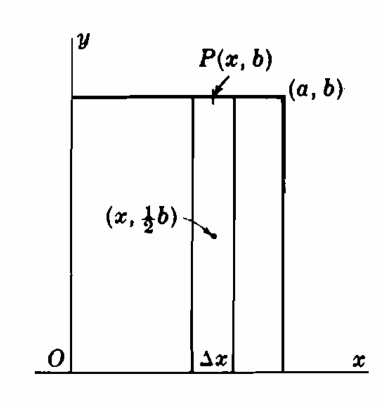


Fig. 38-1

2. Hallar el momento de inercia, con respecto al eje y, del área plana limitada por la parábola $y = 9 - x^2$ y el eje x.

Primera solución. Para el rectángulo genérico de la Fig. 38-2, tenemos, $A = y \cdot \Delta x$, y el centro geométrico está en $(x, \frac{1}{2}y)$. Luego,

$$I_y = \int_{-3}^{3} x^2 y\, dx = 2\int_0^3 (9x^2 - x^4)\, dx = \frac{324}{5}$$

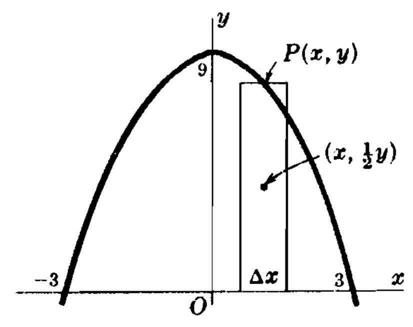


Fig. 38-2

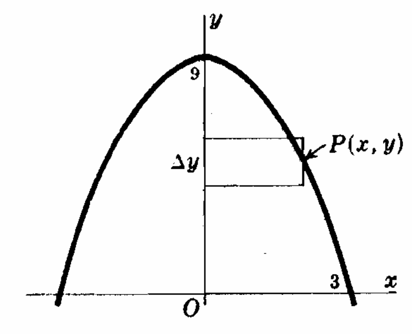


Fig. 38-3

Segunda solución. El área del rectángulo genérico de la Fig. 38-3 es $x \cdot \Delta y$, siendo x la dimensión perpendicular al eje y. Por tanto (ver Problema 1), el momento elemental vale $\frac{1}{3}(x\, \Delta y)x^2$. Así pues, teniendo en cuenta la simetría de la figura,

$$I_y = 2 \cdot \frac{1}{3}\int_0^9 x^3\, dy = \frac{2}{3}\int_0^9 (9-y)^{3/2}\, dy = \frac{324}{5}$$

Luego $A = 2\int_0^9 x\, dy = 2\int_0^9 \sqrt{9-y}\, dy = 36$, $I_y = 324/5 = AR^2$ y el radio de giro es $R = 3/\sqrt{5}$.

3. Hallar el momento de inercia, con respecto al eje y, del área limitada por la parábola $x^2 = 4y$ y la recta $y = x$ (ver Fig. 38-4).

Considerando el rectángulo genérico de la Fig. 38-4, de área $(x - \frac{1}{4}x^2)\, \Delta x$ y cuyo centro geométrico está en $[x, \frac{1}{2}(x + \frac{1}{4}x^2)]$, tendremos,

$$A = \int_0^4 (x - \tfrac{1}{4}x^2)\, dx = \frac{8}{3} \quad \text{e} \quad I_y = \int_0^4 x^2(x - \tfrac{1}{4}x^2)\, dx = \frac{64}{5} = \frac{24}{5}A$$

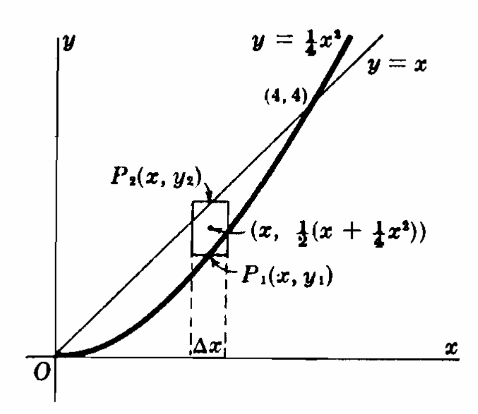


Fig. 38-4

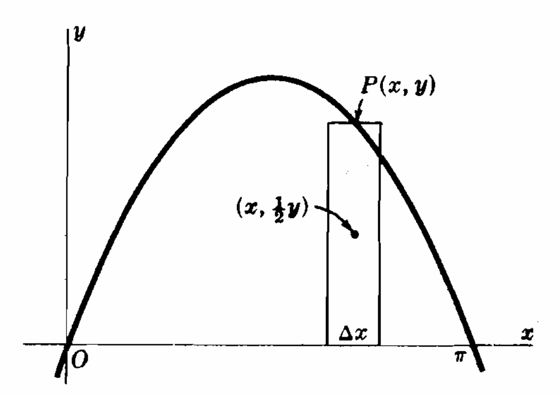


Fig. 38-5

4. Hallar el momento de inercia, con respecto a cada uno de los ejes coordenados, del área limitada por la curva $y = \operatorname{sen} x$ desde $x = 0$ hasta $x = \pi$. (Ver Fig. 38-5.)

$$A = \int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x\Big]_0^\pi = 2$$

$$I_x = \int_0^\pi y^2 \cdot \frac{1}{3}\operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{3}\int_0^\pi \operatorname{sen}^3 x\, dx = \frac{1}{3}\left[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^\pi = \frac{4}{9} = \frac{2}{9}A$$

$$I_y = \int_0^\pi x^2 \operatorname{sen} x\, dx = \Big[2\cos x + 2x\operatorname{sen} x - x^2\cos x\Big]_0^\pi = (\pi^2 - 4) = \frac{1}{2}(\pi^2 - 4)A$$

5. Hallar el momento de inercia de un cilindro circular recto de altura b y radio de la base a. (Ver Fig. 38-6.)

Consideremos que el cilindro se genera en la rotación, alrededor del eje y, de un rectángulo de dimensiones a y b, como se representa en la figura. El centro geométrico del rectángulo genérico es $(x, \frac{1}{2}b)$, y el volumen del anillo generado en dicha rotación alrededor del eje y es, $\Delta V = 2\pi bx \cdot \Delta x$. Por tanto, como $V = \pi ba^2$,

$$I_y = 2\pi\int_0^a x^2 \cdot bx\,dx = \tfrac{1}{2}\pi ba^4 = \tfrac{1}{2}\pi ba^2 \cdot a^2 = \tfrac{1}{2}Va^2$$

Así, pues, el momento de inercia de un cilindro circular recto con respecto a su eje es igual a la mitad de su volumen multiplicado por el cuadrado de su radio.

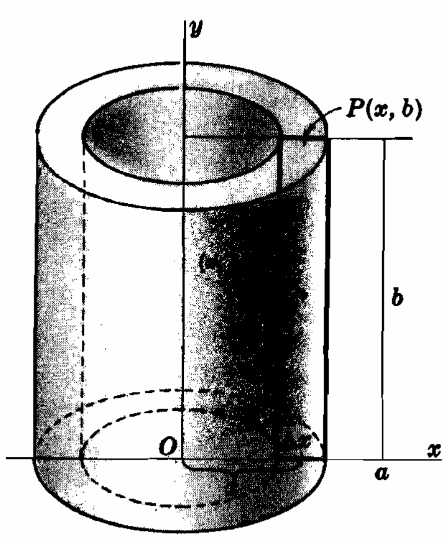


Fig. 38-6

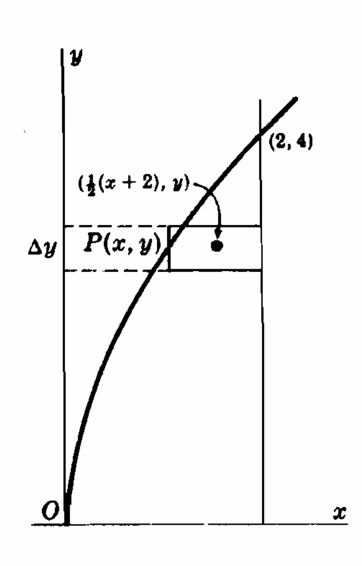


Fig. 38-7

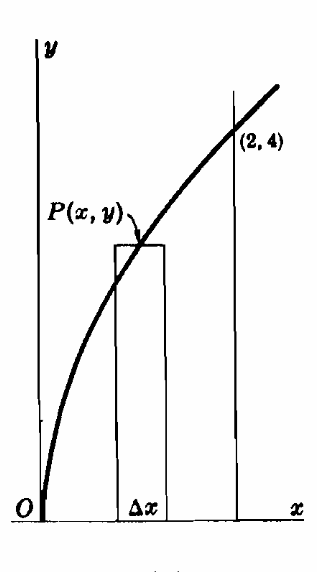


Fig. 38-8

6. Hallar el momento de inercia con respecto a su eje, del sólido generado al girar en la rotación alrededor del eje x, de área del primer cuadrante limitada por la parábola $y^2 = 8x$, el eje x y la recta $x = 2$.

Primera solución. El centro geométrico del rectángulo genérico (Fig. 38-7) es $[\frac{1}{2}(x+2), y]$, y el volumen generado en la rotación del rectángulo alrededor del eje x es $2\pi y(2 - x)\,\Delta y = 2\pi y(2 - y^2/8)\,\Delta y$. Por tanto,

$$V = 2\pi\int_0^4 y(2 - y^2/8)\,dy = 16\pi \quad \text{e} \quad I_x = 2\pi\int_0^4 y^2 \cdot y(2 - y^2/8)\,dy = \frac{256}{3}\pi = \frac{16}{3}V$$

Segunda solución. El volumen generado (Fig. 38-8) en la rotación del rectángulo genérico con respecto al eje x es $\pi y^2\,\Delta x$, y teniendo en cuenta el resultado del Problema 5, su momento de inercia con respecto al eje x vale $\frac{1}{2}y^2(\pi y^2\,\Delta x) = \frac{1}{2}\pi y^4\,\Delta x$. Por tanto,

$$V = \pi\int_0^2 y^2\,dx = 8\pi\int_0^2 x\,dx = 16\pi$$

e

$$I_x = \frac{1}{2}\pi\int_0^2 y^4\,dx = 32\pi\int_0^2 x^2\,dx = \frac{256}{3}\pi = \frac{16}{3}V$$

7. Hallar el momento de inercia, con respecto a su eje, del sólido generado en la rotación del área del Problema 6 con respecto al eje y (Fig. 38-8).

El volumen generado en la rotación del rectángulo genérico con respecto al eje y es $2\pi xy\,\Delta x$. Por consiguiente,

$$V = 2\pi\int_0^2 xy\,dx = 4\sqrt{2}\,\pi\int_0^2 x^{3/2}\,dx = \frac{64}{5}\pi$$

e

$$I_y = 2\pi\int_0^2 x^2 \cdot xy\,dx = 4\sqrt{2}\,\pi\int_0^2 x^{7/2}\,dx = \frac{256}{9}\pi = \frac{20}{9}V$$

8. Hallar el momento de inercia, con respecto a su eje, del volumen de la esfera generada por un círculo de radio r alrededor de un diámetro fijo.

Tomemos el círculo con el diámetro fijo según el eje x, como se representa en la figura. Aplicando el método del anillo,

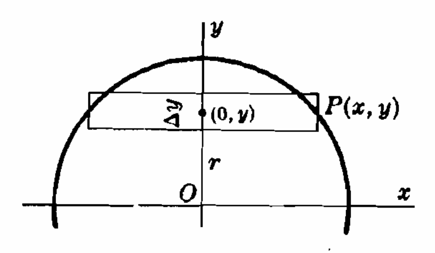


Fig. 38-9

$$V = 2\pi \int_0^r 2x \cdot y\,dy = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

e

$$I_x = 4\pi \int_0^r y^2 \cdot xy\,dy = 4\pi \int_0^r y^3\sqrt{r^2 - y^2}\,dy$$

Haciendo $y = r \operatorname{sen} z$, tendremos $\sqrt{r^2 - y^2} = r \cos z$, $dy = r \cos z\,dz$.

Para pasar de los límites de integración de y a los correspondientes de z, tendremos: para $y = 0$, $0 = r \operatorname{sen} z$, $0 = \operatorname{sen} z$, luego, $z = 0$; para $y = r$, $r = r \operatorname{sen} z$, $1 = \operatorname{sen} z$, luego, $z = \frac{1}{2}\pi$. Por tanto:

$$I_x = 4\pi r^5 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 z \cos^2 z\,dz = 4\pi r^5 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 z)\cos^2 z \operatorname{sen} z\,dz = \tfrac{8}{15}\pi r^5 = \tfrac{2}{5}r^2 V$$

9. Hallar el momento de inercia del área de un círculo de radio r con respecto a una recta situada a s unidades de su centro.

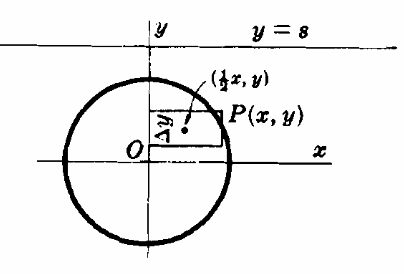


Fig. 38-10

Tomando el centro del círculo como origen, calculemos en primer lugar el momento de inercia del círculo con respecto al diámetro paralelo a la recta dada:

$$I_x = 4\int_0^r y^2 \cdot x\,dy = 4\int_0^r y^2\sqrt{r^2 - y^2}\,dy = \tfrac{1}{4}r^4\pi = \tfrac{1}{4}r^2 A$$

De donde $\quad I_s = I_x + A \cdot s^2 = (\tfrac{1}{4}r^2 + s^2)A$

10. El momento de inercia con respecto a su eje, del sólido generado en la rotación de un arco de la curva $y = \operatorname{sen} x$ alrededor del eje x es $I_x = \pi^2/16 = 3V/8$. Hallar el momento de inercia del sólido con respecto a la recta $y = 2$.

$$I_{y=2} = I_x + 2^2 V = 3V/8 + 4V = 35V/8$$

Problemas propuestos

11. Hallar el momento de inercia del área plana dada con respecto a la recta indicada:

(a) $y = 4 - x^2$, $x = 0$, $y = 0$; eje x, eje y — *Sol.* $128A/35$, $4A/5$
(b) $y = 8x^3$, $y = 0$, $x = 1$; eje x, eje y — *Sol.* $128A/15$, $2A/3$
(c) $x^2 + y^2 = a^2$; un diámetro — *Sol.* $a^2A/4$
(d) $y^2 = 4x$, $x = 1$; eje x, eje y — *Sol.* $4A/5$, $3A/7$
(e) $4x^2 + 9y^2 = 36$; eje x, eje y — *Sol.* A, $9A/4$

12. Teniendo en cuenta los resultados del Problema 11 y el teorema de Steiner, obtener el momento de inercia del área dada con respecto a la recta que se indica.

(a) $y = 4 - x^2$; $y = 0$; $x = 4$ (b) $x^2 + y^2 = a^2$; una tangente (c) $y^2 = 4x$, $x = 1$; $x = 1$
Sol. (a) $84A/5$ (b) $5a^2A/4$ (c) $10A/7$

13. Hallar el momento de inercia, con respecto a su eje, del sólido generado en la rotación del área plana dada alrededor de la recta que se indica:

(a) $y = 4x - x^2$, $y = 0$; eje x, eje y (c) $4x^2 + 9y^2 = 36$; eje x, eje y
(b) $y^2 = 8x$, $x = 2$; eje x, eje y (d) $x^2 + y^2 = a^2$; $y = b$, $b > a$
Sol. (a) $128V/21$, $32V/5$ (b) $16V/3$, $20V/9$ (c) $8V/5$, $18V/5$ (d) $(b^2 + \frac{3}{4}a^2)V$

14. Aplicando el teorema de Steiner, obtener el momento de inercia de (a) una esfera de radio r con respecto a una tangente a ella, (b) un cilindro circular recto con respecto a una de sus generatrices.
Sol. (a) $7r^2V/5$, (b) $3r^2V/2$.

15. Demostrar que el momento de inercia de un área plana con respecto a una recta L perpendicular a su plano (o con respecto al pie de esta perpendicular) es igual a la suma de los momentos de inercia con respecto a dos rectas cualesquiera perpendiculares entre sí, situadas en el plano y que pasen por el pie de L.

16. Hallar el *momento de inercia polar* I_0 (momento de inercia con respecto al origen) del: (a) triángulo limitado por $y = 2x$, $y = 0$, $x = 4$, (b) círculo de radio r con su centro en el origen, (c) círculo $x^2 - 2rx + y^2 = 0$, (d) área limitada por la recta $y = x$ y la parábola $y^2 = 2x$.

Sol. (a) $I_0 = I_x + I_y = 56A/3$, (b) $\frac{1}{2}r^2A$, (c) $3r^2A/2$, (d) $72A/35$.

Capítulo 39

Presión de los fluidos

PRESION = fuerza por unidad de superficie = $\dfrac{\text{fuerza que actúa perpendicularmente a una superficie}}{\text{área sobre la que se distribuye la fuerza}}$

La presión p ejercida sobre una superficie horizontal de área A debida al peso de una columna de fluido de altura h es $p = \gamma h$, siendo γ el peso específico del fluido o peso por unidad de volumen. La fuerza ejercida sobre esta superficie es: presión $\times$ área de la superficie $= \gamma hA$.

La presión ejercida por un fluido en un punto cualquiera de su interior es igual en todas las direcciones.

FUERZA SOBRE UNA SUPERFICIE PLANA SUMERGIDA EN UN FLUIDO. La Fig. 39-1 representa una superficie plana sumergida verticalmente en un líquido de peso específico γ. Tomemos los ejes coordenados de forma que la superficie esté en el plano xy, con el eje x en la superficie libre del líquido y el sentido positivo del eje y hacia arriba. Dividamos el área en franjas (siempre paralelas a la superficie libre del líquido) y aproximemos cada una de ellas a un rectángulo (como se hizo en el Capítulo 34).

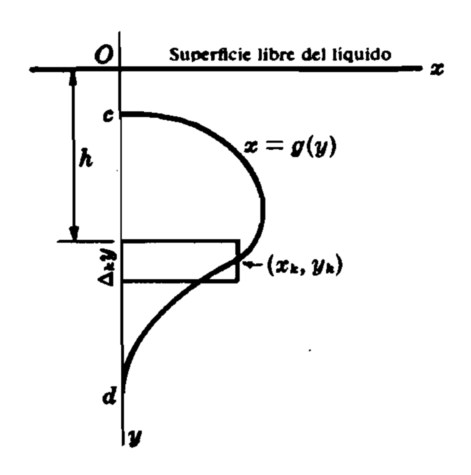


Fig. 39-1

Si llamamos h a la profundidad del lado superior del rectángulo genérico de la figura, la fuerza ejercida sobre este rectángulo, de altura $\Delta_k y$ y base $x_k = g(y'_k)$ es $\gamma \cdot y'_k \cdot g(y_k) \cdot \Delta_k y$, siendo y'_k un valor de y comprendido entre h y $h + \Delta_k y$. La fuerza total sobre la superficie plana es, según el teorema de Bliss,

$$F = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \gamma \cdot y'_k \cdot g(y_k) \Delta_k y = \gamma \int_c^d y \cdot g(y)\, dy = \gamma \int_c^d yx\, dy$$

La fuerza ejercida sobre una superficie plana sumergida verticalmente en un líquido es igual al producto del peso específico del líquido por el área sumergida y por la distancia a la superficie libre del líquido del centro geométrico del área sumergida. Esto, más que una fórmula, es un enunciado que se deberá utilizar en el planteamiento de la integral correspondiente en cada caso.

Problemas resueltos

1. Hallar la fuerza ejercida sobre una de las caras de un rectángulo sumergido en agua, como indica la Fig. 39-2. El peso específico del agua es 1 000 kilopondios por metro cúbico.

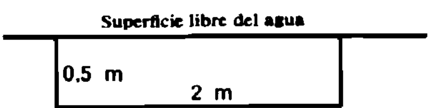


Fig. 39-2

El área sumergida es $0,5 \times 2 = 1\ m^2$, y su centro geométrico está 0,25 m por debajo de la superficie libre. Por tanto,

F = peso específico $\times$ área $\times$ profundidad del centroide
$= 1\,000\ kp/m^3 \times 1\ m^2 \times 0,25\ m = 250\ kp$

2. Hallar la fuerza ejercida sobre una de las caras del rectángulo sumergido en agua que indica la Fig. 39-3.

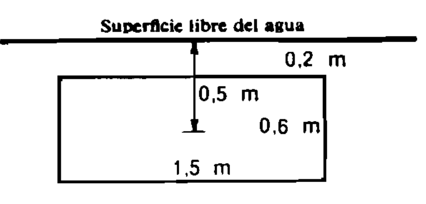


Fig. 39-3

El área sumergida es de $9\ m^2$, y su centro geométrico está 0,5 m por debajo de la superficie libre.

$F = 1\,000\ kp/m^3 \times 9\ m^2 \times 0,5\ m = 4\,500\ kp$

3. Hallar la fuerza ejercida sobre una de las caras del triángulo representado en la Fig. 39-4, siendo la unidad de longitud el metro, y el peso específico del líquido 800 kilopondios por metro cúbico.

Primera solución. El área sumergida está limitada por las rectas $x = 0$, $y = 2$ y $3x + 2y = 10$. La fuerza ejercida sobre el rectángulo genérico de área $x \cdot \Delta y$ y profundidad y es $\gamma \cdot y \cdot x \cdot \Delta y = \gamma y \left(\frac{10-2y}{3}\right) \Delta y$. Por tanto,

$$F = \gamma \int_2^5 y\left(\frac{10-2y}{3}\right) dy = 9\gamma = 7\,200 \text{ kp}$$

Segunda solución. El área sumergida es 3 m² y su centro geométrico está $2 + \frac{1}{3}(3) = 3$ m por debajo de la superficie libre del líquido. Por tanto, $F = 800 \times 3 \times 3 = 7\,200$ kp.

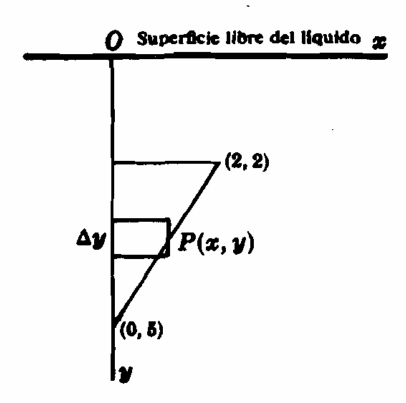


Fig. 39-4

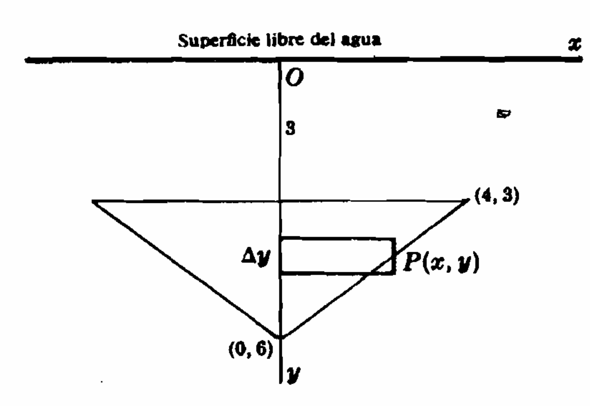


Fig. 39-5

4. Una superficie triangular, de lados 5, 5, y 8 metros, está sumergida verticalmente en agua con su lado mayor horizontal, como representa la Fig. 39-5, situado 3 metros por debajo de la superficie libre. Hallar la fuerza ejercida sobre una de las caras de la superficie.

Primera solución. Eligiendo los ejes que se indican en la figura, se observa que la fuerza pedida es el doble de la ejercida sobre el área limitada por las rectas $y = 3$, $x = 0$ y $3x + 4y = 24$. El área del triángulo genérico es $x \cdot \Delta y$, y la profundidad de su centro geométrico es y. Por consiguiente, $\Delta F = \gamma y x \cdot \Delta y = \gamma y(8 - 4y/3)\,\Delta y$, y

$$F = 2\gamma \int_3^6 y(8 - {}^4\!/_3 y)\, dy = 48\gamma = 48\,000 \text{ kp}$$

Segunda solución. El área sumergida vale 12 m², y su centro geométrico está $3 + \frac{1}{3}(3) = 4$ m por debajo de la superficie libre. Por tanto, $F = 1\,000(12)(4) = 4\,800$ kp.

5. Hallar la fuerza ejercida sobre el fondo de un recipiente de forma semicircular de 2 metros de radio cuando está lleno de un líquido de peso específico 900 kilopondios por metro cúbico.

Eligiendo los ejes coordenados que se indican en la Fig. 39-6, la fuerza ejercida sobre el rectángulo genérico es $\gamma y x \cdot \Delta y = \gamma y\sqrt{4-y^2} \cdot \Delta y$. Por tanto,

$$F = 2\gamma \int_0^2 y\sqrt{4-y^2}\, dy = \frac{16}{3}\gamma = 4\,800 \text{ kp}$$

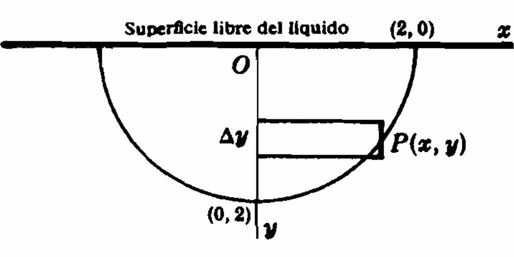


Fig. 39-6

6. Una superficie plana, cuya forma es la de un segmento parabólico de 12 metros de base y 4 metros de altura, está sumergida en el agua de manera que su base se encuentra en la superficie libre del líquido. Hallar la fuerza ejercida sobre una de las caras de la superficie.

Elegido un sistema de coordenadas como indica la Fig. 39-7, la ecuación de la parábola es $x^2 = 9y$. El área del rectángulo genérico es $2x \cdot \Delta y$, y la profundidad de su centro geométrico es $4 - y$. Por tanto,

$$\Delta F = 2\gamma(4-y)x \cdot \Delta y = 2\gamma(4-y) \cdot 3\sqrt{y}\,\Delta y$$

$$\text{y } F = 6\gamma \int_0^4 (4-y)\sqrt{y}\, dy = \frac{256}{5}\gamma = 51\,000 \text{ kp}$$

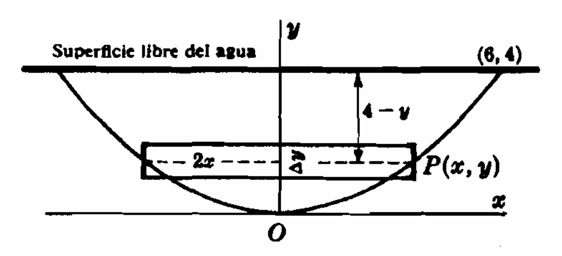


Fig. 39-7

7. Hallar la fuerza ejercida sobre la superficie de Problema 6, cuando esta se encuentra parcialmente sumergida en un líquido de peso específico 800 kilopondios por metro cúbico, de manera que su eje es paralelo a la superficie libre y situado 3 metros por debajo de ella.

Eligiendo los ejes coordenados que se indican en la Fig. 39-8, la ecuación de la parábola es $y^2 = 9x$.

El área del rectángulo genérico es $(4 - x)\Delta y$, la profundidad de su centro geométrico es $3 - y$, y la fuerza ejercida sobre él vale

$$\Delta F = \gamma(3 - y)(4 - x)\Delta y = \gamma(3 - y)(4 - y^2/9)\Delta y$$

Por tanto, $F = \gamma \int_{-6}^{3} (3 - y)\left(4 - \frac{y^2}{9}\right) dy$

$$= \frac{405}{4}\gamma = 101\,000 \text{ kp}$$

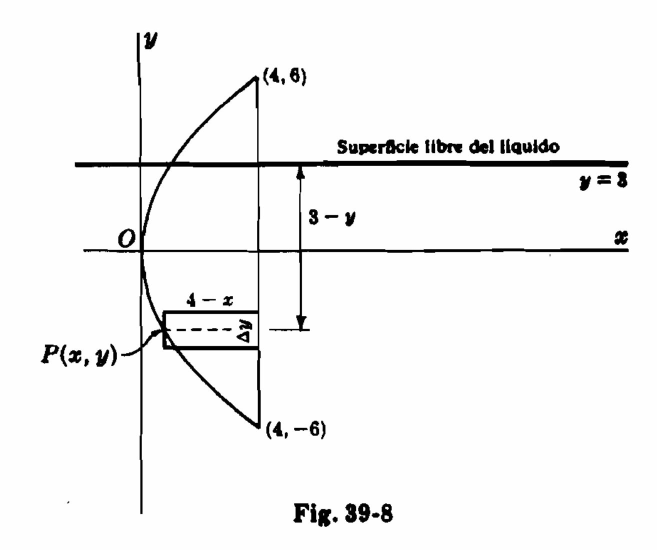


Fig. 39-8

Problemas propuestos

8. Una superficie rectangular de 6 × 8 metros está sumergida verticalmente en un líquido de peso específico γ (kilopondios por metro cúbico). Hallar la fuerza ejercida sobre una de las caras:

(*a*) Si el lado más pequeño está situado en la superficie libre.

(*b*) Si el lado más pequeño es el más próximo a la superficie libre y está situado 2 metros por debajo de ella.

(*c*) Si el lado mayor está situado en la superficie libre.

(*d*) Si la superficie se mantiene, por medio de una cuerda atada a un vértice, 2 metros por debajo de la superficie libre.

Sol. (*a*) 192γ kp, (*b*) 288γ kp, (*c*) 144γ kp, (*d*) 336γ kp.

9. Suponiendo el eje x horizontal y el eje y vertical, con el sentido positivo hacia abajo, hallar la fuerza ejercida sobre una cara de cada una de las superficies siguientes, suponiendo que las dimensiones se expresan en metros y que el peso específico del fluido es γ (kilopondios por metro cúbico),

(*a*) $y = x^2, y = 4$; superficie del fluido en $y = 0$. *Sol.* $128\gamma/5$ kp

(*b*) $y = x^2, y = 4$; superficie del fluido en $y = -2$. *Sol.* $704\gamma/15$ kp

(*c*) $y = 4 - x^2, y = 0$; superficie del fluido en $y = 0$. *Sol.* $256\gamma/15$ kp

(*d*) $y = 4 - x^2, y = 0$; superficie del fluido en $y = -3$. *Sol.* $736\gamma/15$ kp

(*e*) $y = 4 - x^2, y = 2$; superficie del fluido en $y = -1$. *Sol.* $152\sqrt{2}\gamma/15$ kp

10. Un recipiente de sección trapezoidal, tiene 2 metros de base inferior, 4 metros de base superior y 3 metros de altura. Hallar la fuerza ejercida sobre el fondo (*a*) cuando está lleno de agua, (*b*) cuando contiene 2 metros de agua.
Sol. (*a*) 1 200 kp, (*b*) 4 900 kp.

11. Una superficie plana circular de 2 metros de radio está sumergida verticalmente en un líquido (γ kilopondios por metro cúbico) de forma que su centro queda 4 metros por debajo de la superficie libre. Hallar la fuerza ejercida sobre la mitad inferior y sobre la mitad superior de la superficie en cuestión. *Sol.* $(8\pi + 16/3)\gamma$ kp, $(8\pi - 16/3)\gamma$ kp.

12. Un depósito cilíndrico apoyado sobre una de sus generatrices, de 6 metros de radio, contiene un aceite de peso específico γ (kilopondios por metro cúbico) con una profundidad de 9 metros. Hallar la fuerza ejercida sobre cada una de las bases. *Sol.* $(72\pi + 81\sqrt{3})\gamma$ kp.

13. Se llama centro de presión de una superficie (Fig. 39-1) sumergida en un fluido, a un punto $(\bar{x}, \bar{y})$, en el que se debe aplicar una fuerza F para que produzca el mismo momento, con respecto a un eje cualquiera horizontal (vertical), que las fuerzas aplicadas sobre ella.

(*a*) Demostrar que $$F\bar{x} = \tfrac{1}{2}\gamma \int_c^d yx^2\,dy \text{ y } F\bar{y} = \gamma \int_c^d y^2x\,dy$$

(*b*) Demostrar que la profundidad del centro de presión es igual al momento de inercia de la superficie dividido por el momento del área de la misma, ambos con respecto a una recta situada en la superficie libre del líquido.

14. Teniendo en cuenta el apartado (*b*) del Problema 13, hallar la profundidad del centro de presión con respecto a la superficie libre del líquido en el (*a*) Problema 5, (*b*) Problema 6, (*c*) Problema 7, (*d*) Problema 9(*a*), (*e*) Problema 9(*b*).

Sol. (*a*) $3\pi/8$, (*b*) 16/7, (*c*) 126/25, (*d*) 20/7, (*e*) 358/77.

Capítulo 40

Trabajo mecánico

FUERZA CONSTANTE. El trabajo W realizado por una fuerza constante F a lo largo de un espacio s, en línea recta, es $F \cdot s$ unidades.

FUERZA VARIABLE. Consideremos una fuerza que varíe constantemente a lo largo de un espacio rectilíneo. Llamando x a la distancia del punto de aplicación de la fuerza a un punto fijo de la recta, la fuerza vendrá dada por una función, $F(x)$, de x.

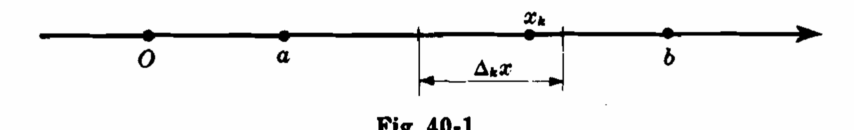


Fig. 40-1

Para hallar el trabajo realizado cuando el punto de aplicación se desplaza desde $x = a$ hasta $x = b$,

(a) Se divide el intervalo $a \leq x \leq b$ en n subintervalos de longitud $\Delta_k x$ y sea x_k un punto cualquiera del k-ésimo subintervalo.

(b) Se supone que durante el desplazamiento a lo largo del k-ésimo subintervalo la fuerza es constante e igual a $F(x_k)$; el trabajo realizado es igual a $F(x_k)\Delta_k x$, y el trabajo total debido al conjunto de las n fuerzas, vendrá dado por

$$\sum_{k=1}^{n} F(x_k)\,\Delta_k x.$$

(c) Se aplica la regla de Barrow o teorema fundamental del cálculo integral suponiendo que el número de subintervalos crece indefinidamente de manera que $\Delta_k x \to 0$; en estas condiciones tendremos

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} F(x_k)\,\Delta_k x = \int_a^b F(x)\,dx$$

Problemas resueltos

1. Entre ciertos límites, la fuerza necesaria para estirar (comprimir) un resorte es proporcional al alargamiento (acortamiento), en donde la constante de proporcionalidad se denomina *constante de rigidez* del resorte. Suponiendo que para producir en un resorte, cuya longitud natural es de 10 centímetros, un alargamiento de 2,5 milímetros se necesita aplicar una fuerza de 25 kilopondios, calcular el trabajo realizado para alargarlo desde 11 a 22 centímetros.

Sea x el alargamiento: en estas condiciones, $F(x) = kx$.

Para $x = \frac{1}{4}$, $F(x) = 25$; luego $25 = \frac{1}{4}k$, $k = 100$, y $F(x) = 100x$.

El trabajo correspondiente a un alargamiento Δx es $100x \cdot \Delta x$, y el trabajo pedido será

$$W = \int_1^2 100x\,dx = 150 \text{ kp}\cdot\text{cm}$$

2. La constante de rigidez de un resorte vale 400 000 kilopondios por metro. Hallar el trabajo necesario para comprimirlo 1 centímetro.

Sea x el desplazamiento, en metros, del extremo libre del muelle. En estas condiciones, $F(x) = 400\,000x$ y el trabajo correspondiente al desplazamiento Δx vale $400\,000x \cdot \Delta x$. Por consiguiente,

$$W = \int_0^{1/100} 400\,000x\,dx = 20 \text{ kpm}$$

3. De un tambor cilíndrico se han desenrollado 50 metros de un cable que pesa 3 kilopondios por metro. Hallar el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad para desenrollar 250 metros más.

Sea x = longitud desenrollada en un instante dado. Entonces, $F(x) = 3x$ y

$$W = \int_{50}^{300} 3x\,dx = 131\,250 \text{ kpm}$$

4. Un cable de 100 metros y 5 kilopondios por metro de peso, está unido a un cuerpo de 500 kilopondios. Hallar el trabajo realizado al enrollar 80 metros de cable sobre un tambor.

Sea x la longitud de cable que se ha enrollado en el tambor.

El peso total (cable y cuerpo) es $500 + 5(100 - x) = 1\,000 - 5x$, y el trabajo realizado para elevar el cuerpo una distancia Δx es $(1\,000 - 5x)\,\Delta x$. Por tanto, el trabajo pedido será:

$$W = \int_{0}^{80} (1\,000 - 5x)\,dx = 64\,000 \text{ kpm}$$

5. Un depósito cilíndrico circular, de 2 metros de radio y 8 metros de altura, está lleno de agua. Hallar el trabajo realizado al bombear todo el agua hasta la base superior del depósito. El peso específico γ del agua igual a 1 000 kilopondios por metro cúbico.

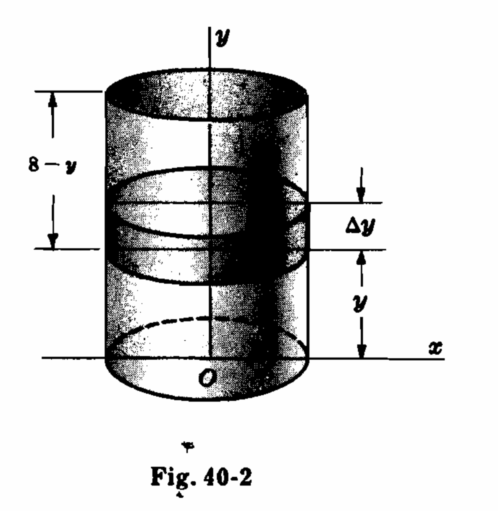


Fig. 40-2

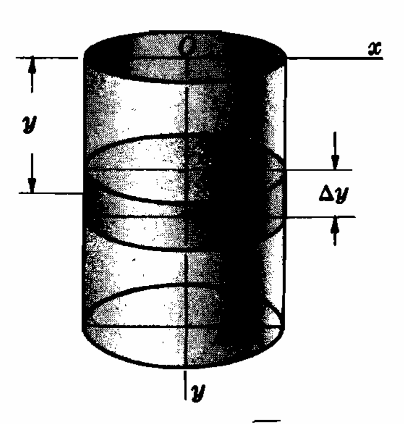


Fig. 40-3

Primera solución. Supongamos (Fig. 40-2) que el agua es impulsada por medio de un pistón que empuja al agua desde el fondo del depósito. En la figura, se representa al pistón situado a una distancia y metros del fondo. La fuerza necesaria para elevar el agua es igual al peso del agua que gravita sobre el pistón, es decir, $F(y) = \pi r^2\gamma(8 - y) = 4\pi\gamma(8 - y)$ con lo que el trabajo correspondiente a un desplazamiento Δy del pistón será $4\pi\gamma(8 - y)\cdot\Delta y$. El trabajo necesario para vaciar el depósito es, en consecuencia,

$$W = 4\pi\gamma \int_{0}^{8} (8 - y)\,dy = 128\,\pi\gamma = 128\pi(1\,000) = 128\,000\pi \text{ kpm}$$

Segunda solución. Imaginamos (Fig. 40-3) que el agua del depósito se divide en n discos de espesor Δy; para vaciar el depósito, habrá que elevar cada uno de estos discos hasta la base superior. El trabajo necesario para elevar el disco genérico de la figura, situado a una distancia y de la superficie libre y cuyo peso es de $4\pi\gamma\cdot\Delta y$, es igual a $4\pi\gamma y\cdot\Delta y$. Teniendo en cuenta el teorema fundamental, cuando el número de discos crece indefinidamente,

$$W = 4\pi\gamma \int_{0}^{8} y\,dy = 128\pi\gamma = 128\,000\pi \text{ kpm}$$

6. La dilatación del gas contenido en un depósito cilíndrico desplaza un émbolo de forma que el volumen del gas aumenta de 15 a 25 centímetros cúbicos. Suponiendo que la relación entre la presión (p kilopondios por centímetro cuadrado) y el volumen (v centímetros cúbicos) viene dada por $pv^{1,4} = 60$, hallar el trabajo realizado en la expansión.

Sea A el área de la sección del cilindro; en estas condiciones, la fuerza ejercida por el gas es pA. Un aumento de volumen Δv supone una elevación del pistón de $\Delta v/A$, y el trabajo correspondiente a este desplazamiento es

$$pA\cdot\frac{\Delta v}{A} = \frac{60}{v^{1,4}}\,\Delta v \text{ Luego,}$$

$$W = 60\int_{15}^{25}\frac{dv}{v^{1,4}} = -\frac{60}{0,4}\,v^{-0,4}\Big]_{15}^{25} = -150\left(\frac{1}{25^{0,4}} - \frac{1}{15^{0,4}}\right) = 9,39 \text{ kp}\cdot\text{cm}$$

7. Un depósito cónico (Fig. 40-4) cuya base tiene un diámetro de 4 metros y cuya altura mide 5 metros, contiene un líquido de peso específico γ kilopondios por metro cúbico. Sabiendo que la profundidad del líquido del depósito es de 3 metros, hallar el trabajo necesario para bombear todo el líquido hasta una altura de 1 metro por encima de la parte superior del depósito.

Consideremos un disco genérico cuyo radio sea x, de espesor Δy y distante del fondo del depósito y. El peso de este disco será $\pi\gamma x^2 \cdot \Delta y$, y el trabajo necesario para elevarlo hasta la altura indicada será $\pi\gamma x^2(6 - y)\,\Delta y$.

De los triángulos semejantes, $x/y = 2/5$ ó $x = 2/5y$. Luego

$$W = \frac{4}{25}\pi\gamma \int_0^3 y^2(6 - y)\,dy = 5{,}4\pi\gamma \text{ kpm}$$

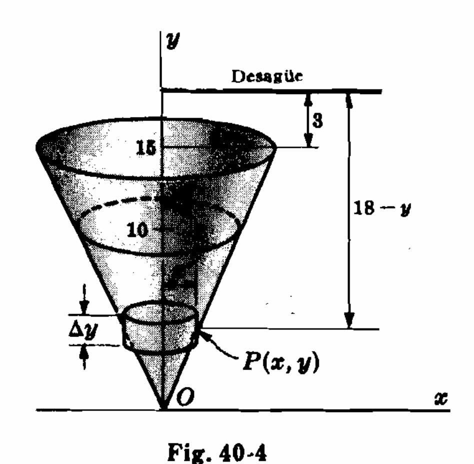


Fig. 40-4

Problemas propuestos

8. Sabiendo que para producir un alargamiento de 1 centímetro en un resorte de 12 centímetros de longitud natural hay que aplicar una fuerza de 80 kilopondios, calcular el trabajo necesario para alargarlo (*a*) desde 12 a 15 centímetros, (*b*) desde 15 a 16 centímetros. *Sol.* (*a*) 360 kp cm, (*b*) 280 kp. cm.

9. Dos partículas se repelen mutuamente con una fuerza inversamente proporcional a la distancia que las separa. Suponiendo que una de ellas permanece fija en un punto del eje x a 2 unidades a la derecha del origen, hallar el trabajo necesario para desplazar a la otra desde un punto situado 3 unidades a la izquierda del origen hasta el origen. *Sol.* $3k/10$.

10. La fuerza con que la tierra atrae a un cuerpo de peso γ kilopondios situado a una distancia s kilómetros de su centro es igual a $F = (4\,000)^2\gamma/2{,}2s^2$. Suponiendo que el radio de la tierra es de 6 400 kilómetros, hallar el trabajo realizado contra la fuerza de la gravedad para mover un cuerpo de 1 kilopondio desde la superficie de la tierra hasta un punto situado a 1 000 kilómetros de dicha superficie. *Sol.* $15{,}4 \times 10^3$ kpm.

11. Hallar el trabajo realizado contra la fuerza de la gravedad para elevar un cohete de 8 toneladas métricas de peso hasta una altura de 200 kilómetros sobre la superficie terrestre. *Sol.* $34{,}5 \times 10^6$ kpm.

12. Hallar el trabajo realizado en una mina al elevar 500 kilopondios de cal una altura de 500 metros por medio de un cable que pesa 3 kilopondios por metro. *Sol.* $6{,}25 \times 10^5$ kpm.

13. Un depósito tiene una base cuadrada de 3 metros de lado y una altura de 2 metros. Hallar el trabajo realizado para vaciarlo por su parte superior (*a*) si está totalmente lleno de agua, (*b*) si el agua ocupa las 3/4 partes del depósito. *Sol.* (*a*) 18 000 kpm, (*b*) 16 875 kpm.

14. Un depósito semiesférico de 1 metro de radio está totalmente lleno de agua. Hallar (*a*) el trabajo necesario para bombear el agua por la parte superior del depósito, (*b*) para vaciarlo a través de un tubo situado a una altura de 60 centímetros con respecto a dicha parte superior. *Sol.* (*a*) 786 kpm, (*b*) 2 040 kpm.

15. Hallar el trabajo necesario para llenar un depósito cilíndrico de 3 metros de radio y 10 metros de altura de un líquido de peso específico γ kilopondios por metro cúbico a través de un orificio practicado en su fondo. Idem, suponiendo que el depósito está horizontal. *Sol.* $450\pi\gamma$ kpm, $270\pi\gamma$ kpm.

16. Demostrar que el trabajo necesario para bombear el agua de un depósito a través de su parte superior es igual al necesario para elevar su contenido desde el centro geométrico del líquido hasta el orificio de salida.

17. Un peso de 100 kilopondios se arrastra hacia arriba por un plano inclinado de 20 metros de longitud que forma un ángulo de 30° con la horizontal. Sabiendo que la fuerza de rozamiento que se opone al movimiento es μN, siendo $\mu = 1/\sqrt{3}$ el coeficiente de rozamiento y $N = 100 \cos 30°$ la fuerza normal entre el peso y la rampa, hallar el trabajo realizado. *Sol.* 2 000 kpm.

18. Resolver el Problema 17 suponiendo que el ángulo de inclinación de la rampa es de 45° y que el coeficiente de rozamiento vale $\mu = 1/\sqrt{2}$. *Sol.* $1\,000(1 + \sqrt{2})$ kpm.

19. Un cilindro contiene un volumen de aire sobre el que se apoya un émbolo. Sabiendo que cuando la presión es de 20 kilopondios por metro cuadrado el volumen ès de 100 metros cúbicos, hallar el trabajo realizado por el émbolo para comprimir el aire hasta 2 metros cúbicos (*a*) suponiendo pv = constante, (*b*) suponiendo $pv^{1,4}$ = constante.
Sol. (*a*) 7 824 kpm, (*b*) 18 910 kpm.

Capítulo 41

Longitud de un arco

LA LONGITUD DE UN ARCO AB de una curva es, por definición, el límite de la suma de las longitudes de las distintas cuerdas AP_1, P_1P_2, . . ., $P_{n-1}B$, que unen los distintos puntos del arco, cuando el número de estos crece indefinidamente, de manera que la longitud de cada una de las cuerdas tiende a cero.

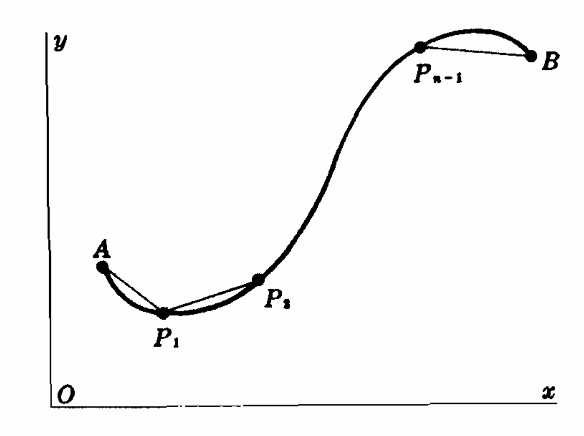


Fig. 41-1

Sean $A(a, c)$ y $B(b, d)$ dos puntos de una curva $y = f(x)$, con $f(x)$ y su derivada, $f'(x)$, continua en el intervalo $a \leq x \leq b$; en estas condiciones, la longitud del arco AB viene dada por

$$s = \int_{AB} ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Análogamente, si $A(a, c)$ y $B(b, d)$ son dos puntos de la curva $x = g(y)$, siendo $g(y)$ y su derivada con respecto a y continua en el intervalo $c \leq y \leq d$, la longitud del arco AB viene dada por

$$s = \int_{AB} ds = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Si $A(u = u_1)$ y $B(u = u_2)$ son dos puntos de una curva definida por las ecuaciones paramétricas $x = f(u)$, y $y = g(u)$ que cumplen las condiciones de continuidad, la longitud del arco AB viene dada por

$$s = \int_{AB} ds = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\, du$$

(Véase la deducción en el Problema 1.)

Problemas resueltos

1. Deducir la fórmula de la longitud de un arco

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Dividamos el intervalo $a \leq x \leq b$ en subintervalos mediante los puntos $\xi_0 = a, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n = b$, y levantemos en ellos rectas perpendiculares; sobre la curva se determinan los puntos $P_0 = A, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n = B$ como indica la Fig. 41-2. En una cuerda representativa se verifica,

$$P_{k-1}P_k = \sqrt{(\Delta_k x)^2 + (\Delta_k y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_k y}{\Delta_k x}\right)^2}\, \Delta_k x$$

Según el teorema del valor medio (Capítulo 21) existirá al menos un punto, $x = x_k$, sobre el arco $P_{k-1}P_k$ en la que la pendiente de la tangente, $f'(x_k)$, es igual a la pendiente, $\dfrac{\Delta_k y}{\Delta_k x}$ de la cuerda $P_{k-1}P_k$. Así, pues,

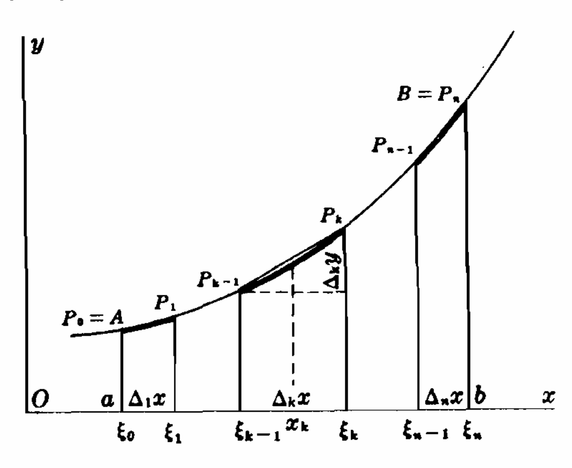


Fig. 41-2

$$P_{k-1}P_k = \sqrt{1 + \{f'(x_k)\}^2}\,\Delta_k x, \qquad \xi_{k-1} < x_k < \xi_k$$

y, aplicando el teorema fundamental,

$$AB = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \{f'(x_k)\}^2}\,\Delta_k x = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

2. Hallar la longitud del arco de la curva $y = x^{3/2}$ desde $x = 0$ e $x = 5$.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2}x^{1/2}$ y

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Big]_0^5 = \frac{335}{27} \text{ unidades}$$

3. Hallar la longitud del arco de la curva $x = 3y^{3/2} - 1$ desde $y = 0$ a $y = 4$.

$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{9}{2}y^{1/2}$ y

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{81}{4}y}\,dy = \frac{8}{243}(82\sqrt{82} - 1) \text{ unidades}$$

4. Hallar la longitud del arco de $24xy = x^4 + 48$ desde $x = 2$ a $x = 4$.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^4 - 16}{8x^2}$ y $1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = \dfrac{1}{64}\left(\dfrac{x^4 + 16}{x^2}\right)^2$. De donde $s = \dfrac{1}{8}\displaystyle\int_2^4 \left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right)dx = \dfrac{17}{6}$ unidades

5. Hallar la longitud del arco de la catenaria $y = \frac{1}{2}a(e^{x/a} + e^{-x/a})$ desde $x = 0$ a $x = a$.

$\dfrac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a})$ y $1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}(e^{2x/a} - 2 + e^{-2x/a}) = \frac{1}{4}(e^{x/a} + e^{-x/a})^2$. Por tanto,

$$s = \frac{1}{2}\int_0^a (e^{x/a} + e^{-x/a})\,dx = \frac{1}{2}a\left[e^{x/a} - e^{-x/a}\right]_0^a = \frac{1}{2}a\left(e - \frac{1}{e}\right) \text{ unidades}$$

6. Hallar la longitud del arco de la parábola $y^2 = 12x$ limitado por la ordenada correspondiente a $x = 3$.

La longitud pedida es el doble de la que hay desde el punto (0, 0) al punto (3, 6).

$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y}{6}$ y $1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2 = \dfrac{36 + y^2}{36}$. Por tanto,

$$s = 2\left(\frac{1}{6}\right)\int_0^6 \sqrt{36 + y^2}\,dy = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}y\sqrt{36 + y^2} + 18\ln(y + \sqrt{36 + y^2})\right]_0^6$$
$$= 6\{\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\} \text{ unidades}$$

7. Hallar la longitud del arco de la curva $x = t^2$, $y = t^3$ desde $t = 0$ a $t = 4$.

$\dfrac{dx}{dt} = 2t$, $\dfrac{dy}{dt} = 3t^2$, y $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 = 4t^2 + 9t^4 = 4t^2\left(1 + \dfrac{9}{4}t^2\right)$. Por tanto

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}t^2}\cdot 2t\,dt = \frac{8}{27}(37\sqrt{37} - 1) \text{ unidades}$$

8. Hallar la longitud de un arco de la cicloide $x = \theta - \text{sen}\,\theta$, $y = 1 - \cos\theta$.

Se describe un arco cuando θ varía desde $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$.

$\dfrac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta} = \text{sen}\,\theta$, y $\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2 = 2(1 - \cos\theta) = 4\,\text{sen}^2\,\frac{1}{2}\theta$. Por tanto

$$s = 2\int_0^{2\pi} \text{sen}\,\frac{1}{2}\theta\,d\theta = -4\cos\frac{1}{2}\theta\Big]_0^{2\pi} = 8 \text{ unidades}$$

Problemas propuestos

Hallar, en los problemas 9-20, la longitud de la curva entera ó del arco indicado.

9. $y^3 = 8x^2$ desde $x = 1$ a $x = 8$. *Sol.* $(104\sqrt{13} - 125)/27$ unidades.

10. $6xy = x^4 + 3$ desde $x = 1$ a $x = 2$. *Sol.* 17/12 unidades.

11. $y = \ln x$ desde $x = 1$ a $x = 2\sqrt{2}$. *Sol.* $3 - \sqrt{2} + \ln \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})$ unidades.

12. $27y^2 = 4(x-2)^3$ desde $(2, 0)$ a $(11, 6\sqrt{3})$. *Sol.* 14 unidades.

13. $y = \ln (e^x - 1)/(e^x + 1)$ desde $x = 2$ a $x = 4$. *Sol.* $\ln (e^4 + 1) - 2$ unidades.

14. $y = \ln (1 - x^2)$ desde $x = 1/4$ a $x = 3/4$. *Sol.* $\ln 21/5 - 1/2$ unidades.

15. $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4} \ln x$ desde $x = 1$ a $x = e$. *Sol.* $\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}$ unidades.

16. $y = \ln \cos x$ desde $x = \pi/6$ a $x = \frac{1}{4}\pi$. *Sol.* $\ln (1 + \sqrt{2})/\sqrt{3}$ unidades.

17. $x = a \cos \theta$, $y = a \operatorname{sen} \theta$. *Sol.* $2\pi a$ unidades.

18. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$ desde $t = 0$ a $t = 4$. *Sol.* $\sqrt{2}(e^4 - 1)$ unidades.

19. $x = \ln\sqrt{1 + t^2}$, $y = \operatorname{arc\,tag} t$ desde $t = 0$ a $t = 1$. *Sol.* $\frac{1}{4}\pi$ unidades.

20. $x = 2 \cos \theta + \cos 2\theta + 1$, $y = 2 \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 2\theta$. *Sol.* 16 unidades.

21. La posición de un punto en el instante t viene dada por $x = \frac{1}{2}t^2$, $y = \frac{1}{9}(6t + 9)^{3/2}$. Hallar el espacio recorrido por el punto desde $t = 0$ hasta $t = 4$. *Sol.* 20 unidades.

22. Sea $P(x, y)$ un punto fijo y $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ un punto variable de la curva $y = f(x)$ (ver Fig. 17-1, Capítulo 17). Demostrar que

$$\lim_{Q \to P} \frac{\text{arco } PQ}{\text{cuerda } PQ} = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta s}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{ds/dx}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}} = 1$$

23. (*a*) Demostrar que la longitud del arco en el primer cuadrante de $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \operatorname{sen}^3 \theta$ es $3a/2$.

(*b*) Demostrar que la longitud del arco en el primer cuadrante de $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ es igual a $a^{1/3} \int_0^a \frac{dx}{x^{1/3}}$ en la que el integrando se hace infinito para el límite inferior de integración. En el Capítulo 46 se estudian las integrales definidas de este tipo.

24. Un perro situado en el punto $A(1, 0)$, ve a su dueño en el origen $O(0, 0)$ que pasea a lo largo del eje y y echa a correr hacia él. Hallar la trayectoria que recorre el perro suponiendo que se dirige constantemente hacia su dueño y que, ambos, se mueven a una velocidad constante, siendo p la del dueño y $q > p$ la del perro. El problema se resuelve, por ejemplo, aplicando la teoría expuesta en el Capítulo 70. Sin embargo, aquí se trata de demostrar que la ecuación $y = f(x)$ de la trayectoria se puede hallar integrando

$$y' = \tfrac{1}{2}(x^{p/q} - x^{-p/q})$$

Ind. Sea $P(a, b)$, $0 < a < 1$, la posición del perro y sea Q la intersección del eje y con la tangente a $y = f(x)$ en P. Hay que hallar el tiempo que tarda el perro en alcanzar el punto P y demostrar que, en ese momento, el dueño está en Q.

Capítulo 42

Area de la superficie de revolución

EL AREA DE LA SUPERFICIE generada en la rotación del arco AB de una curva continua alrededor de una recta situada en su plano es, por definición, el límite de la suma de las áreas generadas por las n cuerdas, $AP_1, P_1P_2, \ldots, P_{n-1}B$, en la rotación en torno a dicha recta, cuando el número de cuerdas crece indefinidamente de manera que la longitud de cada una de las cuerdas tiende a cero.

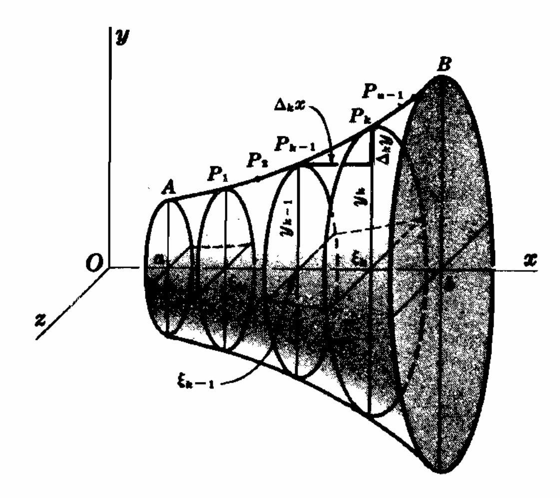


Fig. 42-1

Si $A(a, c)$ y $B(b, d)$ son dos puntos de la curva $y = f(x)$, siendo $f(x)$ y $f'(x)$ continuas y, además, $f(x)$ no cambia de signo en el intervalo $a \leq x \leq b$, el área de la superficie generada en la rotación del arco AB alrededor del eje x viene dada por

$$S_x = 2\pi \int_{AB} y\,ds = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Cuando, además, $f'(x) \neq 0$ en el citado intervalo, se tiene

$$S_x = 2\pi \int_{AB} y\,ds = 2\pi \int_c^d y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

Si $A(a, c)$ y $B(b, d)$ son dos puntos de la curva $x = g(y)$, siendo $g(y)$ y su derivada con respecto a y dos funciones que satisfacen las condiciones de continuidad, el área de la superficie generada en la rotación del arco AB con respecto al eje x viene dada por

$$S_y = 2\pi \int_{AB} x\,ds = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi \int_c^d x\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

Si $A(u = u_1)$ y $B(u = u_2)$ son dos puntos de la curva definida por las ecuaciones paramétricas $x = f(u)$, $y = g(u)$, funciones que satisfacen las ecuaciones de continuidad, el área de la superficie generada en la rotación del arco AB alrededor del eje x, viene dada por

$$S_x = 2\pi \int_{AB} y\,ds = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\,du$$

y el área generada en la rotación del arco AB alrededor del eje y viene dada por

$$S_y = 2\pi \int_{AB} x\,ds = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} x\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\,du$$

Problemas resueltos

1. Hallar el área de la superficie de revolución generada en la rotación alrededor del eje x, del arco de parábola $y^2 = 12x$ desde $x = 0$ hasta $x = 3$.

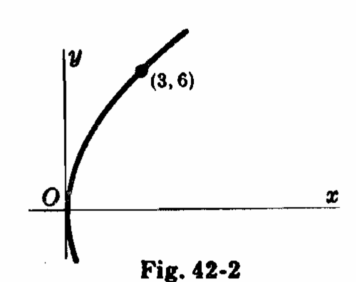


Fig. 42-2

(a) Aplicando la fórmula $S_x = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$.

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y^2 + 36}{y^2}$$

y $\quad S_x = 2\pi\int_0^3 y\frac{\sqrt{y^2+36}}{y}\,dx = 2\pi\int_0^3 \sqrt{12x+36}\,dx = 24(2\sqrt{2}-1)\pi$ unidades de superficie

(*b*) Aplicando la fórmula $S_x = 2\pi\int_c^d y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$. $\frac{dx}{dy}=\frac{y}{6}$, $1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{36+y^2}{36}$, y

$$S_x = 2\pi\int_0^6 y\frac{\sqrt{36+y^2}}{6}\,dy = \frac{\pi}{9}(36+y^2)^{3/2}\Big]_0^6 = 24(2\sqrt{2}-1)\pi \text{ unidades de superficie}$$

2. Hallar el área de la superficie de revolución generada en la rotación alrededor del eje *y*, del arco de la curva $x = y^3$ desde $y = 0$ hasta $y = 1$.

$$S_y = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = 2\pi\int_0^1 y^3\sqrt{1+9y^4}\,dy$$

$$= \frac{\pi}{27}(1+9y^4)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1) \text{ unidades de superficie}$$

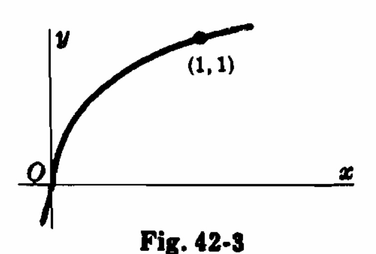


Fig. 42-3

3. Hallar el área de la superficie de revolución generada en la rotación, alrededor del eje *x*, del arco de curva $y^2 + 4x = 2\ln y$ desde $y = 1$ hasta $y = 3$.

$$S_x = 2\pi\int_c^d y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = 2\pi\int_1^3 y\frac{1+y^2}{2y}\,dy = \pi\int_1^3 (1+y^2)\,dy = \frac{32}{3}\pi \text{ unidades de superficie}$$

4. Hallar el área de la superficie de revolución generada en la rotación alrededor del eje *x* de un lazo de la curva $8a^2y^2 = a^2x^2 - x^4$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2x-2x^3}{8a^2y} \quad \text{y} \quad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\frac{(a^2-2x^2)^2}{8a^2(a^2-x^2)} = \frac{(3a^2-2x^2)^2}{8a^2(a^2-x^2)}$$

$$S_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_0^a \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2a\sqrt{2}}\cdot\frac{3a^2-2x^2}{2a\sqrt{2}\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4a^2}\int_0^a (3a^2-2x^2)x\,dx = \tfrac{1}{4}\pi a^2 \text{ unidades de superficie.}$$

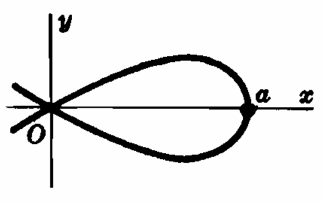


Fig. 42-4

5. Hallar el área de la superficie de revolución generada en la rotación alrededor del eje *x* de la elipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

$$S_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_{-4}^4 y\frac{\sqrt{16y^2+x^2}}{4y}\,dx = \frac{1}{2}\pi\int_{-4}^4\sqrt{64-3x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left[\frac{x\sqrt{3}}{2}\sqrt{64-3x^2} + 32\,\text{arc sen}\,\frac{x\sqrt{3}}{8}\right]_{-4}^4 = 8\pi\left(1+\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi\right) \text{unidades de superficie.}$$

6. Hallar el área de la superficie de revolución generada en la rotación, alrededor del eje *x* de la hipocicloide $x = a\cos^3\theta$, $y = a\,\text{sen}^3\,\theta$.

La superficie pedida se genera en la rotación del arco desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$.

$$\frac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 3a\,\text{sen}^2\theta\cos\theta, \quad \text{y} \quad \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 9a^2\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta.$$

$$S_x = 2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = 2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/2}(a\,\text{sen}^3\theta)3a\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta = \frac{12a^2\pi}{5} \text{ un. sup.}$$

Nota. Sería lógico escribir $2\pi\int_0^\pi (a\,\text{sen}^3\,\theta)3a\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta$, pero este valor es igual a cero. Debe recordarse que si bien un área, un volumen, etc., se pueden expresar por medio de una integral definida, no toda integral definida representa siempre un área, etc.

7. Hallar el área de la superficie de revolución generada en la rotación, alrededor del eje x, de la cardioide $x = 2\cos\theta - \cos 2\theta$, $y = 2\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,2\theta$.

La superficie pedida se genera en la rotación del arco desde $\theta = 0$ a $\theta = \pi$.

$$dx/d\theta = -2\,\text{sen}\,\theta + 2\,\text{sen}\,2\theta, \quad dy/d\theta = 2\cos\theta - 2\cos 2\theta, \quad \text{y}$$
$$(dx/d\theta)^2 + (dy/d\theta)^2 = 8(1 - \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,2\theta - \cos\theta\cos 2\theta) = 8(1-\cos\theta).$$

$$S_x = 2\pi\int_0^{\pi}(2\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,2\theta)\cdot 2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$$

$$= 8\sqrt{2}\,\pi\int_0^{\pi}\text{sen}\,\theta(1-\cos\theta)^{3/2}\,d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{5}\pi\,(1-\cos\theta)^{5/2}\Big]_0^{\pi} = \frac{128\pi}{5}\text{ unidades de superficie.}$$

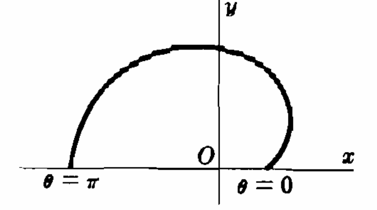


Fig. 42-5

8. Demostrar: $S_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$

Supongamos dividido el arco en n cuerdas, como se observa en la Fig. 42-1. En la rotación de la cuerda $P_{k-1}P_k$ alrededor del eje x se genera un tronco de cono cuyos radios de las bases son y_{k-1} e y_k, respectivamente, de altura

$$P_{k-1}P_k = \sqrt{(\Delta_k x)^2 + (\Delta_k y)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta_k y}{\Delta_k x}\right)^2}\,\Delta_k x = \sqrt{1+\{f'(x_k)\}^2}\,\Delta_k x$$

(ver Problema 1, Capítulo 41) y cuya área lateral (circunferencia de la sección media x altura) es

$$S_k = 2\pi\left(\frac{y_{k-1}+y_k}{2}\right)\sqrt{1+\{f'(x_k)\}^2}\,\Delta_k x$$

Como $f(x)$ es continua, existirá al menos un punto, x'_k, del arco $P_{k-1}P_k$ tal que

$$f(x'_k) = \tfrac{1}{2}(y_{k-1}+y_k) = \tfrac{1}{2}\{f(\xi_{k-1}) + f(\xi_k)\}$$

Luego $$S_k = 2\pi\,f(x'_k)\sqrt{1+\{f'(x_k)\}^2}\,\Delta_k x$$

y, por el teorema de Bliss,

$$S_x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} 2\pi\,f(x'_k)\sqrt{1+\{f'(x_k)\}^2}\,\Delta_k x$$

$$= 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Problemas propuestos

Hallar en los problemas 9-18, el área de la superficie generada en la rotación del arco dado alrededor del eje que se indica.

9. $y = mx$ desde $x = 0$ a $x = 2$; eje x. *Sol.* $4m\pi\sqrt{1+m^2}$ unidades de superficie

10. $y = \frac{1}{3}x^3$ desde $x = 0$ a $x = 3$; eje x. *Sol.* $\pi(82\sqrt{82} - 1)/9$ unidades de superficie.

11. $y = \frac{1}{3}x^3$ desde $x = 0$ a $x = 3$; eje y. *Sol.* $\frac{1}{2}\pi[9\sqrt{82} + \ln(9+\sqrt{82})]$ unidades de superficie.

12. $8y^2 = x^2(1 - x^2)$, un lazo; eje x. *Sol.* $\frac{1}{4}\pi$ unidades de superficie.

13. $y = x^3/6 + 1/2x$ desde $x = 1$ a $x = 2$; eje y. *Sol.* $(15/4 + \ln 2)\pi$ unidades de superficie.

14. $y = \ln x$ desde $x = 1$ a $x = 7$; eje y *Sol.* $[34\sqrt{2} + \ln(3 + 2\sqrt{2})]\pi$ unidades de superficie.

15. $9y^2 = x(3 - x)^2$ un lazo; eje y. *Sol.* $28\pi\sqrt{3}/5$ unidades de superficie.

16. $y = a\cosh x/a$ desde $x = -a$ a $x = a$; eje x. *Sol.* $\frac{1}{2}\pi a^2(e^2 - e^{-2} + 4)$ unidades de superficie.

17. Un arco de $x = a(\theta - \text{sen}\,\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$; eje x. *Sol.* $64\pi a^2/3$ unidades de superficie.

18. $x = e^t\cos t$, $y = e^t\,\text{sen}\,t$ desde $t = 0$ a $t = \frac{1}{2}\pi$; eje x. *Sol.* $2\pi\sqrt{2}(2e^{\pi} + 1)/5$ unidades de superficie.

19. Hallar la superficie de la zona determinada en una esfera de radio r por dos planos paralelos cada uno de ellos distante del centro $\frac{1}{2}a$. *Sol.* $2\pi ar$.

20. Hallar la superficie de esfera de radio r cortada por un cono circular de ángulo 2α con el vértice en el centro de la esfera. *Sol.* $2\pi r^2(1 - \cos\alpha)$ unidades de superficie.

Capítulo 43

Centro geométrico y momento de inercia

Arcos y superficies de revolución

CENTRO GEOMETRICO DE UN ARCO. Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro geométrico de un arco AB de una curva plana, de ecuación $F(x, y) = 0$ o $x = f(u)$, $y = g(u)$, satisface las relaciones

$$\bar{x}\cdot s \;=\; \bar{x}\int_{AB} ds \;=\; \int_{AB} x\,ds \qquad \text{y} \qquad \bar{y}\cdot s \;=\; \bar{y}\int_{AB} ds \;=\; \int_{AB} y\,ds$$

(Ver Problemas 1-2)

SEGUNDO TEOREMA DE PAPPUS. El área de una superficie generada en la rotación de un arco de curva alrededor de un eje situado en su mismo plano y que no corta el arco es igual al producto de la longitud de dicho arco por la longitud de la trayectoria descrita por el centro geométrico del mismo. (Ver Problemas 3)

MOMENTOS DE INERCIA DE UN ARCO. Los momentos de inercia de un arco AB correspondiente a una curva dada con respecto a los ejes coordenados vienen dados por

$$I_x \;=\; \int_{AB} y^2\,ds \qquad \text{e} \qquad I_y \;=\; \int_{AB} x^2\,ds$$

(Ver Problemas 4-5)

CENTRO GEOMETRICO DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCION. La coordenada $\bar{x}$ del centro geométrico de una superficie generada en la rotación de un arco AB de una curva alrededor del eje x satisface la relación

$$\bar{x}\cdot S_x \;=\; 2\pi\int_{AB} x\cdot y\,ds$$

MOMENTO DE INERCIA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCION. El momento de inercia, con respecto al eje de giro de la superficie generada en la rotación de un arco AB de una curva alrededor del eje x viene dado por

$$I_x \;=\; 2\pi\int_{AB} y^2\cdot y\,ds$$

Problemas resueltos

1. Hallar el centro geométrico del arco del primer cuadrante de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \text{y} \quad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\frac{x^2}{y^2} = \frac{25}{y^2}. \quad \text{Como } s = \frac{5}{2}\pi,$$

$$\frac{5}{2}\pi\bar{y} \;=\; \int_0^5 y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \;=\; \int_0^5 5\,dx \;=\; 25 \quad \text{o} \quad \bar{y} = 10/\pi$$

Por simetría, $\bar{x} = \bar{y}$, con lo que las coordenadas del centro geométrico son $(10/\pi, 10/\pi)$.

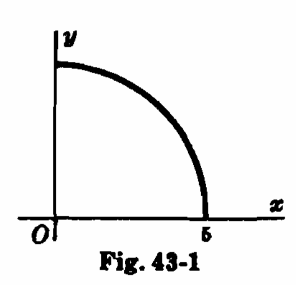


Fig. 43-1

2. Determinar el centro geométrico de un arco circular de radio r y ángulo en el centro 2θ.

Tomando el arco, como se representa en la Fig. 43-2, de forma que $\bar{x}$ coincida con la abscisa del centro geométrico de su mitad superior e $\bar{y} = 0$, tendremos:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x} \quad \text{y} \quad 1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{r^2}{x^2}. \quad \text{Para la mitad superior del arco, } s = r\theta,$$

$$r\theta\cdot\bar{x} \;=\; \int_0^{r\,\text{sen}\,\theta} x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy \;=\; r\int_0^{r\,\text{sen}\,\theta} dy \;=\; r^2\,\text{sen}\,\theta$$

y $\bar{x} = (r\,\text{sen}\,\theta)/\theta$. Por tanto, el centro geométrico está sobre la bisectriz a una distancia $(r\,\text{sen}\,\theta)/\theta$ del centro de la circunferencia.

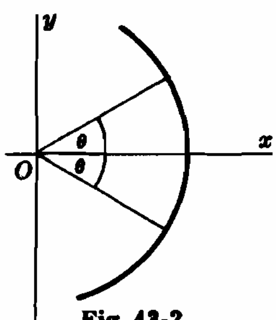


Fig. 43-2

3. Hallar el área de la superficie generada en la rotación del rectángulo de dimensiones a por b alrededor del eje situado a c unidades ($c > a, b$) del centro geométrico.

El perímetro del rectángulo es $2(a + b)$ y su centro geométrico describe una circunferencia de radio c. Por tanto,

$$S = 2(a+b)\cdot 2\pi c = 4\pi(a+b)c \text{ unidades de superficie}$$

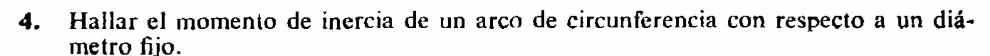


Fig. 43-3

4. Hallar el momento de inercia de un arco de circunferencia con respecto a un diámetro fijo.

Tomando la circunferencia, como se representa en la Fig. 43-4, con el diámetro fijo sobre el eje x, el momento pedido será 4 veces el del arco del primer cuadrante.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \text{y} \quad \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{r}{y}. \quad \text{También, } s = 2\pi r. \quad \text{Luego}$$

$$I_x = 4\int_0^r y^2\,ds = 4\int_0^r y^2\cdot\frac{r}{y}\,dx = 4r\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$$= 4r\left[\frac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2} + \frac{1}{2}r^2 \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{r}\right]_0^r = \pi r^3 = \frac{1}{2}r^2 s$$

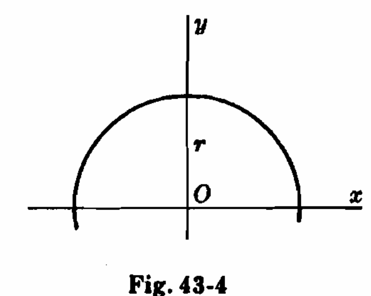


Fig. 43-4

5. Hallar el momento de inercia, con respecto al eje x, del arco de hipocicloide $x = a\,\text{sen}^3\,\theta$, $y = a\cos^3\theta$.

El momento pedido es cuatro veces el del arco del primer cuadrante.

$$\frac{dx}{d\theta} = 3a\,\text{sen}^2\,\theta\cos\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta, \quad y$$

$$s = 4\int ds = 4\int_0^{\pi/2} 3a\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,d\theta = 6a$$

$$I_x = 4\int y^2\,ds = 12a^3\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,d\theta = \tfrac{3}{2}a^3 = \tfrac{1}{4}a^2 s$$

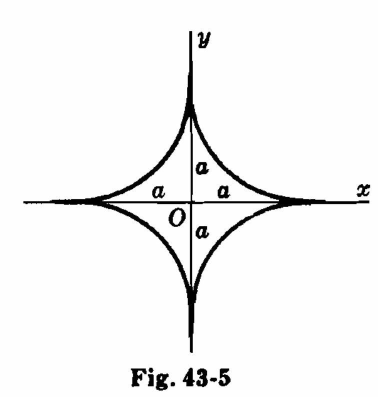


Fig. 43-5

Problemas propuestos

6. Determinar el centro geométrico de

(a) el arco del primer cuadrante de $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, Aplicar $s = 3a/2$. *Sol.* $(2a/5, 2a/5)$

(b) el arco del primer cuadrante del lazo de $9y^2 = x(3-x)^2$. Aplicar $s = 2\sqrt{3}$. *Sol.* $(7/5, \sqrt{3}/4)$

(c) el primer arco de $x = a(\theta - \text{sen}\,\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$. *Sol.* $(\pi a, 4a/3)$

(d) el arco del primer cuadrante de $x = a\cos^3\theta$, $y = a\,\text{sen}^3\,\theta$. *Sol.* Ver ($a$).

7. Hallar el momento de inercia del arco dado con respecto al eje indicado:

(a) un lazo $9y^2 = x(3-x)^2$; eje x, eje y. Aplicar $s = 4\sqrt{3}$. *Sol.* $I_x = 8s/35$, $I_y = 99s/95$

(b) $y = a\cosh x/a$ desde $x = 0$ a $x = a$; eje x. *Sol.* $(a^2 + \frac{1}{3}s^2)s$

8. Determinar el centro geométrico de la superficie de una semiesfera. *Sol.* $\bar{y} = \frac{1}{2}r$

9. Determinar el centro geométrico de la superficie generada al girar:

(a) $4y + 3x = 8$ desde $x = 0$ a $x = 2$ alrededor del eje x. *Sol.* $\bar{x} = 4/5$

(b) un arco de $x = a(\theta - \text{sen}\,\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$ alrededor del eje y. *Sol.* $\bar{y} = 4a/3$

10. Aplicar el segundo teorema del Pappus para determinar:

(a) el centro geométrico del arco del primer cuadrante de una circunferencia de radio r. *Sol.* $(2r/\pi, 2r/\pi)$

(b) el área de la superficie generada en la rotación de un triángulo equilátero de lado a alrededor de un eje situado a c unidades de su centro geométrico. *Sol.* $6\pi ac$ unidades de superficie.

11. Hallar el momento de inercia con respecto al eje de rotación de:

(a) la superficie esférica de radio r. *Sol.* $\frac{2}{3}Sr^2$

(b) la superficie lateral de un cono generado al girar la recta $y = 2x$ desde $x = 0$ a $x = 2$ alrededor del eje x. *Sol.* $8S$.

12. Deducir las fórmulas de este capítulo.

Capítulo 44

Area plana y centro geométrico de un área

Coordenadas polares

EL AREA PLANA limitada por la curva $\varrho = f(\theta)$ y los radios vectores $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$ viene dada por

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2\, d\theta$$

Al manejar las coordenadas polares se debe tener sumo cuidado en la determinación correcta de los límites de integración. Conviene aprovechar todo tipo de simetría para tomar estos límites tan próximos como sea posible.

(Ver Problemas 1-7.)

CENTRO GEOMETRICO DE UN AREA PLANA. Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro geométrico de un área plana limitada por la curva $\varrho = f(\theta)$ y los radios vectores $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$ vienen dadas por

$$A\bar{x} = \bar{x}\cdot\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2\, d\theta = \frac{1}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3 \cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{2}{3}x\cdot\rho^2\, d\theta$$

y

$$A\bar{y} = \bar{y}\cdot\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2\, d\theta = \frac{1}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3 \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{2}{3}y\cdot\rho^2\, d\theta$$

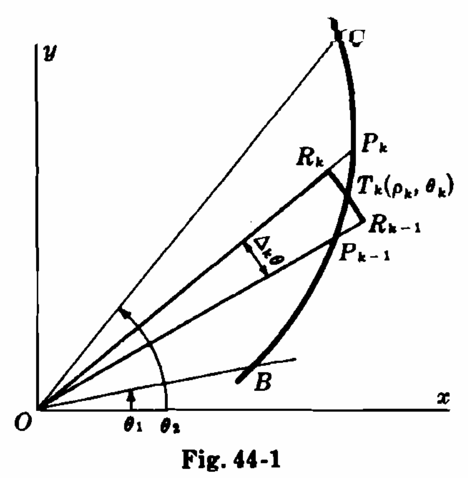


Fig. 44-1

(Ver Problemas 8-10)

Problemas resueltos

1. Demostrar que $A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \varrho^2\, d\theta$.

Dividamos el ángulo BOC de la figura superior en n partes mediante los radios $OP_0 = OB$, OP_1, $OP_2, \ldots, OP_{n-1}$, $OP_n = OC$. La figura muestra una franja representativa, $P_{k-1}OP_k$, de ángulo en el centro $\Delta_k\theta$, así como su sector genérico, $R_{k-1}OR_k$, de radio ϱ_k, ángulo en el centro $\Delta_k\theta$ y (ver Problema 15(r), Capítulo 34) área $\frac{1}{2}\varrho^2_k\Delta_k\theta = \frac{1}{2}\{f(\theta_k)\}^2\Delta_k\theta$. En estas condiciones, teniendo en cuenta el teorema fundamental,

$$A = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\{f(\theta_k)\}^2\Delta_k\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\{f(\theta)\}^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^2\, d\theta$$

2. Hallar el área limitada por la curva $\varrho^2 = a^2\cos 2\theta$.

En la Fig. 44-2 se puede observar que el área pedida consta de cuatro partes iguales, cada una de las cuales es barrida por el radio vector al variar el ángulo θ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{1}{4}\pi$. Por tanto,

$$A = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\rho^2\, d\theta = 2a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\, d\theta = a^2\operatorname{sen} 2\theta\Big]_0^{\pi/4} = a^2 \text{ unidades de superficie}$$

Como cada una de las partes está situada en un cuadrante, parecería lógico escribir:

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2\, d\theta \;=\; \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi} \cos 2\theta\, d\theta \;=\; \frac{1}{4}a^2 \operatorname{sen} 2\theta\Big]_0^{2\pi} \;=\; 0$$

es decir, $\quad 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \rho^2\, d\theta \;=\; a^2\int_0^{\pi} \cos 2\theta\, d\theta \;=\; 0$

Fig. 44-2

La razón de este resultado incorrecto estriba en lo siguiente:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \rho^2\, d\theta \;=\; \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \rho^2\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \rho^2\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{3\pi/4}^{\pi} \rho^2\, d\theta \;=\; \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{4}a^2$$

En los intervalos $[0, \pi/4]$ y $[3\pi/4, \pi]$, ϱ es real; así pues, la primera y tercera de las integrales proporcionan las áreas barridas al variar θ entre dichos intervalos. En el intervalo $[\pi/4, 3\pi/4]$, $\varrho^2 < 0$ y ϱ es imaginario. Por tanto, aunque $\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} a^2 \cos 2\theta\, d\theta$ es una integral perfectamente válida, aquí no se puede interpretar como un área.

3. Hallar el área limitada por los tres lazos de la curva $\varrho = a \cos 3\theta$.

El área pedida es igual a 6 veces el área rayada en la Fig. 44-3, es decir, el área barrida al variar el ángulo θ desde 0 hasta $\pi/6$. Por tanto,

$$A \;=\; 6\cdot\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \varrho^2\, d\theta \;=\; 6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} a^2 \cos^2 3\theta\, d\theta \;=\; 3a^2\int_0^{\pi/6} (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 6\theta)\, d\theta \;=\; \tfrac{1}{4}\pi a^2 \text{ unidades de superficie.}$$

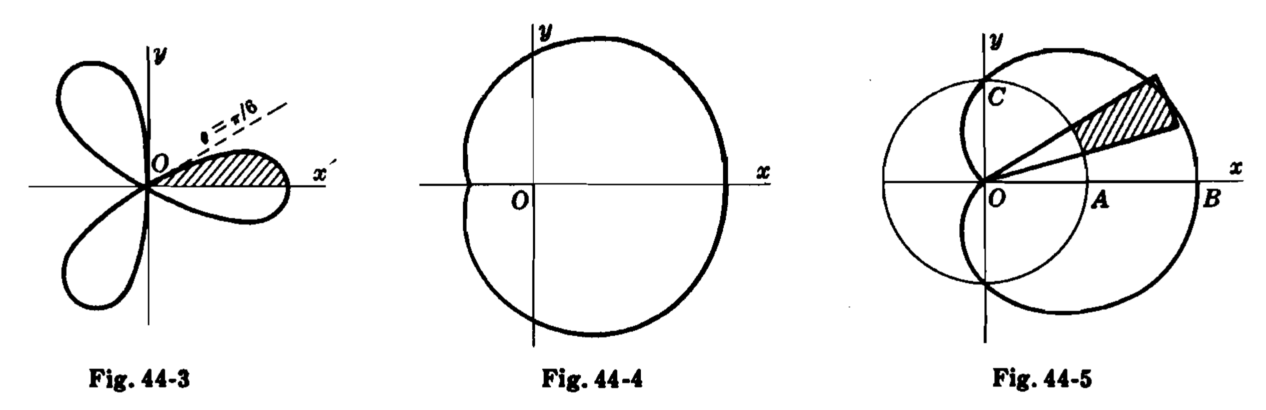


Fig. 44-3 Fig. 44-4 Fig. 44-5

4. Hallar el área limitada por la curva $\varrho = 2 + \cos\theta$ (Fig. 44-4).

El área buscada es el doble del área barrida al variar θ desde 0 hasta π.

$$A \;=\; 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} (2+\cos\theta)^2\, d\theta \;=\; \int_0^{\pi} (4 + 4\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= \Big[4\theta + 4\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\Big]_0^{\pi} \;=\; 9\pi/2 \text{ unidades de superficie}$$

5. Hallar el área interior a la cardioide $\varrho = 1 + \cos\theta$ y exterior al círculo $\varrho = 1$.

En la Fig. 44,5, área ABC = área OBC — área OAC es igual a la mitad del área que se pide. Por tanto,

$$A \;=\; 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos\theta)^2\, d\theta \;-\; 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1)^2\, d\theta \;=\; \int_0^{\pi/2} (2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta \;=\; 2 + \tfrac{1}{4}\pi \text{ un. sup.}$$

6. Hallar el área de cada uno de los lazos de $\varrho = \frac{1}{2} + \cos\theta$.

Lazo mayor. El área pedida es igual al doble de la barrida al variar el ángulo θ desde 0 hasta $2\pi/3$. Por consiguiente,

$$A \;=\; 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi/3} (\tfrac{1}{2} + \cos\theta)^2\, d\theta \;=\; \int_0^{2\pi/3} (\tfrac{1}{4} + \cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \text{ unidades de superficie}$$

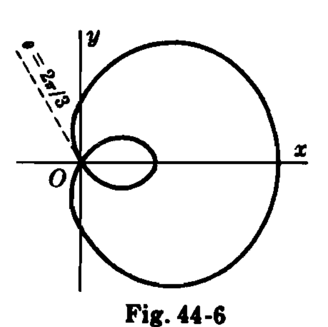


Fig. 44-6

Lazo menor. El área pedida es igual al doble de la barrida al variar θ desde $2\pi/3$ hasta π. Por tanto,

$$A = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{\pi}(\tfrac{1}{2}+\cos\theta)^2\,d\theta = \frac{\pi}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{8} \text{ unidades de superficie.}$$

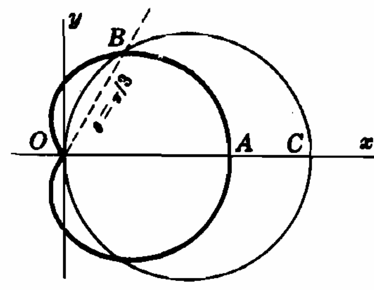


Fig. 44-7

7. Hallar el área común del círculo $\varrho = 3\cos\theta$ y la cardioide $\varrho = 1+\cos\theta$.

El área OAB consta de dos partes: una barrida por el radio vector $\varrho = 1+\cos\theta$ al variar θ desde 0 hasta $\pi/3$, y la otra barrida por $\varrho = 3\cos\theta$ al variar θ desde $\pi/3$ hasta $\pi/2$.

$$\begin{aligned} A &= 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}(1+\cos\theta)^2\,d\theta + 2\cdot\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2}9\cos^2\theta\,d\theta \\ &= 5\pi/4 \text{ unidades de superficie}\end{aligned}$$

8. Deducir las fórmulas $A\bar{x} = \frac{1}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\varrho^3\cos\theta\,d\theta$, $A\bar{y} = \frac{1}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\varrho^3\operatorname{sen}\theta\,d\theta$, siendo $(\bar{x}, \bar{y})$ las coordenadas del centro geométrico del área plana BOC de la Fig. 44-1.

Consideremos el sector genérico $R_{k-1}OR_k$ y supongamos, para mayor sencillez, que OT_k es la bisectriz del ángulo $P_{k-1}OP_k$. Para hallar el centro geométrico de este sector, supongamos se trata de un triángulo, con lo cual, dicho centro geométrico estará situado sobre OT_k a una distancia $\frac{2}{3}\varrho_k$ desde 0. Por tanto, aproximadamente, podremos escribir,

$$\bar{x}_k = \tfrac{2}{3}\varrho_k\cos\theta_k = \tfrac{2}{3}f(\theta_k)\cos\theta_k \quad \text{y} \quad \bar{y}_k = \tfrac{2}{3}f(\theta_k)\operatorname{sen}\theta_k$$

Ahora bien, el momento del sector con respecto al eje es

$$\bar{x}_k\cdot\tfrac{1}{2}\varrho_k^2\Delta_k\theta = \tfrac{2}{3}\varrho_k\cos\theta_k\cdot\tfrac{1}{2}\varrho_k^2\,\Delta_k\theta = \tfrac{1}{3}\{f(\theta_k)\}^3\cos\theta_k\,\Delta_k\theta$$

y, por el teorema fundamental,

$$A\bar{x} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\{f(\theta_k)\}^3\cos\theta_k\,\Delta_k\theta = \frac{1}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\varrho^3\cos\theta\,d\theta$$

Se deja como ejercicio para el alumno el cálculo de $A\bar{y}$.

Nota. En el Problema 8, Capítulo 37, vimos que el centro geométrico del sector $R_{k-1}OR_k$ está situado sobre OT_k a una distancia $\dfrac{2\varrho_k\operatorname{sen}\frac{1}{2}\Delta_k\theta}{3\cdot\frac{1}{2}\Delta_k\theta}$ desde O. El alumno puede deducir las fórmulas a partir de esta relación.

9. Determinar el centro geométrico del área del lazo del primer cuadrante de la curva $\varrho = \operatorname{sen} 2\theta$.

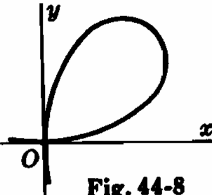


Fig. 44-8

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2 2\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\left[\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen}4\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{\pi}{8}\,\bar{x} = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\varrho^3\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^3 2\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^3\theta\cos^4\theta\,d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\theta)\cos^4\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta = \frac{16}{105}, \text{ y } \bar{x} = \frac{128}{105\pi}$$

Por simetría, $\bar{y} = 128/105\pi$. Las coordenadas del centroide son $(128/105\pi, 128/105\pi)$.

10. Determinar el centro geométrico del área del primer cuadrante limitada por la parábola $\varrho = \dfrac{6}{1+\cos\theta}$ de la Fig. 44-9.

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{36}{(1+\cos\theta)^2}\,d\theta = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2}\sec^4\tfrac{1}{2}\theta\,d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\operatorname{tag}^2\tfrac{1}{2}\theta)\sec^2\tfrac{1}{2}\theta\,d\theta = 9\left[\operatorname{tag}\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{3}\operatorname{tag}^3\tfrac{1}{2}\theta\right]_0^{\pi/2} = 12$$

$$12\bar{x} = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{216\cos\theta}{(1+\cos\theta)^3}\,d\theta = 9\int_0^{\pi/2} \frac{2\cos^2\frac{1}{2}\theta - 1}{\cos^6\frac{1}{2}\theta}\,d\theta$$

$$= 9\int_0^{\pi/2} (2\sec^4\tfrac{1}{2}\theta - \sec^6\tfrac{1}{2}\theta)\,d\theta = 18\Big[\operatorname{tag}\tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{5}\operatorname{tag}^5\tfrac{1}{2}\theta\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= 72/5, \quad \text{y} \quad \bar{x} = 6/5.$$

$$12\bar{y} = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{216\,\text{sen}\,\theta}{(1+\cos\theta)^3}\,d\theta = 27, \quad \text{e} \quad \bar{y} = 9/4.$$

El centro geométrico es (6/5, 9/4).

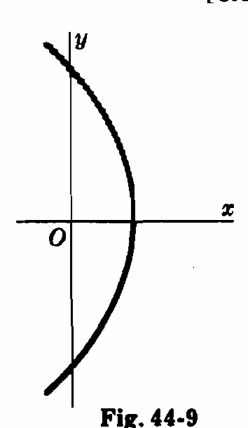


Fig. 44-9

Problemas propuestos

11. Hallar el área limitada por cada una de las curvas siguientes:

(*a*) $\varrho^2 = 1 + \cos 2\theta$ *Sol.* π un. sup.
(*b*) $\varrho^2 = a^2\,\text{sen}\,\theta\,(1 - \cos\theta)$ *Sol.* a^2 un. sup.
(*c*) $\varrho = 4\cos\theta$ *Sol.* 4π un. sup.
(*d*) $\varrho = a\cos 2\theta$ *Sol.* $\frac{1}{2}\pi a^2$ un. sup.
(*e*) $\varrho = 4\,\text{sen}^2\,\theta$ *Sol.* 6π un. sup.
(*f*) $\varrho = 4(1 - \text{sen}\,\theta)$ *Sol.* 24π un. sup.

12. Hallar el área

(*a*) interior a $\varrho = \cos\theta$ y exterior a $\varrho = 1 - \cos\theta$ *Sol.* $(\sqrt{3} - \pi/3)$ un. sup.
(*b*) interior $\varrho = \text{sen}\,\theta$ y exterior a $\varrho = 1 - \cos\theta$. *Sol.* $(1 - \pi/4)$ un. sup.
(*c*) entre óvalos interno y externo de $\varrho^2 = a^2(1 + \text{sen}\,\theta)$. *Sol.* $4a^2$ un. sup.
(*d*) entre los lazos de $\varrho = 2 - 4\,\text{sen}\,\theta$. *Sol.* $4(\pi + 3\sqrt{3})$ un. sup.

13. (*a*) Dada la espiral de Arquímedes, $\varrho = a\theta$, demostrar que el área adicional barrida en la enésima revolución, $n > 2$, es $(n - 1)$ veces la añadida en la segunda revolución.

(*b*) Dada la espiral equiangular $\varrho = ae^{\theta}$, demostrar que el área adicional barrida en la enésima revolución, $n > 2$, es $e^{4\pi}$ veces la añadida en el barrido anterior.

14. determinar el centro geométrico de las siguientes áreas:

(*a*) Mitad derecha de $\varrho = a(1 - \text{sen}\,\theta)$. *Sol.* $(16a/9\pi, -5a/6)$
(*b*) Area del primer cuadrante de $\varrho = 4\,\text{sen}^2\,\theta$. *Sol.* $(128/63\pi, 2048/315\pi)$
(*c*) Mitad superior de $\varrho = 2 + \cos\theta$. *Sol.* $(17/18, 80/27\pi)$
(*d*) Area del primer cuadrante de $\varrho = 1 + \cos\theta$. *Sol.* $\left(\frac{16 + 5\pi}{16 + 6\pi}, \frac{10}{8 + 3\pi}\right)$
(*e*) Area del primer cuadrante del Problema 5. *Sol.* $\left(\frac{32 + 15\pi}{48 + 6\pi}, \frac{22}{24 + 3\pi}\right)$

15. Aplicar el primer teorema de Pappus para obtener el volumen generado en la rotación de

(*a*) $\varrho = a(1 - \text{sen}\,\theta)$ alrededor del eje y. *Sol.* $8\pi a^3/3$ un, vol.
(*b*) $\varrho = 2 + \cos\theta$ alrededor del eje polar. *Sol.* $40\pi/3$ un. vol.

Capítulo 45

Longitud y centro geométrico de un arco. Area de una superficie de revolución

Coordenadas polares

LA LONGITUD DE UN ARCO de la curva $\varrho = f(\theta)$ desde $\theta = \theta_1$ a $\theta = \theta_2$ viene dada por

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

(Ver Problemas 1-4.)

CENTRO GEOMETRICO DE UN ARCO. Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro geométrico de un arco de la curva $\varrho = f(\theta)$ desde $\theta = \theta_1$ a $\theta = \theta_2$ satisface las relaciones

$$\bar{x} \cdot s = \bar{x} \int_{\theta_1}^{\theta_2} ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \varrho \cos\theta\, ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} x\, ds$$

$$\bar{y} \cdot s = \bar{y} \int_{\theta_1}^{\theta_2} ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \varrho \operatorname{sen}\theta\, ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} y\, ds$$

(Ver Problemas 5-6.)

EL AREA DE LA SUPERFICIE generada en la rotación del arco de la curva $\varrho = f(\theta)$ desde $\theta = \theta_1$ a $\theta = \theta_2$ alrededor de

el eje polar es $\quad S_x = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} y\, ds = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \varrho \operatorname{sen}\theta\, ds$

el eje transverso es $\quad S_y = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} x\, ds = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \varrho \cos\theta\, ds$

Los límites de integración se tomarán tan próximos como sea posible.

(Ver Problemas 7-10.)

Problemas resueltos

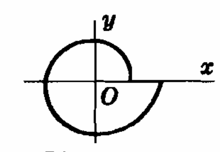


Fig. 45-1

1. Hallar la longitud de la espiral $\varrho = e^{2\theta}$ desde $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$.

$d\varrho/d\theta = 2e^{2\theta}$ y $\varrho^2 + (d\varrho/d\theta)^2 = 5e^{4\theta}$.

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\varrho^2 + (d\varrho/d\theta)^2}\, d\theta = \sqrt{5}\int_0^{2\pi} e^{2\theta}\, d\theta = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\,(e^{4\pi} - 1) \text{ unidades}$$

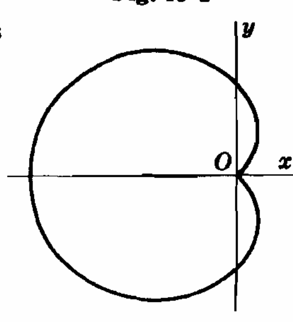


Fig. 45-2

2. Hallar la longitud de la cardioide $\varrho = a(1 - \cos\theta)$.

La cardioide se describe cuando θ varía desde 0 a 2π.

$\varrho^2 + (d\varrho/d\theta)^2 = a^2(1 - \cos\theta)^2 + (a \operatorname{sen}\theta)^2 = 4a^2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\theta$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\varrho^2 + (d\varrho/d\theta)^2}\, d\theta = 2a \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\theta\, d\theta = 8a \text{ unidades}$$

En esta solución no se ha podido aplicar el criterio de tomar los límites de integración suficientemente próximos, porque la longitud a calcular es el doble de la descrita al variar el ángulo θ desde 0 hasta π. Sin embargo, el Problema 3 es un ejemplo de cómo se aplica dicho criterio.

3. Hallar la longitud de la cardioide $\varrho = a(1 - \text{sen}\,\theta)$.

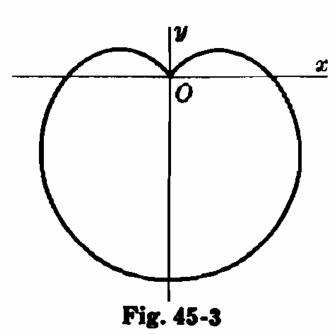


Fig. 45-3

$$\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\theta}\right)^2 = a^2(1 - \text{sen}\,\theta)^2 + (-a\cos\theta)^2 = 2a^2(\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\theta - \cos\tfrac{1}{2}\theta)^2$$

Según el problema 2, tendremos

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\varrho^2 + (d\varrho/d\theta)^2}\, d\theta = \sqrt{2}\, a \int_0^{2\pi} (\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\theta - \cos\tfrac{1}{2}\theta)\, d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\, a(-\cos\tfrac{1}{2}\theta - \text{sen}\,\tfrac{1}{2}\theta)\Big]_0^{2\pi} = 4\sqrt{2}\, a \text{ unidades}$$

Como podemos observar, las cardioides de los dos problemas solo difieren en sus posiciones en el plano; en estas condiciones, sus longitudes deberían coincidir. Para explicar la diferencia de resultados hemos de acudir a los dos integrandos, sen $\tfrac{1}{2}\theta$ y sen $\tfrac{1}{2}\theta - \cos\tfrac{1}{2}\theta$. El primero es siempre positivo, mientras que el segundo es negativo, al variar el ángulo θ desde 0 hasta $\tfrac{1}{2}\pi$, y positivo en los demás casos. Por simetría, la longitud pedida será igual al doble de la descrita al variar θ desde $\pi/2$ hasta $3\pi/2$. Por consiguiente,

$$s = 2\sqrt{2}\, a \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\theta - \cos\tfrac{1}{2}\theta)\, d\theta = 4\sqrt{2}\, a(-\cos\tfrac{1}{2}\theta - \text{sen}\,\tfrac{1}{2}\theta)\Big]_{\pi/2}^{3\pi/2} = 8a \text{ unidades}$$

4. Hallar la longitud de la curva $\varrho = a\cos^4\tfrac{1}{4}\theta$.

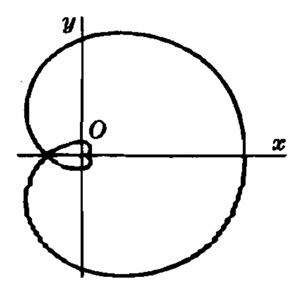


Fig. 45-4

La longitud pedida es el doble de la descrita cuando θ varía desde 0 a 2π.

$d\varrho/d\theta = -a\cos^3\tfrac{1}{4}\theta\,\text{sen}\,\tfrac{1}{4}\theta$ y $\varrho^2 + (d\varrho/d\theta)^2 = a^2\cos^6\tfrac{1}{4}\theta$.

$$s = 2\cdot a\int_0^{2\pi} \cos^3\tfrac{1}{4}\theta\, d\theta = 8a\left[\text{sen}\,\tfrac{1}{4}\theta - \tfrac{1}{3}\text{sen}^3\tfrac{1}{4}\theta\right]_0^{2\pi}$$

$= 16a/3$ unidades.

5. Hallar el centro geométrico del arco de la cardioide $\varrho = a(1 - \cos\theta)$. (Ver Problema 2.)

Por simetría, $\bar{y} = 0$, y la abscisa del centro geométrico de todo el arco será igual a la del centro geométrico de la mitad superior. La mitad de la longitud del cardioide es, según el Problema 2, igual a $4a$. Por tanto,

$$4a\cdot\bar{x} = \int_0^{\pi} \varrho\cos\theta\sqrt{\varrho^2 + (d\varrho/d\theta)^2}\, d\theta = 2a^2\int_0^{\pi} (1 - \cos\theta)\cos\theta\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\theta\, d\theta$$

$$= 4a^2\int_0^{\pi} (-2\cos^4\tfrac{1}{2}\theta + 3\cos^2\tfrac{1}{2}\theta - 1)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\theta\, d\theta = 4a^2\left[\tfrac{4}{5}\cos^5\tfrac{1}{2}\theta - 2\cos^3\tfrac{1}{2}\theta + 2\cos\tfrac{1}{2}\theta\right]_0^{\pi}$$

$= -16a^2/5$, y $\bar{x} = -4a/5$. Las coordenadas del centroide son $(-4a/5, 0)$.

6. Hallar el centro geométrico del arco de circunferencia $\varrho = 2\,\text{sen}\,\theta + 4\cos\theta$ desde $\theta = 0$ a $\theta = \tfrac{1}{2}\pi$.

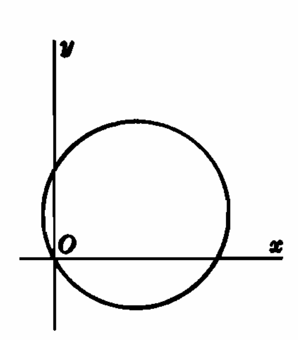


Fig. 45-5

$d\varrho/d\theta = 2\cos\theta - 4\,\text{sen}\,\theta$ y $\varrho^2 + (d\varrho/d\theta)^2 = 20$. Como el radio es $\sqrt{5}$, $s = \sqrt{5}\,\pi$.

$$\sqrt{5}\,\pi\cdot\bar{x} = \int_0^{\pi/2} \varrho\cos\theta\sqrt{\varrho^2 + (d\varrho/d\theta)^2}\, d\theta$$

$$= 4\sqrt{5}\int_0^{\pi/2} (\text{sen}\,\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= 4\sqrt{5}\left[\tfrac{1}{2}\text{sen}^2\theta + \theta + \tfrac{1}{2}\text{sen}\,2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 2\sqrt{5}(\pi + 1), \text{ y } \bar{x} = \frac{2(\pi + 1)}{\pi}.$$

$$\sqrt{5}\,\pi\cdot\bar{y} = \int_0^{\pi/2} \varrho\,\text{sen}\,\theta\sqrt{\varrho^2 + (d\varrho/d\theta)^2}\, d\theta = 4\sqrt{5}\int_0^{\pi/2} (\text{sen}^2\theta + 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta)\, d\theta$$

$$= 4\sqrt{5}\left[\tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{4}\text{sen}\,2\theta + \text{sen}^2\theta\right]_0^{\pi/2} = 4\sqrt{5}\,(\tfrac{1}{4}\pi + 1), \text{ e } \bar{y} = \frac{\pi + 4}{\pi}.$$

7. Hallar el área de la superficie generada en la rotación de la mitad superior de la cardioide $\varrho = a(1 - \cos\theta)$ alrededor del eje polar.

Del Problema 2, $\varrho^2 + (d\varrho/d\theta)^2 = 4a^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta$.

$$S = 2\pi \int_0^\pi \varrho \operatorname{sen}\theta \sqrt{\varrho^2 + (d\varrho/d\theta)^2}\, d\theta = 4a^2\pi \int_0^\pi (1 - \cos\theta) \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\theta\, d\theta$$

$$= 16a^2\pi \int_0^\pi \operatorname{sen}^4 \tfrac{1}{2}\theta \cos\tfrac{1}{2}\theta\, d\theta = {}^{32}/_5 a^2\pi \text{ unidades de superficie.}$$

8. Hallar el área de la superficie generada en la rotación de la lemniscata $\varrho^2 = a^2 \cos 2\theta$ alrededor del eje polar.

El área pedida es igual al doble de la generada en la rotación del arco del primer cuadrante.

$$\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\theta}\right)^2 = a^2 \cos 2\theta + \left(-\frac{a^2 \operatorname{sen} 2\theta}{\varrho}\right)^2 = \frac{a^4}{\varrho^2}$$

$$S = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/4} \varrho \operatorname{sen}\theta \frac{a^2}{\varrho}\, d\theta = 4a^2\pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$= 2a^2\pi(2 - \sqrt{2}) \text{ unidades de superficie}$$

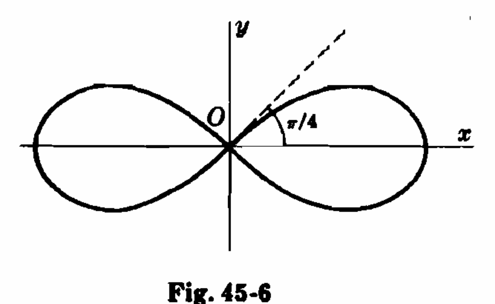


Fig. 45-6

9. Hallar el área de la superficie generada en la rotación, alrededor del eje transverso de un lazo de la lemniscata $\varrho^2 = a^2 \cos 2\theta$.

El área pedida es el doble de la generada en la rotación del arco del primer cuadrante.

$$S = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/4} \varrho \cos\theta \frac{a^2}{\varrho}\, d\theta = 4a^2\pi \int_0^{\pi/4} \cos\theta\, d\theta = 2\sqrt{2}\, a^2\pi \text{ unidades de superficie.}$$

10. Aplicar el teorema de Pappus para determinar el centroide del arco de la cardioide $\varrho = a(1 - \cos\theta)$ desde $\theta = 0$ a $\theta = \pi$.

Si el arco gira alrededor del eje polar, $S = 2\pi\bar{y}s$, o sea, según los Problemas 2 y 7, $32a^2\pi/5 = 2\pi\bar{y} \cdot 4a$ e $\bar{y} = 4a/5$.

Según el Problema 5, las coordenadas del centro geométrico son $(-4a/5, 4a/5)$.

Problemas propuestos

11. Hallar la longitud de

(a) $\varrho = \theta^2$ desde $\theta = 0$ a $\theta = 2\sqrt{3}$ *Sol.* 56/3 unidades

(b) $\varrho = e^{\theta/2}$ desde $\theta = 0$ a $\theta = 8$ *Sol.* $\sqrt{5}(e^4 - 1)$ unidades

(c) $\varrho = \cos^2 \frac{1}{2}\theta$ *Sol.* 4 unidades

(d) $\varrho = \operatorname{sen}^3\theta/3$ *Sol.* $3\pi/2$ unidades

(e) $\varrho = \cos^4\theta/4$ *Sol.* 16/3 unidades

(f) $\varrho = a/\theta$ desde (ϱ_1, θ_1) a (ϱ_2, θ_2) *Sol.* $\sqrt{a^2 + \varrho_1^2} - \sqrt{a^2 + \varrho_2^2} + a \ln \dfrac{\varrho_1(a + \sqrt{a^2 + \varrho_2^2})}{\varrho_2(a + \sqrt{a^2 + \varrho_1^2})}$ unidades

(g) $\varrho = 2a \operatorname{tag}\theta \operatorname{sen}\theta$ desde $\theta = 0$ a $\theta = \pi/3$ *Sol.* $2a\sqrt{3}\left\{\dfrac{\sqrt{7} - 2}{\sqrt{3}} + \ln \dfrac{2(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}\right\}$ unidades.

12. Hallar el centro geométrico de la mitad superior de $\varrho = 8\cos\theta$. *Sol.* $(4, 8/\pi)$.

13. Siendo $\varrho = a \operatorname{sen}\theta + b\cos\theta$, demostrar que $s = \pi\sqrt{a^2 + b^2}$, $S_x = a\pi s$, y $S_y = b\pi s$.

14. Calcular el área de la superficie generada en la rotación de $\varrho = 4\cos\theta$ alrededor del eje polar.
Sol. 16π un. sup.

15. Hallar el área de la superficie generada en la rotación de cada uno de los lazos de $\varrho = \operatorname{sen}^3\theta/3$ alrededor del eje transverso
Sol. $\pi/256$ un. sup.; $513\pi/256$ un. sup.

16. Hallar el área de la superficie generada en la rotación de cada uno de los lazos de $\varrho^2 = \cos 2\theta$ alrededor del eje transverso.
Sol. $2\sqrt{2}\,\pi$ un. sup.

17. Demostrar que cuando los dos lazos de $\varrho = \cos^4\theta/4$ giran alrededor del eje polar, generan superficies de igual área.

18. Determinar el centro geométrico de la superficie generada en la rotación del lazo de la derecha de $\varrho^2 = a^2 \cos 2\theta$ alrededor del eje polar. *Sol.* $\bar{x} = \sqrt{2}a(\sqrt{2} + 1)/6$.

19. Hallar el área de la superficie generada en la rotación de $\varrho = \operatorname{sen}^2\theta/2$ alrededor de la recta $\varrho = \csc\theta$. *Sol.* 8π un. sup.

20. Deducir las fórmulas de este capítulo.

Capítulo 46

Integrales impropias

UNA INTEGRAL DEFINIDA, $\int_a^b f(x)\,dx$, se denomina *integral impropia* si

(*a*) el integrando, $f(x)$, tiene uno o más puntos de discontinuidad en el intervalo $a \leq x \leq b$;
(*b*) por lo menos uno de los límites de integración es infinito.

INTEGRANDO DISCONTINUO. Si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$, pero es discontinua en $x = b$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx \quad \text{siempre que exista el límite}$$

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $a < x \leq b$, pero es discontinua en $x = a$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx \quad \text{siempre que exista el límite}$$

Si $f(x)$ es continua para todos los valores de x del intervalo $a \leq x \leq b$ excepto para $x = c$, siendo $a < c < b$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon' \to 0^+} \int_{c+\epsilon'}^{b} f(x)\,dx$$

siempre que existan *ambos* límites. (Ver Problemas 1-6.)

LIMITES DE INTEGRACION INFINITOS. Si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq u$,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u \to +\infty} \int_a^{u} f(x)\,dx \quad \text{siempre que exista el límite}$$

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $u' \leq x \leq b$,

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{u' \to -\infty} \int_{u'}^{b} f(x)\,dx \quad \text{siempre que exista el límite}$$

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $u' \leq x \leq u$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u \to +\infty} \int_a^{u} f(x)\,dx + \lim_{u' \to +\infty} \int_{u'}^{a} f(x)\,dx$$

siempre que existan *ambos* límites. (Ver Problemas 7-13.)

Problemas resueltos

1. Calcular $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. El integrando presenta una discontinuidad en $x = 3$. Consideremos

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_0^{3-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\epsilon \to 0+} \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{3}\Big]_0^{3-\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0+} \operatorname{arc\,sen} \frac{3-\epsilon}{3} = \operatorname{arc\,sen} 1 = \frac{1}{2}\pi$$

Luego,

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{2}\pi$$

2. Demostrar que $\int_0^2 \frac{dx}{2-x}$ carece de sentido. El integrando presenta una discontinuidad en $x = 2$. Consideremos

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^{2-\epsilon} \frac{dx}{2-x} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \ln \frac{1}{2-x}\Big]_0^{2-\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\ln \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{1}{2}\right)$$

No existe límite y la integral carece de sentido.

3. Demostrar que $\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$ carece de sentido.

El integrando presenta una discontinuidad en $x = 1$, valor comprendido entre los límites de integración 0 y 4. Consideremos

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\epsilon' \to 0^+} \int_{1+\epsilon'}^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{-1}{x-1}\Big]_0^{1-\epsilon} + \lim_{\epsilon' \to 0^+} \frac{-1}{x-1}\Big]_{1+\epsilon'}^4 = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right) + \lim_{\epsilon' \to 0^+} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{\epsilon'}\right)$$

No existe límite.

Si no se tiene en cuenta el punto de discontinuidad $\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1}\Big]_0^4 = -\frac{4}{3}$, lo cual es un absurdo.

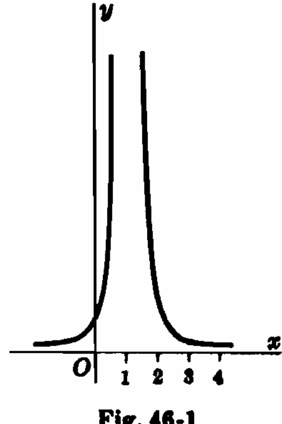


Fig. 46-1

4. Hallar $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$. El integrando presenta una discontinuidad en $x = 1$. Consideremos

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \lim_{\epsilon' \to 0^+} \int_{1+\epsilon'}^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{3}{2}(x-1)^{2/3}\Big]_0^{1-\epsilon} + \lim_{\epsilon' \to 0^+} \frac{3}{2}(x-1)^{2/3}\Big]_{1+\epsilon'}^4$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{3}{2}\left((-\epsilon)^{2/3} - 1\right) + \lim_{\epsilon' \to 0^+} \frac{3}{2}(\sqrt[3]{9} - \epsilon'^{2/3}) = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{9} - 1)$$

Luego, $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{9} - 1)$.

5. Demostrar que $\int_0^{\pi/2} \sec x\, dx$ carece de sentido. El integrando presenta una discontinuidad en $x = \frac{1}{2}\pi$. Consideremos

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^{1/2\pi - \epsilon} \sec x\, dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \ln(\sec x + \operatorname{tag} x)\Big]_0^{1/2\pi - \epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \ln\{\sec(\tfrac{1}{2}\pi - \epsilon) + \operatorname{tag}(\tfrac{1}{2}\pi - \epsilon)\}$$

No existe límite y la integral carece de sentido.

6. Hallar $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}\, dx$. El integrando presenta una discontinuidad $x = \frac{1}{2}\pi$. Consideremos

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^{1/2\pi - \epsilon} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}\, dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} -2(1 - \operatorname{sen} x)^{1/2}\Big]_0^{1/2\pi - \epsilon} = 2 \lim_{\epsilon \to 0^+} \{-[1 - \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi - \epsilon)] + 1\}$$

$$= 2(0 + 1) = 2. \quad \text{Luego,} \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}\, dx = 2.$$

7. Hallar $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$. El límite superior de integración es infinito. Consideremos

$$\lim_{u \to +\infty} \int_0^u \frac{dx}{x^2 + 4} = \lim_{u \to +\infty} \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tag} \frac{1}{2} x\Big]_0^u + \frac{1}{4}\pi. \quad \text{Luego,} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}\pi.$$

8. Hallar $\int_{-\infty}^0 e^{2x}\, dx$. El límite inferior de integración es infinito. Consideremos

$$\lim_{u \to -\infty} \int_u^0 e^{2x}\, dx = \lim_{u \to -\infty} \frac{1}{2} e^{2x}\Big]_u^0 = \frac{1}{2}(1) - \lim_{u \to -\infty} \frac{1}{2} e^{2u} = \frac{1}{2} - 0. \quad \text{Luego,} \quad \int_{-\infty}^0 e^{2x}\, dx = \tfrac{1}{2}.$$

9. Demostrar que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ carece de sentido. El límite superior de integración es infinito. Consideremos

$$\lim_{u\to+\infty} \int_1^u \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{u\to+\infty} 2\sqrt{x}\Big]_1^u = \lim_{u\to+\infty} (2\sqrt{u} - 2). \quad \text{El límite no existe.}$$

10. Hallar $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}$. Ambos límites de integración son infinitos. Consideremos

$$\lim_{u\to+\infty} \int_0^u \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} + \lim_{u'\to-\infty} \int_{u'}^0 \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} = \lim_{u\to+\infty} \text{arc tag}\, e^x\Big]_0^u + \lim_{u'\to-\infty} \text{arc tag}\, e^x\Big]_{u'}^0$$

$$= \lim_{u\to+\infty} (\text{arc tag}\, e^u - \tfrac{1}{4}\pi) + \lim_{u'\to-\infty} (\tfrac{1}{4}\pi - \text{arc tag}\, e^{u'})$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{4}\pi - 0 = \tfrac{1}{2}\pi$$

11. Hallar $\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x\,dx$. El límite superior de integración es infinito. Consideremos

$$\lim_{u\to+\infty} \int_0^u e^{-x} \operatorname{sen} x\,dx = \lim_{u\to+\infty} -\tfrac{1}{2}e^{-x}(\operatorname{sen} x + \cos x)\Big]_0^u = \lim_{u\to+\infty} \{-\tfrac{1}{2}e^{-u}(\operatorname{sen} u + \cos u)\} + \tfrac{1}{2}$$

Cuando $u \to +\infty$, $e^{-u} \to 0$ mientras que sen u y cos u varían de 1 a -1. Luego, $\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x\,dx = \tfrac{1}{2}$.

12. Hallar el área limitada por la curva $y^2 = \frac{x^4}{1-x^2}$ y sus asíntotas. Ver Fig. 46-2.

$A = 4\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. El integrando presenta una discontinuidad en $x = 1$. Consideremos

$$\lim_{\epsilon\to0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon\to0^+} -(1-x^2)^{1/2}\Big]_0^{1-\epsilon} = \lim_{\epsilon\to0^+} (1 - \sqrt{2\epsilon - \epsilon^2}) = 1$$

El área pedida es 4(1) = 4 unidades de superficie.

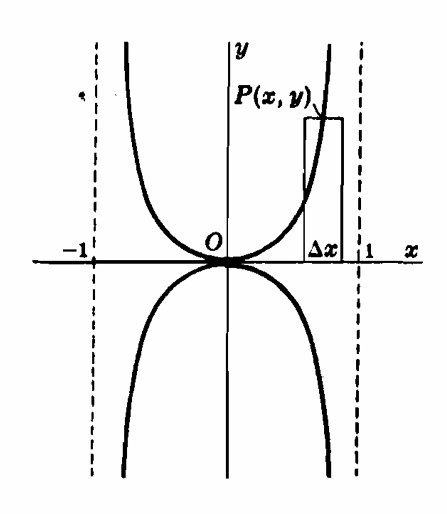


Fig. 46-2

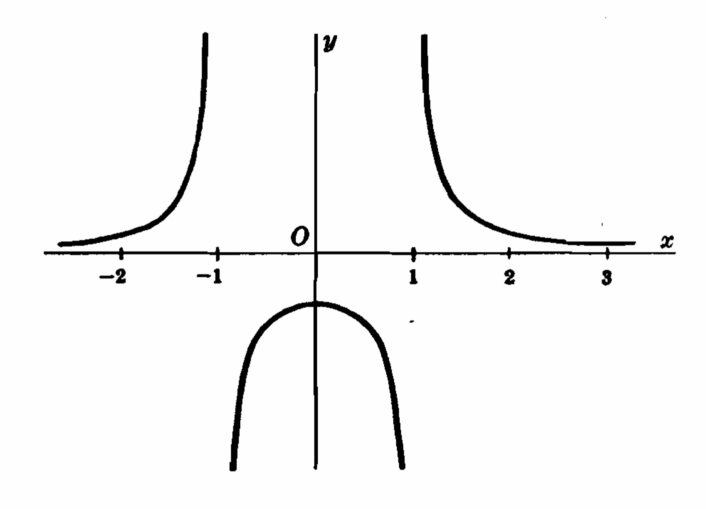


Fig. 46-3

13. Hallar el área situada a la derecha de $x = 3$ y limitada por la curva $y = \frac{1}{x^2-1}$ y el eje x. Ver Fig. 46-3.

$$A = \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{u\to+\infty} \int_3^u \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \lim_{u\to+\infty} \ln \frac{x-1}{x-1}\Big]_3^u$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{u\to+\infty} \ln \frac{u-1}{u+1} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \lim_{u\to+\infty} \ln \frac{1-1/u}{1+1/u} + \frac{1}{2} \ln 2$$

$$= \frac{1}{2} (\ln 2) \text{ unidades de superficie.}$$

Problemas propuestos

14. Hallar:

(*a*) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$

(*b*) $\int_0^4 \frac{dx}{4-x}$ (Carece de sentido)

(*c*) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = 4$

(*d*) $\int_0^4 \frac{dx}{(4-x)^{3/2}}$ (Carece de sentido)

(*e*) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \pi$

(*f*) $\int_{-1}^8 \frac{dx}{x^{1/3}} = 9/2$

(*g*) $\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = 6\sqrt[3]{2}$

(*h*) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}$ (Carece de sentido)

(*i*) $\int_0^1 \ln x\, dx = -1$

(*j*) $\int_0^1 x \ln x\, dx = -1/4$

15. Hallar el área limitada por la curva dada y sus asíntotas.

(*a*) $y^2 = \frac{x^4}{4-x^2}$, (*b*) $y^2 = \frac{4-x}{x}$, (*c*) $y^2 = \frac{1}{x(1-x)}$

Sol. (*a*) 4π un. sup., (*b*) 4π un. sup., (*c*) 2π un. sup.

16. Hallar:

(*a*) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$

(*b*) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(4-x)^2} = \frac{1}{4}$

(*c*) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1$

(*d*) $\int_{-\infty}^6 \frac{dx}{(4-x)^2}$ (Carece de sentido)

(*e*) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \frac{1}{\ln 2}$

(*f*) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2/e$

(*g*) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx = 0$

(*h*) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+4x^2} = \pi/2$

(*i*) $\int_{-\infty}^0 xe^x\, dx = -1$

(*j*) $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}\, dx = 6$

17. Hallar el área limitada por la curva dada y su asíntota:

(*a*) $y = \frac{8}{x^2+4}$, (*b*) $y = \frac{x}{(4+x^2)^2}$, (*c*) $y = xe^{-x^2/2}$

Sol. (*a*) 4π un. sup., (*b*) $\frac{1}{4}$ un. sup., (*c*) 2 un. sup.

18. Hallar el área:

(*a*) limitada por $y = \frac{1}{x^2-4}$ y a la derecha de $x = 3$. *Sol.* $\frac{1}{4} \ln 5$ un. sup.

(*b*) limitada por $y = \frac{1}{x(x-1)^2}$ y a la derecha de $x = 2$. *Sol.* $1 - \ln 2$ un. sup.

19. Demostrar que las siguientes áreas carecen de sentido:

(*a*) área limitada por $y = \frac{1}{4-x^2}$ desde $x = 2$ hasta $x = -2$.

(*b*) área limitada por $xy = 9$ a la derecha de $x = 1$.

20. Demostrar que el área del primer cuadrante limitada por $y = e^{-2x}$ es igual a $\frac{1}{2}$ (unidades de superficie) y que el volumen generado en la rotación de dicha área alrededor del eje x es $\frac{1}{4}\pi$ (unidades de volumen).

21. Demostrar que en la rotación de la región R del plano limitada por $xy = 9$ y a la derecha *de* $x = 1$ alrededor del eje x, el volumen generado es igual a 81π (unidades de volumen) y que, sin embargo, el área de la superficie es infinita.

22. Hallar la longitud del arco indicado:

(*a*) $9y^2 = x(3-x)^2$, un lazo. (*b*) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, arco entero. (*c*) $9y^2 = x^2(2x+3)$, un lazo.

Sol. (*a*) $4\sqrt{3}$ unidades (*b*) $6a$ unidades (*c*) $2\sqrt{3}$ unidades

23. Hallar el momento de inercia de un círculo de radio r con respecto a una tangente. *Sol.* $3r^2s/2$.

24. Demostrar que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ diverge para todos los valores de p.

25. (*a*) Demostrar que $\displaystyle\int_a^b \frac{N\,dx}{(x-b)^p}$ existe para $p < 1$ y carece de sentido para $p \geq 1$.

(*b*) Demostrar que $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{N\,dx}{x^p}$ existe para $p > 1$ y carece de sentido para $p \leq 1$.

26. Sea la función $f(x) \leq g(x)$ que está definida y es positiva en el intervalo $a \leq x < b$, siendo $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to b^-} g(x) = +\infty$. Según la Fig. 46-4, parece lógico suponer:

(1) Si $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ está definida, también estará $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

(2) Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ no está definida, tampoco lo estará $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$.

Determinar si están o no definidas las siguientes integrales:

(*a*) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^4}$. Para $0 \leq x < 1$, $1-x^4 = (1-x)(1+x)(1+x^2) < 4(1-x)$ y $\dfrac{\frac{1}{4}}{1-x} < \dfrac{1}{1-x^4}$.

Luego $\displaystyle\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ no está definida, ni tampoco la integral dada.

(*b*) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$. Para $0 < x \leq 1$, $\dfrac{1}{x^2+\sqrt{x}} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Luego $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ está definida igualmente que la integral dada.

(*c*) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{x^{1/3}}$ está definida. (*d*) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{x}\,dx$ no está definida. (*e*) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ está definida.

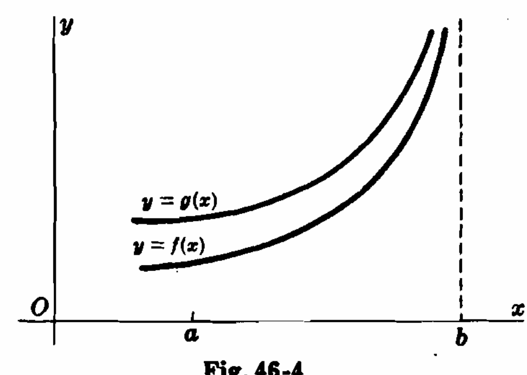


Fig. 46-4

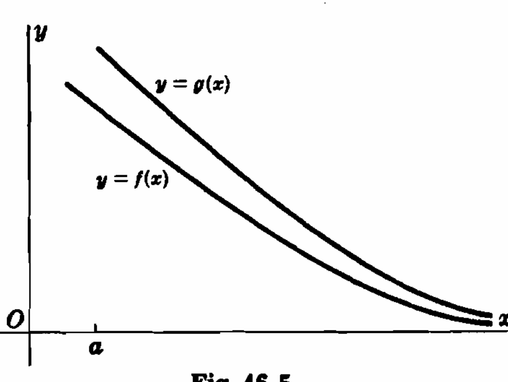


Fig. 46-5

27. Sea la función $f(x) \leq g(x)$ que está definida y es positiva en el intervalo $x \geq a$, siendo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Según la Fig. 46-5, parece lógico suponer:

(3) Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ está definida, también estará $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

(4) Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ no está definida, tampoco lo estará $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Determinar si están definidas o no las siguientes integrales.

(*a*) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+2x+6}}$. Para $x \geq 1$, $\dfrac{1}{\sqrt{x^4+2x+6}} < \dfrac{1}{x^2}$. Luego $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ está definida igualmente que la integral dada.

(*b*) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+2x}}$ está definida. (*c*) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ está definida. (*d*) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}$ está definida.

Capítulo 47

Sucesiones y series

UNA SUCESION, $\{s_n\} = s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$, es una función de n cuyo dominio de definición lo constituye el conjunto de los números positivos. (Ver Capítulo 1.)

Se dice que una sucesión $\{s_n\}$ está *acotada*, si existen dos números, P y Q, de manera que $P \leq s_n \leq Q$ para todos los valores de n. Por ejemplo, la sucesión $3/2, 5/4, 7/6, \ldots, \dfrac{2n+1}{2n} \ldots$, está acotada, ya que $1 \leq s_n \leq 2$ para todos los valores de n, sin embargo, la sucesión $2, 4, 6, \ldots, 2n$, no lo está.

Una sucesión $\{s_n\}$ es *creciente* si $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$, y *decreciente* cuando $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \cdots s_n \geq \cdots$ Por ejemplo, las sucesiones $\left\{\dfrac{n^2}{n+1}\right\} = 1/2, 4/3, 9/4, 16/5, \ldots$ y $\{2n-(-1)^n\} = 3, 3, 7, 7, \ldots$ son crecientes y las sucesiones $\{1/n\} = 1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ y $-\{n\} = -1, -2, -3, -4, \ldots$, son decrecientes.

Una sucesión $\{s_n\}$ converge hacia un límite finito s, $\left[\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s\right]$, cuando, dado un número ϵ tan pequeño como queramos, se puede encontrar un entero positivo m de manera que a partir de un n dado y para todos los siguientes, $n > m$, se verifica la desigualdad $|s - s_n| < \epsilon$. Si una sucesión tiene límite es *convergente*, y si no lo tiene recibe el nombre de *divergente*.

(Ver Problemas 1-2.)

Una sucesión $\{s_n\}$ diverge o tiende a ∞, $\left[\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \infty\right]$, cuando, dado un número positivo M tan grande como queramos, existe un entero positivo m de manera que a partir de un n dado y para todos los siguientes, $n > m$, se verifica la desigualdad $|s_n| > M$. Si $s_n > M$, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$; si $s_n < -M$, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = -\infty$.

TEOREMA DE LAS SUCESIONES.

I. Toda sucesión acotada, creciente o decreciente, es convergente. La demostración cae fuera del propósito y alcance de este libro.

II. Toda sucesión no acotada es divergente. Véase la demostración en el Problema 3.
Muchos de los teoremas restantes son consecuencia inmediata de los teoremas expuestos en el Capítulo 2.

III. Una sucesión convergente (divergente) no modifica su carácter al cambiar de lugar uno o todos de sus n primeros términos.

IV. El límite de una sucesión convergente es único.

(Véase la demostración en el Problema 4.)

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = t$:

V. $\lim\limits_{n\to+\infty} (k\cdot s_n) = k \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = ks$, k siendo k una constante cualquiera.

VI. $\lim\limits_{n\to+\infty} (s_n \pm t_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n \pm \lim\limits_{n\to+\infty} t_n = s \pm t.$

VII. $\lim\limits_{n\to+\infty} (s_n\cdot t_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} t_n = s\cdot t.$

VIII. $\lim_{n\to+\infty} (s_n/t_n) = \lim_{n\to+\infty} s_n \,/\, \lim_{n\to+\infty} t_n = s/t$, siempre que $t \neq 0$ y $t_n \neq 0$ para todos los valores de n.

IX. Sea $\{s_n\}$ una sucesión de términos no nulos; si $\lim_{n\to+\infty} s_n = \infty$, se verifica $\lim_{n\to+\infty} 1/s_n = 0$.
(Véase demostración en el Problema 5.)

X. Si $a > 1$, $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.
(Véase la demostración en el Problema 6.)

XI. Si $|r| < 1$, se verifica $\lim_{n\to+\infty} r^n = 0$.

LA SUMA INDICADA

$$\sum s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n + \cdots \qquad (1)$$

de los términos de una sucesión $\{s_n\}$ recibe el nombre de *serie*. A toda serie se le asocia una sucesión de *sumas parciales*: $S_1 = s_1$, $S_2 = s_1 + s_2$, $S_3 = s_1 + s_2 + s_3, \cdots, S_n = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n, \cdots$.

Si $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$, siendo S un número finito, la serie (*1*) se denomina de *convergente* y S es su *suma*. Si no existe $\lim_{n\to+\infty} S_n$, la serie (*1*) se denomina *divergente*. Una serie también es divergente bien porque $\lim_{n\to+\infty} S_n = \infty$, o bien porque a medida que crece n, S_n va aumentando y disminuyendo sin aproximarse a un límite; en este último caso la serie recibe el nombre de *oscilante*. Por ejemplo, en la serie $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, $S_4 = 0, \ldots$
(Ver Problemas 7-8.)

De los teoremas anteriores se deducen las consecuencias siguientes:

XII. Una serie convergente (divergente) sigue siendo convergente (divergente) si se cambia el orden de uno o de todos sus n primeros términos. (Ver Problema 9.)

XIII. La suma de una serie convergente es única.

XIV. Si Σs_n converge hacia S, la serie $\Sigma k s_n$, siendo k una constante, converge hacia kS. Si Σs_n es divergente, también lo es $\Sigma k s_n$.

XV. Si Σs_n es convergente, se verifica: $\lim_{n\to+\infty} s_n = 0$.
(Véase la demostración en el Problema 10.)

El recíproco no es cierto. La serie armónica [Problema 7(*c*)] es divergente y, sin embargo, $\lim_{n\to+\infty} s_n = 0$.

XVI. Si $\lim_{n\to+\infty} s_n \neq 0$, la serie Σs_n es divergente.

El recíproco no es cierto; véase el Problema 7(*c*). (Ver Problema 11.)

Problemas resueltos

1. Sea la sucesión $\{s_n\}$ cuyo límite es s. Situemos sobre una escala numérica (Fig. 47-1) los puntos s, $s - \epsilon$, $s + \epsilon$, siendo ϵ un número positivo tan pequeño como queramos (infinitésimo) y vayamos colocando, ordenadamente, los puntos

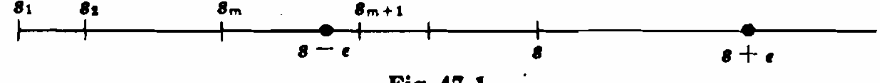


Fig. 47-1

$s_1, s_2, s_3, \ldots$ Según la definición de convergencia, los m primeros puntos están situados fuera del intervalo considerado, pero a partir del s_{m+1}, él y todos los siguientes están situados dentro de él.

En la Fig. 47-2 se puede observar una representación en un sistema de coordenadas rectangulares. En primer lugar, hemos trazado las rectas $y = s$, $y = s - \epsilon$ e $y = s + \epsilon$, determinando de esta forma, una banda de amplitud 2ϵ. Situando ahora los puntos $(1, s_1)$, $(2, s_2)$, $(3, s_3) \ldots$, el punto $(m+1, s_{m+1})$ y todos los siguientes caerán dentro de la banda.

Es importante observar que fuera del intervalo o banda de amplitud 2ϵ, solamente habrá un número finito de puntos de una sucesión convergente,

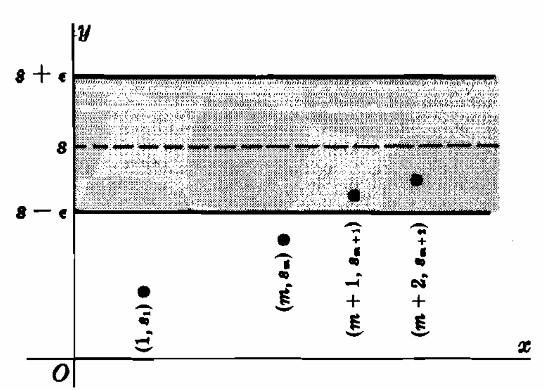


Fig. 47-2

2. Aplicar el teorema 1 para demostrar que las sucesiones (*a*) $\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$ y (*b*) $\left\{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots (2n)}\right\}$ son convergentes.

(*a*) La sucesión está acotada, ya que $0 \leq s_n \leq 1$, para todos los valores de n.

Como $s_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = s_n + \frac{1}{n(n+1)}$, es decir $s_{n+1} \geq s_n$, la sucesión es creciente. Por tanto la sucesión converge hacia $s \leq 1$.

(*b*) La sucesión está acotada, ya que $0 \leq s_n \leq 1$, para todos los valores de n. Como $s_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots (2n+2)} = \frac{2n+1}{2n+2} s_n$, la sucesión es decreciente. Por tanto, la sucesión converge hacia $s \geq$ o.

3. Demostrar que toda sucesión no acotada $\{s_n\}$ es divergente.

Supongamos que $\{s_n\}$ es convergente (demostración por reducción al absurdo). Dado un número positivo ϵ, tan pequeño como queramos, existirá un entero positivo m de manera que a partir de él y para todos los siguientes, $n > m$, se verificará la desigualdad $|s_n - s| < \epsilon$. Luego en este intervalo estarán todos los términos de la sucesión menos un número finito de ellos con lo cual dicha sucesión deberá estar acotada. Como esto es contrario a la hipótesis, la sucesión será divergente.

4. Demostrar que el límite de una sucesión convergente es único.

Supongamos que la sucesión admitiese dos límites distintos, es decir, $\lim_{n \to +\infty} s_n = s$ y $\lim_{n \to +\infty} s_n = t$, siendo $|s - t| > 2\epsilon > 0$
En estas condiciones, en los intervalos, de amplitud 2ϵ, de s y t tendremos propiedades contradictorias: (i) por una parte no pueden tener puntos comunes, y (ii) cada uno contiene todos los términos de la sucesión menos un número finito de ellos. Así, pues, deberá ser $s = t$ y el límite será único.

5. Demostrar que si $\{s_n\}$ es una sucesión de términos no nulos y $\lim_{n \to +\infty} s_n = \infty$, se verifica: $\lim_{n \to +\infty} 1/s_n = 0$.

Elegido un número muy pequeño $\epsilon > 0$, de $\lim_{n \to +\infty} s_n = \infty$ se deduce que para todo $M > 1/\epsilon$, existirá un entero positivo m de manera que a partir de él y para todos los siguientes, $n > m$, se verificará la desigualdad $|s_n| > M > 1/\epsilon$. Para este valor de m, $|1/s_n| < 1/M < \epsilon$ siempre que $n > m$; por tanto, $\lim_{n \to +\infty} 1/s_n = 0$.

6. Demostrar que $\lim_{n \to +\infty} a^n = +\infty$ para $a > 1$.

Sea M número muy grande, $M > 0$; supongamos $a = 1 + b$ con $b > 0$; entonces

$$a^n = (1+b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} b^2 + \cdots > 1 + nb > M$$

para $n > M/b$. Es decir que m es el entero superior a M/b.

7. Demostrar que:

(*a*) La serie aritmética $a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + [a + (n-1)d] + \cdots$ es divergente cuando $a^2 + d^2 > 0$.

(*b*) La serie geométrica $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$, siendo $a \neq 0$, converge hacia $\frac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$ y diverge si $|r| \geq 1$.

(*c*) La serie *armónica* $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \cdots + 1/n + \cdots$ es divergente.

(*a*) Aquí $S_n = \frac{1}{2}n[2a + (n-1)d]$ y $\lim_{n\to+\infty} S_n = \infty$ excepto para $a = d = 0$.

Por tanto es divergente cuando $a^2 + d^2 > 0$.

(*b*) En este caso $S_n = \frac{a - ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}r^n$, $r \neq 1$.

Si $|r| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} r^n = 0$, y $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$.

Si $|r| > 1$, $\lim_{n\to+\infty} r^n = \infty$, y S_n es divergente.

Si $|r| = 1$, la serie es o $a + a + a + \cdots$ o $a - a + a - a + \cdots$ y es divergente.

(*c*) Formando las sumas parciales, obtenemos

$$S_4 > 2,\ S_8 > 2{,}5\ S_{16} > 3,\ S_{32} > 3{,}5,\ S_{64} > 4,\ \ldots$$

Como la sucesión de sumas parciales no está acotada, la serie será divergente.

8. (*a*) Sumar la serie $\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \cdots$:

$$S_1 = \frac{1}{5} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5}\right), S_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^2}\right), S_3 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^3}\right), \cdots,$$

$$S_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right), \text{ y } S = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right) = \frac{1}{4}.$$

(*b*) Sumar la serie $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots$:

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \tfrac{1}{2},\quad S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = 1 - \tfrac{1}{3},$$

$$S_3 = S_2 + \frac{1}{3\cdot 4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} = 1 - \tfrac{1}{4},\quad \cdots,\quad S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{y } S = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

9. Sabiendo que la suma de la serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$ es igual a 2, hallar la suma de la serie que resulta cuando (*a*) se suprimen los cuatro primeros términos, (*b*) cuando se añaden a la dada los términos $8 + 4 + 2$.

(*a*) La serie $\frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$ es una serie geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$. Converge hacia

$$S = 2 - (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}) = \tfrac{1}{8}$$

(*b*) La serie $8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$ es una serie geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$. Converge hacia

$$2 + (8 + 4 + 2) = 16$$

10. Demostrar que si $\Sigma s_n = S$, se verifica $\lim_{n\to+\infty} s_n = 0$.

Como $\Sigma s_n = S$, $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$ y $\lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S$. Ahora bien $s_n = S_n - S_{n-1}$; luego,

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

11. Demostrar que las series (*a*) $1/3 + 2/5 + 3/7 + 4/9 + \cdots$ y (*b*) $1/2 + 3/4 + 7/8 + 15/16 + \cdots$ son divergentes.

(*a*) $s_n = \frac{n}{2n+1}$ y $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2+1/n} = \frac{1}{2} \neq 0$.

(*b*) $s_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$ y $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 \neq 0$.

12. Una serie Σs_n converge hacia S, si la sucesión $\{s_n\}$ de las sumas parciales converge también hacia S, es decir, si dado un $\epsilon > 0$ tan pequeño como queramos, existe un entero m de manera que a partir de él y para todos los siguientes, $n > m$, se verifica la desigualdad $|S - S_n| < \epsilon$. Demostrar que las series del Problema 8 son convergentes.

(*a*) Si $|S - S_n| = \left|\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)\right| = \frac{1}{4 \cdot 5^n} < \epsilon$, tendremos $5^n > \frac{1}{4\epsilon}$, $n \ln 5 > -\ln(4\epsilon)$, y $n > -\frac{\ln 4\epsilon}{\ln 5}$

Por tanto, basta con que m sea mayor que $-\frac{\ln 4\epsilon}{\ln 5}$.

(*b*) Si $|S - S_n| = \left|1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right| = \frac{1}{n+1} < \epsilon$, tendremos $n + 1 > \frac{1}{\epsilon}$ y $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$. Por tanto, basta con que m sea mayor que $\frac{1}{\epsilon} - 1$.

Problemas propuestos

13. Determinar si las sucesiones siguientes están o no acotadas, son decrecientes, crecientes o convergentes, divergentes u oscilantes.

(*a*) $\left\{n + \frac{2}{n}\right\}$ (*b*) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ (*c*) $\{\operatorname{sen} \frac{1}{4}n\pi\}$ (*d*) $\{\sqrt[3]{n^2}\}$ (*e*) $\left\{\frac{n!}{10^n}\right\}$ (*f*) $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$

14. Demostrar que $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{1/n^p} = 1$, $p > 0$. *Ind.* $n^{p/n} = e^{(p \ln n)/n}$.

15. Dada la sucesión $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$, demostrar que: (*a*) en el intervalo $|1 - s_n| < 0{,}01$ están contenidos todos los términos de la sucesión menos los 99 primeros, (*b*) la sucesión está acotada, (*c*) $\lim_{n \to +\infty} s_n = 1$.

16. Demostrar que si: $|r| < 1$, se verifica $\lim_{n \to +\infty} r^n = 0$.

17. Hallar el carácter de las siguientes series geométricas. Calcular la suma de las que sean convergentes.

(*a*) $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots$ (*b*) $4 - 1 + 1/4 - 1/16 + \cdots$ (*c*) $1 + 3/2 + 9/4 + 27/8 + \cdots$

Sol. (*a*) $S = 2$, (*b*) $S = 16/5$ (*c*) Divergente

18. Hallar la suma de las series siguientes:

(*a*) $\sum 3^{-n}$ (*d*) $\sum \frac{1}{n(n+2)}$ (*g*) $\sum \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

(*b*) $\sum \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ (*e*) $\sum \frac{1}{n(n+3)}$ (*h*) $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(*c*) $\sum \left(\frac{1}{n^p} - \frac{1}{(n+1)^p}\right), p > 0$ (*f*) $\sum \frac{n}{(n+1)!}$

Sol. (*a*) 1/2, (*b*) 1/2, (*c*) 1, (*d*) 3/4, (*e*) 11/18, (*f*) 1, (*g*) 1/4, (*h*) 1/4

19. Demostrar que son divergentes, las series.

(*a*) $3 + 5/2 + 7/3 + 9/4 + \cdots$ (*c*) $e + e^2/8 + e^3/27 + e^4/64 + \cdots$

(*b*) $2 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2} + \cdots$ (*d*) $\sum \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$

20. Demostrar que si $\lim_{n \to +\infty} s_n \neq 0$, la serie Σs_n es divergente.

21. Demostrar que las series del Problema 18(*a*)-(*d*) son convergentes por existir un entero positivo m tal que para $\epsilon > 0$, $|S - S_n| < \epsilon$ siempre que $n > m$.

Sol. m = un entero mayor que en (*a*) $-\frac{\ln 2\epsilon}{\ln 3}$, (*b*) $\frac{1}{4\epsilon} - \frac{1}{2}$, (*c*) $\sqrt[p]{1/\epsilon} - 1$, (*d*) la raíz positiva de $2\epsilon m^2 - 2(1 - 3\epsilon)m - (3 - 4\epsilon) = 0$.

Capítulo 48

Criterios de convergencia y divergencia de las series de términos positivos

SERIES DE TERMINOS POSITIVOS. Son series Σs_n cuyos términos son todos positivos.

I. Una serie de términos positivos Σs_n es convergente, si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ está acotada.

Este teorema es consecuencia de que la sucesión de sumas parciales de una serie de términos positivos es siempre creciente.

II. **CRITERIO DE LA INTEGRAL.** Sea $f(n)$ el término general s_n de la serie Σs_n de términos positivos. Si $f(x) > 0$ y es decreciente en el intervalo $x > \xi$, siendo ξ un entero positivo, la serie Σs_n converge o diverge según que exista o no la integral $\int_{\xi}^{+\infty} f(x)\,dx$.

(Ver Problemas 1-5.)

III. **CRITERIO DE LA SERIE MAYORANTE.** Una serie de términos positivos Σs_n es convergente, si a partir de un determinado valor de n, y para todos los siguientes cada término es menor o igual que el correspondiente de una serie Σc_n convergente conocida de términos positivos.

IV. **CRITERIO DE LA SERIE MINORANTE.** Una serie de términos positivos Σs_n es divergente, si a partir de un determinado valor de n y para todos los siguientes, cada término es igual o mayor que el correspondiente de una serie Σd_n divergente conocida de términos positivos. (Ver Problemas 6-11.)

V. **CRITERIO DEL COCIENTE.** Una serie de términos positivos Σs_n es convergente si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} < 1$, y divergente si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} > 1$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$, este criterio nada dice sobre la convergencia o divergencia. (Ver Problemas 12-18.)

Problemas resueltos

1. Demostrar el criterio de la integral: Sea $f(n)$ el término general s_n de la serie de términos positivos Σs_n. Si $f(x) > 0$ y es decreciente en el intervalo $x > \xi$, siendo ξ un entero positivo, la serie Σs_n es convergente o divergente según que exista o no la integral $\int_{\xi}^{+\infty} f(x)\,dx$.

En la figura, el área limitada por la curva $y = f(x)$ desde $x = \xi$ hasta $x = n$, se ha aproximado por medio de dos sistemas de rectángulos de base unidad. Expresando que el área limitada por la curva está comprendida entre la suma de las áreas de las series de rectángulos,

$$s_{\xi+1} + s_{\xi+2} + \cdots + s_n < \int_{\xi}^{n} f(x)\,dx < s_{\xi} + s_{\xi+1} + \cdots + s_{n-1}$$

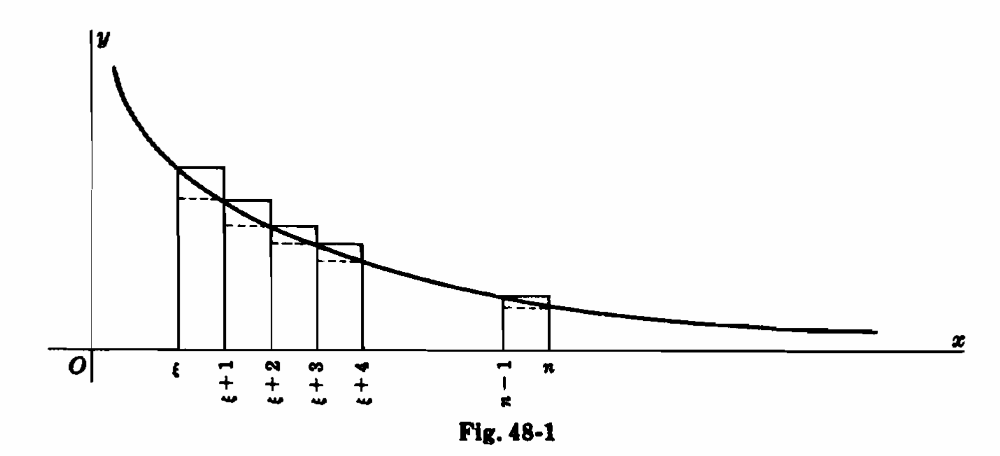


Fig. 48-1

(1) Supongamos que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\xi^n f(x)\,dx = \int_\xi^{+\infty} f(x)\,dx = A$. Por tanto,

$$s_{\xi+1} + s_{\xi+2} + \cdots + s_n < A$$

y

$$S_n = s_\xi + s_{\xi+1} + s_{\xi+2} + \cdots + s_n$$

está acotada y es creciente cuando n crece. Por tanto, por el Teorema I, Σs_n es convergente

(2) Supongamos que el $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\xi^n f(x)\,dx = \int_\xi^{+\infty} f(x)\,dx$ no existe. Tendremos que

$S_n = s_\xi + s_{\xi+1} + \cdots + s_n$ no está acotada y Σs_n es divergente

Determinar el caracter de las series de los Problemas 2-5 por medio del criterio de la integral

2. $\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{7}} + \dfrac{1}{\sqrt{9}} + \cdots$ $f(n) = s_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$; hacemos $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

En el intervalo $x > 1, f(x) > 0$ y decrece cuando x aumenta. Tomamos $\xi = 1$ y consideramos

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u\to+\infty} \int_1^u \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \lim_{u\to+\infty} \sqrt{2x+1}\Big]_1^u = \lim_{u\to+\infty} \sqrt{2u+1} - \sqrt{3} = \infty$$

Como la integral no está definida, la serie es divergente.

3. $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{36} + \dfrac{1}{64} + \cdots$ $f(n) = s_n = \dfrac{1}{4n^2}$; hacemos $f(x) = \dfrac{1}{4x^2}$.

En el intervalo $x > 1, f(x) > 0$ y decrece cuando x aumenta. Tomamos $\xi = 1$ y consideramos

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{4} \lim_{u\to+\infty} \int_1^u \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4} \lim_{u\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big]_1^u = \frac{1}{4} \lim_{u\to+\infty} \left(-\frac{1}{u} + 1\right) = \frac{1}{4}$$

Como la integral está definida, la serie es convergente.

4. $\operatorname{sen}\pi + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{9}\operatorname{sen}\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{16}\operatorname{sen}\frac{1}{4}\pi + \cdots$ $f(n) = s_n = \dfrac{1}{n^2}\operatorname{sen}\dfrac{1}{n}\pi$; hacemos $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\pi$.

En el intervalo $x > 2, f(x) > 0$ y decrece cuando x aumenta. Tomamos $\xi = 2$ y consideramos

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u\to+\infty} \int_2^u \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x}\pi\,dx = \frac{1}{\pi} \lim_{u\to+\infty} \cos\frac{1}{x}\pi\Big]_2^u = \frac{1}{\pi}$$

La serie es convergente.

5. $1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \dfrac{1}{4^p} + \cdots\ (p>0)$. (La serie p.) $f(n) = s_n = \dfrac{1}{n^p}$; hacemos $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$.

En el intervalo $x > 1, f(x) > 0$ y decrece cuando x aumenta. Tomamos $\xi = 1$ y consideramos

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u\to+\infty} \int_1^u \frac{dx}{x^p} = \lim_{u\to+\infty} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^u = \frac{1}{1-p}\left\{\lim_{u\to+\infty} u^{1-p} - 1\right\}, (p \neq 1)$$

Si $p > 1$, $\frac{1}{1-p}\left\{\lim_{u\to+\infty} u^{1-p} - 1\right\} = \frac{1}{1-p}\left\{\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u^{p-1}} - 1\right\} = \frac{1}{p-1}$ la serie es convergente.

Si $p = 1$, $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u\to+\infty} \ln u = +\infty$ la serie es divergente.

Si $p < 1$, $\frac{1}{1-p}\left\{\lim_{u\to+\infty} u^{1-p} - 1\right\} = +\infty$ la serie es divergente.

Obsérvese en el segundo caso que la serie armónica es divergente.

CRITERIOS DE LAS SERIES MAYORANTE Y MINORANTE

Para aplicar estos criterios hay que comparar el término general de la serie cuyo carácter se quiere averiguar con el de una serie conocida, convergente o divergente. Entre éstas, las más utilizadas son:

(*a*) La serie geométrica $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots$, $a \neq 0$, que es convergente cuando la razón está comprendida entre cero y uno, $0 < r < 1$ y divergente cuando la razón es $r \geq 1$.

(*b*) La serie $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$, que es convergente cuando $p > 1$ y divergente cuando $p \leq 1$.

(*c*) Cada una de las nuevas series de carácter conocido.

Determinar el carácter de las series de los Problemas 6-11, aplicando los criterios de las series mayorante y minorante.

6. $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{n^2+1} + \cdots$

El término general de la serie es $s_n = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$; luego la serie dada es término a término menor que la serie p $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$

La serie p es convergente por ser $p = 2$, por tanto, la serie dada es convergente. Aquí también se puede aplicar el criterio de la integral.

7. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$

El término general de la serie es $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Como $\frac{1}{\sqrt{n}} \geqq \frac{1}{n}$, la serie dada es término a término mayor que o igual a la serie armónica, por tanto es divergente. También se puede aplicar el criterio de la integral.

8. $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$

El término general de la serie es $\frac{1}{n!}$. Como $n! \geqq 2^{n-1}$ $\frac{1}{n!} \leqq \frac{1}{2^{n-1}}$.

La serie dada es término a término menor que o igual a la serie geométrica convergente $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ y por tanto, es convergente. (El criterio de la integral no se puede aplicar en este caso.)

9. $2 + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{4^3} + \cdots$ El término general de la serie es $\frac{n+1}{n^3}$.

Como $\frac{n+1}{n^3} \leqq \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}$, la serie dada es término a término menor que o igual al doble de la serie p convergente $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$ por tanto, es convergente.

10. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots$

El término general de la serie es $\frac{1}{n^n}$. Como $\frac{1}{n^n} \leqq \frac{1}{2^{n-1}}$, la serie dada es término a término menor que o igual a la serie geométrica convergente $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$

También, la serie dada es término a término menor que o igual a la serie p convergente, con $p = 2$.

11. $1 + \frac{2^2+1}{2^3+1} + \frac{3^2+1}{3^3+1} + \frac{4^2+1}{4^3+1} + \cdots$

El término general es $\frac{n^2+1}{n^3+1} \geqq \frac{1}{n}$. Luego la serie dada es término a término mayor que o igual a la serie armónica y, por tanto, es divergente.

CRITERIO DEL COCIENTE

12. Demostrar el criterio del cociente:

Una serie de términos positivos Σs_n es convergente si $\lim_{n\to+\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} < 1$ y divergente si $\lim_{n\to+\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} > 1$.

Supongamos $\lim_{n\to+\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = L < 1$. Dado un r cualquiera, siendo $L < r < 1$, existirá un entero positivo m ta que siempre que $n > m$ se verificará $\frac{s_{n+1}}{s_n} < r$, es decir,

$$\frac{s_{m+2}}{s_{m+1}} < r \text{ ó } s_{m+2} < r \cdot s_{m+1}$$

$$\frac{s_{m+3}}{s_{m+2}} < r \text{ ó } s_{m+3} < r \cdot s_{m+2} < r^2 \cdot s_{m+1}$$

$$\frac{s_{m+4}}{s_{m+3}} < r \text{ ó } s_{m+4} < r \cdot s_{m+3} < r^3 \cdot s_{m+1}$$

. . . .

Así pues, cada término de la serie $s_{m+1} + s_{m+2} + s_{m+3} + \cdots$ es $\leq$ que el correspondiente término de la serie geométrica $s_{m+1} + r \cdot s_{m+1} + r^2 \cdot s_{m+1} + \cdots$ que es convergente, ya que $r < 1$. Luego Σs_n es convergente según el Teorema III.

Supongamos $\lim_{n\to+\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = L > 1$ (o bien $= +\infty$). Entonces, existirá un entero positivo m tal que siempre que $n > m$, $\frac{s_{n+1}}{s_n} > 1$. Ahora bien, $s_{n+1} > s_n$, con lo que $\{s_n\}$ no tiende a 0. Luego Σs_n es divergente según el Teorema XVI (Capítulo 47).

Supongamos $\lim_{n\to+\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$. Un ejemplo es la serie p $\sum \frac{1}{n^p}$, $p > 0$, para la cual

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^p = 1$$

Como la serie es convergente cuando $p > 1$ y divergente cuando $p \leq 1$, el criterio no sirve para dilucidar sobre la convergencia o divergencia.

Determinar el carácter de las series de los Problemas 13-23, aplicando el criterio de la raíz.

13. $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots$ $\qquad s_n = \frac{n}{3^n}$, $s_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$, $\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \frac{n+1}{3n}$.

Luego $\lim_{n\to+\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3}$ y la serie es convergente.

14. $\frac{1}{3}+\frac{2\,!}{3^2}+\frac{3\,!}{3^3}+\frac{4\,!}{3^4}+\cdots$ $\qquad s_n=\frac{n\,!}{3^n},\ s_{n+1}=\frac{(n+1)\,!}{3^{n+1}},\ \frac{s_{n+1}}{s_n}=\frac{n+1}{3}.$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{s_{n+1}}{s_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{3}=\infty$ y la serie es divergente.

15. $1+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots$

$$s_n=\frac{n\,!}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)},\quad s_{n+1}=\frac{(n+1)\,!}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)},\quad \frac{s_{n+1}}{s_n}=\frac{n+1}{2n+1}.$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{2}$ la serie es convergente.

16. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}+\cdots$ $\qquad s_n=\frac{1}{n\cdot 2^n},\ s_{n+1}=\frac{1}{(n+1)2^{n+1}},\ \frac{s_{n+1}}{s_n}=\frac{n}{2(n+1)}.$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\frac{1}{2}$ la serie es convergente.

17. $2+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4^2}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4^3}+\cdots$ $\qquad s_n=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{4^{n-1}},\ s_{n+1}=\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{4^n},\ \frac{s_{n+1}}{s_n}=\frac{n(n+2)}{4(n+1)^2}.$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(n+2)}{4(n+1)^2}=\frac{1}{4}$ la serie es convergente.

18. $1+\frac{2^2+1}{2^3+1}+\frac{3^2+1}{3^3+1}+\frac{4^2+1}{4^3+1}+\cdots$

$$s_n=\frac{n^2+1}{n^3+1},\quad s_{n+1}=\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3+1},\quad \frac{s_{n+1}}{s_n}=\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3+1}\cdot\frac{n^3+1}{n^2+1}.$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{s_{n+1}}{s_n}=1$ es un caso de duda. Ver Problema 11.

Problemas propuestos

19. Demostrar que se puede aplicar el criterio de la integral en las series siguientes y aplicarlo para determinar su carácter.

(*a*) $\sum\frac{1}{n}$ (*c*) $\sum\frac{1}{n\ln n}$ (*e*) $\sum\frac{n}{n^2+1}$ (*g*) $\sum\frac{2n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

(*b*) $\sum\frac{50}{n(n+1)}$ (*d*) $\sum\frac{n}{(n+1)(n+2)}$ (*f*) $\sum\frac{n}{e^n}$ (*h*) $\sum\frac{1}{(2n+1)^2}$

Sol. (*a*), (*c*), (*d*), (*e*) divergente.

20. Determinar el carácter de las series aplicando los criterios de las series mayorante y minorante.

(*a*) $\sum\frac{1}{n^3-1}$ (*e*) $\sum\frac{n+2}{n(n+1)}$ (*i*) $\sum\frac{1}{3^n+1}$ (*m*) $\sum\frac{n}{3n^2-4}$

(*b*) $\sum\frac{n-2}{n^3}$ (*f*) $\sum\frac{1}{n^{n-1}}$ (*j*) $\sum\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ (*n*) $\sum\frac{1}{1+\ln n}$

(*c*) $\sum\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ (*g*) $\sum\frac{1}{3n+1}$ (*k*) $\sum\frac{1}{3^n-1}$ (*o*) $\sum\frac{n^4-5}{n^5}$

(*d*) $\sum\frac{1}{n^2-5}$ (*h*) $\sum\frac{\ln n}{n}$ (*l*) $\sum\frac{\ln n}{n^p}$ (*p*) $\sum\frac{n+1}{n\sqrt{3n-2}}$

Sol. (*a*), (*b*), (*d*), (*f*), (*i*), (*k*), (*l*) para $p>2$ convergente.

21. Determinar el carácter de las series, aplicando el criterio del cociente.

(*a*) $\sum \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$ (*d*) $\sum \frac{3^{2n-1}}{n^2 - n}$ (*g*) $\sum \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$ (*j*) $\sum \frac{n^n}{n!}$

(*b*) $\sum \frac{5^n}{n!}$ (*e*) $\sum \frac{(n+1)2^n}{n!}$ (*h*) $\sum \frac{n^3}{(\ln 3)^n}$ (*k*) $\sum \frac{2^n}{2n-1}$

(*c*) $\sum \frac{n}{2^{2n}}$ (*f*) $\sum n\left(\frac{3}{4}\right)^n$ (*i*) $\sum \frac{2^n}{n(n+2)}$ (*l*) $\sum \frac{n^3}{3^n}$

Sol. (*a*), (*b*), (*c*), (*e*), (*f*), (*h*) convergente.

22. Determinar el carácter de las series.

(*a*) $\frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{13^2} + \cdots$

(*b*) $3 + \frac{3}{\sqrt[3]{2}} + \frac{3}{\sqrt[3]{3}} + \frac{3}{\sqrt[3]{4}} + \cdots$

(*c*) $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \cdots$

(*d*) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \cdots$

(*e*) $3 + \frac{3}{4} + \frac{11}{27} + \frac{9}{32} + \cdots$

(*f*) $\frac{2}{3} + \frac{3}{2 \cdot 3^2} + \frac{4}{3 \cdot 3^3} + \frac{5}{4 \cdot 3^4} + \cdots$

(*g*) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \cdots$

(*h*) $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{5}{4 \cdot 6} + \cdots$

(*i*) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{5^4} + \cdots$

(*j*) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^{5/2}} + \frac{1}{4^3} + \cdots$

(*k*) $2 + \frac{3}{5} + \frac{4}{10} + \frac{5}{17} + \cdots$

(*l*) $\frac{2}{5} + \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 8} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{5 \cdot 8 \cdot 11} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14} + \cdots$

Sol. (*a*), (*d*), (*f*), (*g*), (*i*), (*j*), (*l*) convergente.

23. Demostrar el criterio de la serie mayorante. *Ind.* Si $\Sigma c_n = C$, tendremos que $\{S_n\}$ está acotada.

24. Demostrar el criterio de la serie minorante. *Ind.* $\sum_1^n s_i \geq \sum_1^n d_i > M$ para $n > m$.

25. Demostrar que si $P(n)$ y $Q(n)$ son polinomios de grados p y q, respectivamente, la serie $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$ es convergente si $q > p + 1$ y divergente si $q \leq p + 1$. *Ind.* Compárese con $1/n^{q-p}$.

26. Determinar el carácter de las series aplicando el criterio del problema anterior.

(*a*) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots$

(*b*) $\frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{12} + \frac{1}{17} + \cdots$

(*c*) $\frac{3}{2} + \frac{5}{10} + \frac{7}{30} + \frac{9}{68} + \cdots$

(*d*) $\frac{3}{2} + \frac{5}{24} + \frac{7}{108} + \frac{9}{320} + \cdots$

(*e*) $\frac{1}{2^2 - 1} + \frac{2}{3^2 - 2} + \frac{3}{4^2 - 3} + \frac{4}{5^2 - 4} + \cdots$

(*f*) $\frac{1}{2^3 - 1^2} + \frac{1}{3^3 - 2^2} + \frac{1}{4^3 - 3^2} + \frac{1}{5^3 - 4^2} + \cdots$

(*g*) $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{5}{4 \cdot 6} + \cdots$

Sol. (*a*), (*c*), (*d*), (*f*) convergente.

27. Demostrar el Criterio de la Raíz: Una serie de términos positivos Σs_n es convergente si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{s_n} < 1$ y divergente si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{s_n} > 1$. El criterio nada nos dice cuando $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{s_n} = 1$. *Ind.* Si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{s_n} < 1$, tendremos $\sqrt[n]{s_n} < r < 1$, para $n > m$, y $s_n < r^n$.

28. Determinar el carácter de las series aplicando el criterio de la raíz.

(*a*) $\sum \frac{1}{n^n}$, (*b*) $\sum \frac{1}{(\ln n)^n}$, (*c*) $\sum \frac{2^{n-1}}{n^n}$, (*d*) $\sum \left(\frac{n}{n^2+2}\right)^n$ *Sol.* Todas convergentes.

Capítulo 49

Series de términos negativos

UNA SERIE cuyos términos son negativos se puede considerar como opuesta a una de términos positivos.

SERIES ALTERNADAS. Una serie cuyos términos son alternativamente positivos y negativos,

$$\sum (-1)^{n-1}\, s_n = s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \cdots + (-1)^{n-1}\, s_n + \cdots \qquad (1)$$

en la que cada s_i es *positivo* se denomina *serie alternada.*

I. Una serie alternada (*1*) es convergente si (i) $s_n > s_{n+1}$, para todos los valores de n, y (ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 0.$

(Ver Problemas 1-2.)

CONVERGENCIA ABSOLUTA. Una serie $\Sigma s_n = s_1 + s_2 + \cdots + s_n + \cdots$ de términos arbitrariamente positivos y negativos se denomina *absolutamente convergente* si la serie de valores absolutos $\Sigma|s_n| = |s_1| + |s_2| + |s_3| + \cdots + |s_n| + \cdots$ es convergente.

Toda serie de términos positivos es absolutamente convergente.

Toda serie absolutamente convergente es convergente. (Véase la demostración en el Problema 3.)

CONVERGENCIA CONDICIONAL. Si la serie Σs_n es convergente, siendo divergente la de valores absolutos $\Sigma|s_n|$, recibe el nombre de *condicionalmente convergente.*

Por ejemplo, la serie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$, es condicionalmente convergente, ya que ella es convergente pero la serie de valores absolutos $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ es divergente.

CRITERIO DEL COCIENTE PARA LA CONVERGENCIA ABSOLUTA. Una serie de términos arbitrariamente positivos y negativos es absolutamente convergente si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{s_{n+1}}{s_n}\right| < 1$, y divergente si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{s_{n+1}}{s_n}\right| > 1$. Si el límite es igual a 1, nada podemos saber sobre el carácter de la serie.

(Ver Problemas 4-12.)

Problemas resueltos

1. Demostrar que una serie alternada $s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \cdots$ es convergente si (i) $s_n > s_{n+1}$, para todos los valores de n, y (ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 0$.

Consideremos la suma parcial

$$S_{2m} = s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \cdots + s_{2m-1} - s_{2m}$$

que la podemos ordenar como sigue:

$$(a)\ S_{2m} = (s_1 - s_2) + (s_3 - s_4) + \cdots + (s_{2m-1} - s_{2m})$$

$$(b)\ S_{2m} = s_1 - (s_2 - s_3) - \cdots - (s_{2m-2} - s_{2m-1}) - s_{2m}$$

Por hipótesis, $s_n > s_{n+1}$ y $s_n - s_{n+1} > 0$; luego, por (*a*), $S_{2m} > 0$, y por (*b*), $S_{2m} < s_1$. Así pues, la sucesión $\{S_{2m}\}$ está acotada y converge hacia el límite $L < s_1$.

Consideremos ahora la suma parcial $S_{2m+1} = S_{2m} + s_{2m+1}$; tendremos

$$\lim_{m\to+\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to+\infty} S_{2m} + \lim_{m\to+\infty} s_{2m+1} = L + 0 = L$$

Por tanto, $\lim_{n\to+\infty} S_n = L$ y la serie es convergente.

2. Demostrar que las siguientes series alternadas son convergentes:

(*a*) $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \cdots$

$s_n = \dfrac{1}{n^2}$ y $s_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^2}$; Por tanto, $s_n > s_{n+1}$, $\lim_{n\to+\infty} s_n = 0$, y la serie es convergente.

(*b*) $1/2 - 1/5 + 1/10 - 1/17 + \cdots$

$s_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ y $s_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^2+1}$; por tanto, $s_n \geq s_{n+1}$, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0$, y la serie es convergente.

(*c*) $\dfrac{1}{e} - \dfrac{2}{e^2} + \dfrac{3}{e^3} - \dfrac{4}{e^4} + \cdots$

La serie es convergente, ya que $s_n \geq s_{n+1}$ y $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{e^n} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{e^n} = 0$.

3. Demostrar que toda serie absolutamente convergente es convergente.

Sea (*a*) $\Sigma s_n = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \cdots + s_n + \cdots$,

cuyos términos son positivos y negativos y supongamos que la correspondiente serie de términos positivos

(*b*) $\Sigma |s_n| = |s_1| + |s_2| + |s_3| + \cdots + |s_n| + \cdots$

converge hacia S'.

Supongamos que la enésima suma parcial $S_n = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n$ de (*a*) consta de r términos positivos cuya suma es P_r y $t = n = r$ términos negativos cuya suma es $-Q_t$. Es evidente que $S_n = P_r - Q_t$, mientras que la correspondiente suma parcial de (*b*) es $S'_n = P_r + Q_t$. Como $\lim_{n\to+\infty} S'_n = S'$, las sumas parciales S'_n están acotadas. Por consiguiente, las sucesiones $\{P_r\}$ y $\{Q_t\}$ están acotadas y son crecientes a medida que aumenta n. Si $\lim_{n\to+\infty} P_r = P$ y $\lim_{n\to+\infty} Q_t = Q$, tendremos:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} P_r - \lim_{n\to+\infty} Q_t = P - Q$$

y, por tanto, la serie Σs_n es convergente.

CONVERGENCIA ABSOLUTA Y CONDICIONAL

Determinar si las series siguientes son absoluta o condicionalmente convergentes.

4. $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \cdots$

La serie $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots$, obtenida tomando todos los términos positivos, es convergente, por ser una serie geométrica de $r = \frac{1}{2}$. Por tanto, la serie dada es absolutamente convergente.

5. $1 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{3^2} - \dfrac{4}{3^3} + \cdots$

La serie $1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{3^2} + \dfrac{4}{3^3} + \cdots$, obtenida tomando todos los términos positivos, es convergente, por el criterio del cociente. Así pues, la serie dada es absolutamente convergente.

6. $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$

La serie $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$ es divergente, por ser una serie p con $p = \frac{1}{2} < 1$. Así pues, la serie dada es condicionalmente convergente.

7. $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3^3} - \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4^3} + \cdots$

La serie $1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4^3} + \cdots$ es convergente, ya que es término a término menor o igual a la serie p con $p = 3$. Así pues, la serie dada es absolutamente convergente.

8. $\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4} + \cdots$

La serie $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4} + \cdots$ es divergente, ya que es término a término mayor que $\frac{1}{2}$(serie armónica). Por tanto, la serie dada es absolutamente convergente.

9. $2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} + \cdots$

La serie $2 + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^7}{7!} + \cdots + \frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$ es convergente (criterio del cociente) y la serie dada es absolutamente convergente.

10. $\frac{1}{2} - \frac{4}{2^3+1} + \frac{9}{3^3+1} - \frac{16}{4^3+1} + \cdots$

La serie $\frac{1}{2} + \frac{4}{2^3+1} + \frac{9}{3^3+1} + \frac{16}{4^3+1} + \cdots + \frac{n^2}{n^3+1} + \cdots$ es divergente (criterio de la integral) y la serie dada es condicionalmente convergente.

11. $\frac{1}{2} - \frac{2}{2^3+1} + \frac{3}{3^3+1} - \frac{4}{4^3+1} + \cdots$

La serie $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^3+1} + \frac{3}{3^3+1} + \frac{4}{4^3+1} + \cdots + \frac{n}{n^3+1} + \cdots$ es convergente, ya que es término a término menor que la serie p para $p = 2$. Por tanto, la serie dada es absolutamente convergente.

12. $\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} - \frac{1}{4\cdot 2^4} + \cdots$

La serie $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{4\cdot 2^4} + \cdots$ es convergente, ya que es término a término menor que o igual a la serie convergente geométrica $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$. Por tanto, la serie dada es absolutamente convergente.

Problemas propuestos

13. Determinar si las series alternadas siguientes son convergentes o divergentes.

(*a*) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$ (*c*) $\sum (-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}$ (*e*) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

(*b*) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\ln n}$ (*d*) $\sum (-1)^{n-1}\frac{\ln n}{3n+2}$ (*f*) $\sum (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[n]{3}}$

Sol. (*a*), (*b*), (*d*), (*e*) convergente.

14. Determinar si las series siguientes son condicional o absolutamente convergentes.

(*a*) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$ (*c*) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^2}$ (*e*) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ (*g*) $\sum (-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$

(*b*) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$ (*d*) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+2}$ (*f*) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{(n!)^3}$ (*h*) $\sum (-1)^{n-1}\frac{n^2}{n^4+2}$

Sol. (*a*), (*c*), (*d*), (*f*), (*h*) absolutamente convergente.

Capítulo 50

Algebra de las series

OPERACIONES CON SERIES. Sea

$$\Sigma s_n = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n + \cdots \qquad (1)$$

una serie y Σt_n la serie obtenida a partir de la anterior agrupando sus términos mediante paréntesis (asociación de términos). Por ejemplo,

$$\Sigma t_n = (s_1 + s_2) + (s_3 + s_4 + s_5) + (s_6 + s_7) + (s_8 + s_9 + s_{10} + s_{11}) + \cdots$$

I. La suma de una serie convergente no varía al agrupar sus términos mediante paréntesis (propiedad asociativa).

II. El carácter de una serie divergente de términos positivos no se modifica al agrupar sus términos mediante paréntesis (propiedad asociativa). Sin embargo, la serie obtenida al agrupar los términos en una serie divergente cuyos elementos sean arbitrariamente positivos y negativos puede ser o no divergente. (Ver Problema 1-2.)

Sea Σu_n una serie obtenida a partir de (*1*) por reordenación de sus términos. Por ejemplo,

$$\Sigma u_n = s_1 + s_3 + s_2 + s_4 + s_6 + s_5 + \cdots$$

III. Toda serie obtenida por reordenación de los términos de una absolutamente convergente converge absolutamente hacia la misma suma.

IV. Ordenando convenientemente los términos de una serie condicionalmente convergente se puede obtener, o bien una serie divergente, o una serie convergente cuya suma sea un número prefijado. (Ver Problema 3.)

ADICION, SUSTRACCION Y MULTIPLICACION. Dadas las series Σs_n y Σt_n, las *series suma* Σu_n *diferencia* Σv_n y *producto* Σw_n vienen dadas por

$$\begin{aligned} \Sigma u_n &= \Sigma(s_n + t_n) \\ \Sigma v_n &= \Sigma(s_n - t_n) \\ \Sigma w_n &= s_1t_1 + (s_1t_2 + s_2t_1) + (s_1t_3 + s_2t_2 + s_3t_1) + \cdots \end{aligned}$$

V. Si Σs_n converge hacia S y Σt_n converge hacia T, $\Sigma(s_n + t_n)$ converge hacia $S + T$ y $\Sigma(s_n - t_n)$ converge hacia $S - T$. Si Σs_n y Σt_n son absolutamente convergentes, también lo son $\Sigma(s_n \pm t_n)$.

VI. Si Σs_n y Σt_n son convergentes, su serie producto Σw_n puede ser o no convergente. Si Σs_n y Σt_n son convergentes y por lo menos una de ellas es absolutamente convergente, la serie Σw_n converge hacia ST. Si Σs_n y Σt_n son absolutamente convergentes, también lo es Σw_n. (Ver Problemas 4-5.)

CALCULOS CON SERIES. La suma de una serie convergente se puede obtener fácilmente siempre que la enésima suma parcial se pueda expresar en función de n como ocurre, por ejemplo, con una serie geométrica convergente. Cualquier suma parcial de una serie convergente es un valor aproxi-

mado de la suma de la serie. Si se va a utilizar como valor de S su aproximado S_n es necesario conocer un límite o cota de error de la diferencia $|S_n - S|$.

Si la suma de una serie convergente Σs_n es S, tendremos

$$S = S_n + R_n$$

en donde R_n se denomina «resto de la serie» y representa el error que se comete al quedarnos con la suma parcial enésima s_n en lugar de con la verdadera suma S. En los problemas siguientes se da una cota de este error en la forma $R_n < a$ para las series de términos positivos, y en la forma $|R_n| \leq a$ para las series de términos arbitrariamente positivos y negativos.

Para una serie alternada convergente $s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \cdots$,

$$R_{2m} = s_{2m+1} - s_{2m+2} + s_{2m+3} - s_{2m+4} + \cdots < s_{2m+1}$$

y $$R_{2m+1} = - s_{2m+2} + s_{2m+3} - s_{2m+4} + s_{2m+5} - \cdots > - s_{2m+2}$$

ver Problema 1, Capítulo 49. Por tanto,

VII. En una serie alternada convergente, $|R_n| < s_{n+1}$; además, R_n es positivo cuando n es par y negativo cuando n es impar. (Ver Problema 6.)

VIII. En la serie geométrica convergente Σar^{n-1},

$$|R_n| = \left|\frac{ar^n}{1-r}\right|$$

IX. Si la serie de términos positivos Σs_n converge por el Criterio de la Integral, se tiene

$$R_n < \int_n^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{para } n > \xi \qquad \text{(Ver Problemas 7-9.)}$$

X. Si Σc_n es una serie de términos positivos convergente y para las series Σs_n se verifica que $s_n \leq c_n$ para todo valor de $n > n_1$, se tiene

$$R_n \leq \sum_{n+1}^{+\infty} c_j \quad \text{para } n > n_1 \qquad \text{(Ver Problemas 10-12.)}$$

Problemas resueltos

1. Dada la serie $\Sigma s_n = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n + \cdots$ de términos positivos, a partir de ella se obtiene la serie $\Sigma t_n = (s_1 + s_2) + s_3 + (s_4 + s_5) + s_6 + \cdots$, agrupando mediante paréntesis los términos de la primera siguiendo el criterio 2, 1, 2, 1, 2, 1, ... Las sumas parciales de Σt_n son $T_1 = S_2$, $T_2 = S_3$, $T_3 = S_5$, $T_4 = S_6 \cdots$. Si Σs_n converge hacia S, también convergerá hacia este valor Σt_n, ya que $\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$. Si Σs_n es divergente, la sucesión $\{S_n\}$ no estará acotada y tampoco lo está $\{T_n\}$; por tanto, Σt_n es divergente.

2. La serie $\Sigma (-1)^{n-1}\left(\frac{2n+1}{n}\right)$ es divergente.(¿Por qué?) Cuando la agrupamos de la forma

$$\left(3 - \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{7}{3} - \frac{9}{4}\right) + \left(\frac{11}{5} - \frac{13}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{4m-1}{2m-1} - \frac{4m+1}{2m}\right) + \cdots$$

la serie es convergente, ya que el término general $\left(\frac{4m-1}{2m-1} - \frac{4m+1}{2m}\right) = \frac{1}{4m^2 - 2m} < \frac{1}{m^2}$.

3. La serie (*a*) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \cdots$ es convergente, ya que se puede agrupar de la forma $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) + \cdots$ que conduce a la serie convergente $\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \cdots = A$.

Cuando (*a*) se agrupa según la norma $+ - - + - - \cdots$, tenemos $\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) + \cdots$ o sea $\frac{1}{4} + \frac{1}{24} + \frac{1}{60} + \cdots = \frac{1}{2}A$.

4. Demostrar que $\frac{3+1}{3\cdot 1} + \frac{3^2+2^3}{3^2\cdot 2^3} + \frac{3^3+3^3}{3^3\cdot 3^3} + \cdots + \frac{3^n+n^3}{3^n\cdot n^3} + \cdots$ es convergente.

Como $\frac{3^n+n^3}{3^n\cdot n^3} = \frac{1}{n^3} + \frac{1}{3^n}$, la serie dada es igual a la suma de las series $\sum \frac{1}{n^3}$ y $\sum \frac{1}{3^n}$. Como éstas son convergentes, según el teorema V, la serie dada es convergente.

5. Demostrar que la serie $\frac{3^n+n}{n\cdot 3^n}$ es divergente.

Supongamos que $\sum \frac{3^n+n}{n\cdot 3^n} = \sum\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3^n}\right)$ es convergente. Luego, como $\sum \frac{1}{3^n}$ es convergente (ver teorema V) también lo será $\sum \frac{1}{n}$. Como esto es falso, la serie dada es divergente.

6. Hallar el error cometido cuando $\Sigma s_n = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots$ se aproxima por sus 10 primeros términos.
(*b*) ¿Cuántos términos se deben de tomar para hallar el valor de la serie con un error menor que 0,05?

(*a*) Esta es una serie alternada convergente. El error $R_{10} < s_{11} = 1/11^2 = 0{,}0083$.

(*b*) Como $|R_n| < s_{n+1}$, haciendo $s_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} = 0{,}05$, tendremos $(n+1)^2 = 20$ y $n = 3{,}5$. Por consiguiente, hay que tomar cuatro términos.

7. Demostrar que $R_n < \int_n^{+\infty} f(x)\,dx$. Ver el teorema IX.

En la figura del Problema 1, Capítulo 48, supongamos que la aproximación del área limitada por la curva por medio de la de rectángulos menores, se extiende a la derecha de $x = n$. Tendremos

$$R_n = s_{n+1} + s_{n+2} + s_{n+3} + \cdots < \int_n^{+\infty} f(x)\,dx$$

8. Hallar el error cometido cuando $\sum \frac{1}{4n^2}$ se aproxima por sus 10 primeros términos.

Aplicando el criterio de la integral, la serie es convergente (Problema 3, Capítulo 48). Por consiguiente,

$$R_{10} < \frac{1}{4}\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4}\lim_{u\to+\infty}\int_{10}^{u} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4}\lim_{u\to+\infty}\left(-\frac{1}{u} + \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{40} = 0{,}025$$

9. Calcular el número de términos que hay que tomar para calcular $\sum \frac{1}{n^5+1}$ con un error menor que 0,00001.

Esta serie es convergente por comparación con la $\sum \frac{1}{n^5}$ la cual, a su vez, es convergente por el criterio de la integral.

Por tanto $R_n < \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^5} = \frac{1}{4n^4}$. Tomando $\frac{1}{4n^4} = 0{,}00001$, será $n^4 = 25.000$ y $n = 12{,}6$. Así pues, hay que tomar 13 términos.

10. Calcular el error cometido cuando $\sum \frac{1}{n!}$ se aproxima por sus 12 primeros términos.

Según vimos, esta serie es convergente (Problema 8, Capítulo 48) por comparación con la serie geométrica $\sum \frac{1}{2^{n-1}}$.

Por tanto, el error R_{12} en la serie dada es menor que el error R'_{12} en la serie geométrica, es decir, $R_{12} < R'_{12} = \frac{(\frac{1}{2})^{12}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{11}} = 0{,}0005$.

Podemos hacerlo mejor. Para $n > 6$, $\frac{1}{n!} < \frac{1}{4^{n-1}}$; luego, $R_{12} < \frac{(\frac{1}{4})^{12}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3\cdot 4^{11}} = 0{,}00000008$.

11. Hallar el error cometido cuando $\Sigma s_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^2 + \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^3 + \frac{1}{4}(\frac{2}{3})^4 + \cdots$ se aproxima por sus 10 primeros términos.

Aplicando el criterio del cociente, la serie es convergente, ya que $\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{2}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)$ y $r = \lim_{n\to+\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{2}{3}$.

Como $\frac{s_{n+1}}{s_n} < \frac{2}{3}$, para todo valor de n, tendremos que la serie dada es término a término menor que o igual a la serie geométrica $\Sigma\, s_1 r^{n-1}$. Luego $R_{10} < \left(\frac{2}{3}\right)^{11} + \left(\frac{2}{3}\right)^{12} + \left(\frac{2}{3}\right)^{13} + \cdots = \frac{(2/3)^{11}}{1-2/3} = \frac{2^{11}}{3^{10}} = 0{,}04$.

Se puede obtener mejor aproximación observando que después del décimo término la serie dada es término a término menor que la $\sum s_{11}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \sum \frac{1}{11}\left(\frac{2}{3}\right)^{11}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2^{11}}{11\cdot 3^{10}} = 0{,}004.$

12. Hallar el error cometido cuando $\sum s_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots$ se aproxima por sus 10 primeros términos.

Aplicando el criterio del cociente, la serie es convergente, ya que $\frac{s_{n-1}}{s_n} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)$ y $r = \frac{1}{3}$. Como $\frac{s_{n+1}}{s_n} \geq \frac{1}{3}$, para todo valor de n, no podemos utilizar la serie geométrica $\Sigma(1/3)^n$ como serie de comparación. Ahora bien, $\left\{\frac{s_{n+1}}{s_n}\right\}$ es una sucesión creciente y $\frac{s_{12}}{s_{11}} = \frac{4}{11}$; luego a partir del décimo término la serie dada es término a término menor que o igual a la serie geométrica $\sum s_{11}\left(\frac{4}{11}\right)^{n-1} = \frac{11}{3^{11}}\left(\frac{4}{11}\right)^{n-1}$. Luego $R_{10} < \sum \frac{11}{3^{11}}\left(\frac{4}{11}\right)^{n-1} = \frac{121}{7\cdot 3^{11}} = 0{,}00009758$ $< 0{,}0001$.

Problemas propuestos

13. Ordenar los términos de $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ para obtener una serie convergente cuya suma sea (*a*) 1, (*b*) -2.
Ind. (*a*) Se pueden tomar los n_1 primeros términos positivos hasta que su suma sea mayor que 1; a continuación, los n_2 primeros términos negativos hasta que su suma resulte inferior a 1, y así sucesivamente.

14. ¿Se puede obtener una serie convergente sumando dos divergentes? Poner un ejemplo.

15. (*a*) Hallar el error cometido cuando la serie $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ se aproxima por sus 50 primeros términos.
(*b*) Hallar el número de términos que hay que tomar para que el error sea menor que 0,000005.
Sol. (*a*) 0,01, (*b*) 100.000

16. (*a*) Hallar el error cometido cuando $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$ se aproxima por sus 8 primeros términos.
(*b*) Hallar el número de términos que hay que tomar para que el error sea menor que 0,00005.
Sol. (*a*) 0,0002, (*b*) 11

17. (*a*) Hallar el error que se comete cuando la serie geométrica $\sum \frac{3}{2^n}$ se aproxima por sus 6 primeros términos.
(*b*) Hallar el número de términos que hay que tomar para que el error sea menor que 0,00005. *Sol.* (*a*) 0,05, (*b*) 16

18. Demostrar que si la serie de términos positivos Σs_n es convergente por comparación con la serie geométrica Σr^n, $0 < r < 1$, se verifica $R_n < \frac{r^{n+1}}{1-r}$.

19. Hallar el error que se comete cuando:
(*a*) $\sum \frac{1}{3^n+1}\left(< \sum \frac{1}{3^n}\right)$ se aproxima por sus 6 primeros términos.
(*b*) $\sum \frac{1}{3+4^n}\left(< \sum \frac{1}{4^n}\right)$ se aproxima por sus 6 primeros términos.
Sol. (*a*) 0,0007, (*b*) 0,00009

20. Las series (*a*) $\sum \frac{n+1}{n\cdot 3^n}$ y (*b*) $\sum \frac{n}{(n+1)3^n}$ son convergentes según el criterio del cociente. Hallar el error que se comete cuando ambas se aproximan por sus 8 primeros términos. *Sol.* (*a*) 0,00009, (*b*) 0,00007

21. En una serie p convergente, demostrar que $R_n < \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}$. *Ind.* Ver Problema 9.

22. Las series (*a*) $\sum \frac{1}{n^3-2}$ y (*b*) $\sum \frac{n-1}{n^5}$ son convergentes por comparación con una serie p apropiada. Hallar el error que se comete cuando ambas se aproximan por sus 6 primeros términos y determinar el número de términos que hay que tomar para que el error sea menor que 0,005. *Sol.* (*a*) 0,014; 10 términos (*b*) 0,002; 5 términos.

Capítulo 51

Serie de potencias

UNA SERIE de la forma

$$\sum c_i x^i = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i x^i = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \qquad (1)$$

en la que los coeficientes son constantes, recibe el nombre de *serie de potencias de x*. Análogamente una serie de la forma

$$\sum c_i (x-a)^i = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i (x-a)^i = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \qquad (2)$$

se denomina *serie de potencias de* $(x - a)$.

Para cada valor de x, las series (*1*) y (*2*) se transforman en series numéricas convergentes o divergentes (ver Capítulos 48 y 49).

CAMPO DE CONVERGENCIA. Es el conjunto de los valores de x para los cuales una serie de potencias es convergente. Evidentemente, (*1*) es convergente para $x = 0$, y (*2*) lo es para $x = a$. Cuando existan otros valores de x para los cuales las series (*1*) ó (*2*) sean convergentes, éstas lo serán, o bien para todos los valores de x, o bien para todos los valores de x pertenecientes a un intervalo finito (abierto, cerrado o semiabierto) cuyo punto medio es $x = 0$ para (*1*) y $x = a$ para (*2*).

El campo de convergencia se determina por medio del criterio del cociente de la convergencia absoluta, junto con otros criterios de los Capítulos 48 y 49 aplicados a los extremos.

(Ver Problemas 1-9.)

CONVERGENCIA Y CONVERGENCIA UNIFORME. Los teoremas que figuran a continuación se refieren a las series del tipo (*1*) que son igualmente válidos para las del tipo (*2*), una vez efectuadas en éstas ciertas transformaciones.

Consideramos la serie de potencias (*1*) y representemos por

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j x^j = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$$

la suma parcial m-sima, y sea

$$R_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} c_k x^k = c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} + c_{n+2} x^{n+2} + \cdots$$

el *resto de la serie*. En estas condiciones,

$$\sum c_i x^i = S_n(x) + R_n(x) \qquad (3)$$

Si para $x = x_0$, $\Sigma c_i x^i$ converge hacia $S(x_0)$, un número finito, tendremos $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x_0) = S(x_0)$. Como $|S(x_0) - S_n(x_0)| = |R_n(x_0)|$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |S(x_0) - S_n(x_0)| = \lim\limits_{n\to+\infty} |R_n(x_0)| = 0$.

Así, pues, $\Sigma c_i x^i$ es convergente para $x = x_0$ si, dado un número positivo ϵ tan pequeño como queramos, existe un entero positivo m tal, que para todo $n > m$ se verifica: $|R_n(x_0)| < \epsilon$.

Obsérvese que m depende no solo de ϵ (ver Problema 12, Capítulo 47) sino también del valor x_0 de x. (Ver Problema 10.)

En el Problema 11 se demuestra que:

I. Si $\Sigma c_i x^i$ es convergente para $x = x_1$ y si $|x_2| < |x_1|$, la serie es absolutamente convergente para $x = x_2$.

Supongamos ahora que (*1*) es absolutamente convergente, esto es $\Sigma|c_i x^i|$ es convergente para todos los valores de x de manera que $|x| < P$. Eligiendo un valor de x, $x = p$ ó $x = -p$, siendo $|x| = p < P$, como (*1*) es convergente para $|x| = p$, se deduce que, dado un $\epsilon > 0$ tan pequeño como queramos, existirá un entero positivo m tal, que para todo $n > m$ se verifica $|R_n(p)| = \sum_{k=n}^{+\infty} |c_k p^k| < \epsilon$. Haciendo variar a x dentro del intervalo $|x| \leq p$, cualquier término de $|R_n(x)| = \sum_{k=n}^{+\infty} |c_k x^k|$ tiene su valor máximo para $|x| = p$; por tanto, $|R_n(x)|$ alcanza su valor máximo en el intervalo $|x| \leq p$ para $|x| = p$.

Por consiguiente, con estos ϵ y m se verifica que $|R_n(x)| < \epsilon$ para *todos* los valores de x que cumplan la desigualdad $|x| \leq p$, es decir, m depende de ϵ y de p pero no del valor x_0 de x perteneciente al $|x| \leq p$, como ocurre en la convergencia ordinaria. En estas condiciones, (*1*) es *uniformemente convergente* en el intervalo $|x| \leq p$. En resumen, hemos demostrado que:

II. Si $\Sigma c_i x^i$ es absolutamente convergente para $|x| < P$ lo sigue siendo para $|x| \leq p < P$.

Por ejemplo, la serie $\Sigma(-1)^i x^i$ es convergente para $|x| < 1$. Según el Teorema I, es absolutamente convergente para $|x| \leq 0{,}99$, y según el Teorema II, es uniformemente convergente para $|x| \leq 0{,}9$.

III. Una serie de potencias *representa* una función continua en el campo de convergencia de la serie. (Véase la demostración en el Problema 12.)

IV. Si $\Sigma c_i x^i$ converge hacia la función $f(x)$ en un intervalo I, y si a y b pertenecen a dicho intervalo, se verifica

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{+\infty} \int_a^b c_i x^i\,dx = \int_a^b c_0\,dx + \int_a^b c_1 x\,dx + \int_a^b c_2 x^2\,dx + \cdots + \int_a^b c_{n-1}\,x^{n-1}\,dx + \cdots$$

(Véase la demostración en el Problema 13.)

V. Si $\Sigma c_i x^i$ converge hacia $f(x)$ en un intervalo I, la integral definida $\sum_{i=0}^{+\infty} \int_0^x c_i x^i\,dx$ converge hacia $g(x) = \int_0^x f(x)\,dx$ para todo valor de x *perteneciente* a dicho intervalo.

VI. Si $\Sigma c_i x^i$ converge hacia la función $f(x)$ en el intervalo I, la derivada de la serie $\sum \frac{d}{dx}(c_i x^i)$ converge hacia $f'(x)$ para todo valor de x *perteneciente* a dicho intervalo.

VII. La representación de una función $f(x)$ en serie de potencias de x es única.

Problemas resueltos

1. Determinar el campo de convergencia de $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}1/n\,x^n + \cdots$.

Aplicando el criterio del cociente,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x^n}\right| = |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = |x|$$

La serie es absolutamente convergente para $|x| < 1$, y divergente para $|x| > 1$. En los extremos $x = 1$ y $x = -1$, hemos de ver el carácter de la serie por separado.

Para $x = 1$, la serie es $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ que es condicionalmente convergente.

Para $x = -1$, la serie es $-(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots)$ que es divergente.

Por tanto, la serie dada es convergente en el intervalo $-1 < x \leq 1$.

2. Determinar el campo de convergencia de $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = |x| \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

La serie dada es convergente para todos los valores de x.

3. Determinar el campo de convergencia de $\frac{x-2}{1} + \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{3} + \cdots + \frac{(x-2)^n}{n} + \cdots$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(x-2)^n}\right| = |x-2| \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = |x-2|$$

La serie es absolutamente convergente para $|x-2| < 1$ ó $1 < x < 3$ y divergente para $|x-2| > 1$ o para $x < 1$ y $x > 3$.

Para $x = 1$, la serie es $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots$ y para $x = 3$, es la $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$. La primera es convergente y la segunda divergente. Por tanto, la serie dada es convergente en el intervalo $1 \le x < 3$, y divergente fuera de él.

4. Determinar el campo de convergencia de $1 + \frac{x-3}{1^2} + \frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{(x-3)^3}{3^2} + \cdots + \frac{(x-3)^{n-1}}{(n-1)^2} + \cdots$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-3)^n}{n^2}\cdot\frac{(n-1)^2}{(x-3)^{n-1}}\right| = |x-3| \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = |x-3|$$

La serie es absolutamente convergente para $|x-3| < 1$ o sea $2 < x < 4$, y divergente para $|x-3| > 1$ o para $x < 2$ y $x > 4$.

Para $x = 2$, la serie es $1 - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \cdots$; y para $x = 4$, es la $1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots$ Como ambas son absolutamente convergentes, la serie dada es absolutamente convergente en el intervalo $2 \le x \le 4$, y divergente fuera de él. Obsérvese que el primer término de la serie no corresponde al valor que toma el término general para $n = 0$.

5. Determinar el campo de convergencia de $\frac{x+1}{\sqrt{1}} + \frac{(x+1)^2}{\sqrt{2}} + \frac{(x+1)^3}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}} + \cdots$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{(x+1)^n}\right| = |x+1| \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = |x+1|$$

La serie es absolutamente convergente para $|x+1| < 1$ o sea $-2 < x < 0$ y divergente para $x < -2$ y $x > 0$.

Para $x = -2$, la serie es $-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \cdots$ y para $x = 0$, es la $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$.

La primera es convergente y la segunda divergente (¿por qué?). Por tanto, la serie dada es convergente en el intervalo $-2 \le x < 0$ y divergente fuera de él.

6. Determinar el campo de convergencia de $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$.

Este es la serie binómica. Para valores enteros y positivos de m es un desarrollo finito; para los demás valores de m es una serie.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^n}{n!}\cdot\frac{(n-1)!}{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+2)x^{n-1}}\right|$$
$$= |x| \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{m-n+1}{n}\right| = |x|$$

La serie es absolutamente convergente para $|x| < 1$ y divergente para $|x| > 1$.

En los extremos, $x = \pm 1$, la serie es convergente si $m \ge 0$, y divergente si $m \le -1$. Cuando $-1 < m < 0$, la serie es convergente para $x = 1$ y divergente para $x = -1$. Para demostrar estas conclusiones, se debe recurrir a teoremas que no se han incluido en el Capítulo 48.

7. Determinar el campo de convergencia de $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}}\right| = x^2 \lim_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{2n+1} = x^2$$

La serie es absolutamente convergente en el intervalo $x^2 < 1$ o sea $-1 < x < 1$.

Para $x = -1$, la serie es $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \cdots$ y para $x = 1$, es la $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$. Ambas series son convergentes; por tanto, la serie dada es convergente para $-1 \le x \le 1$ y divergente fuera de él.

8. Determinar el campo de convergencia de $(x-1)+2!\,(x-1)^2+3!\,(x-1)^3+\cdots+n!\,(x-1)^n+\cdots$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)!\,(x-1)^{n+1}}{n!\,(x-1)^n}\right| = |x-1|\lim_{n\to+\infty}(n+1) = \infty$$

La serie es convergente solo para $x = 1$.

9. Determinar el campo de convergencia de $\frac{1}{2x}+\frac{2}{4x^2}+\frac{3}{8x^3}+\cdots+\frac{n}{2^nx^n}+\cdots$. Esta es una serie en potencias de $1/x$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{n+1}{2^{n+1}x^{n+1}}\cdot\frac{2^nx^n}{n}\right| = \frac{1}{2|x|}\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2|x|}$$

La serie es absolutamente convergente para $\frac{1}{2|x|}<1$ o sea $|x|>\frac{1}{2}$.

Para $x=\frac{1}{2}$, la serie es $1+2+3+4+\cdots$, y para $x=-\frac{1}{2}$, es $-1+2-3+4-\cdots$. Ambas series son divergentes. Por tanto, la serie dada es convergente en los intervalos $x<-\frac{1}{2}$ y $x>\frac{1}{2}$, y divergente en el intervalo $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$.

10. La serie $1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots$ es convergente para $|x|<1$. Dado $\epsilon = 0{,}000001$, calcular m cuando (*a*) $x=\frac{1}{2}$ y (*b*) $x=\frac{1}{4}$ de tal forma que $|R_n(x)|<\epsilon$ para $n>m$.

$$R_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^kx^k \quad \text{por tanto,}$$

$$|R_n(\tfrac{1}{2})| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k(\tfrac{1}{2})^k\right| = \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2})^{n-1} \qquad \text{y} \qquad |R_n(\tfrac{1}{4})| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k(\tfrac{1}{4})^k\right| = \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{4})^{n-1}$$

(*a*) Tenemos que encontrar m de forma que para $n>m$ se verifique $\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^{n-1}<0{,}000001$ o sea $1/2^{n-1}<0{,}000003$. Como $1/2^{18}=0{,}000004$ y $1/2^{19}=0{,}000002$, $m=19$.

(*b*) Tenemos que encontrar m de forma que para $n>m$ se verifique $\frac{1}{5}(\frac{1}{4})^{n-1}<0{,}000001$ o sea $1/4^{n-1}<0{,}000005$. Resulta $m=9$.

11. Demostrar que si una serie Σc_ix^i es convergente para $x=x_1$ y que si $|x_2|<|x_1|$, la serie es absolutamente convergente para $x=x_2$.

Como $\Sigma c_ix_1^i$ es convergente, $\lim_{n\to+\infty} c_nx_1^n=0$, ver Teorema XV, Capítulo 47, y $\{|c_ix_1^i|\}$ estará acotada por ser convergente, luego $0<|c_nx_1^n|<K$ para todos los valores de n. Supongamos $|x_2/x_1|=r$, $0<r<1$; tendremos

$$|c_nx_2^n| = |c_nx_1^n|\cdot|x_2^n/x_1^n| = |c_nx_1^n|\cdot|x_2/x_1|^n < Kr^n$$

y $\Sigma\,|c_nx_2^n|$, por ser término a término menor que la serie geométrica convergente ΣKr^n, es convergente. Así pues, la serie $\Sigma c_ix_2^i$ es absolutamente convergente.

12. Demostrar que una serie de potencias representa una función continua $f(x)$ en el campo de convergencia de la serie.

Sea $f(x)=\Sigma c_ix^i=S_n(x)+R_n(x)$. Para un valor cualquiera, $x=x_0$, del campo de convergencia de Σc_ix^i existe, según el teorema I, un intervalo I de x_0 en el cual la serie es uniformemente convergente. Para probar que $f(x)$ es continua en $x=x_0$, es necesario demostrar que $\lim_{\Delta x\to 0}|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)|=0$ con $x_0+\Delta x$ perteneciente a I; es decir, tendremos que demostrar que, dado un ϵ tan pequeño como queramos, existe un Δx de manera que $x_0+\Delta x$ pertenece a I y $|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)|<\epsilon$.

Ahora bien, si Δx es tal que $x_0+\Delta x$ pertenece a I,

(i) $$\begin{aligned}|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)| &= |S_n(x_0+\Delta x)+R_n(x_0+\Delta x)-S_n(x_0)-R_n(x_0)|\\ &\le |S_n(x_0+\Delta x)-S_n(x_0)| + |R_n(x_0+x)| + |R_n(x_0)|\end{aligned}$$

Dado un ϵ, como $x_0+\Delta x$ pertenece al campo de convergencia de la serie, se podrá encontrar en $m>0$ tal que, siempre que $n>m$, se verifique $|R_n(x_0+\Delta x)|<\epsilon/3$ y $|R_n(x_0)|<\epsilon/3$. Por otra parte, como $S_n(x)$ es un polinomio, se podrá tomar Δx, todo lo pequeño que se desee para que $|S_n(x_0+\Delta x)-S_n(x_0)|<\epsilon/3$. Elegido de esta forma Δx, $|R_n(x_0+\Delta x)|$ se mantendrá menor que $\epsilon/3$, con lo cual la serie es uniformemente convergente en I, ya que el valor de $|R_n(x_0)|$ no se altera. Así pues, por (i)

$$|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)| < \epsilon/3+\epsilon/3+\epsilon/3 = \epsilon$$

Por consiguiente, $f(x)$ es continua para todos los valores de x pertenecientes al campo de convergencia de la serie.

13. Demostrar que si Σc_ix^i converge hacia la función $f(x)$ en un intervalo dado, y que si $x=a$ y $x=b$ son dos valores pertenecientes a él, se verifica

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b c_0\,dx + \int_a^b c_1x\,dx + \int_a^b c_2x^2\,dx + \cdots + \int_a^b c_{n-1}x^{n-1}\,dx + \cdots$$

Supongamos $b > a$ y pongamos $f(x) = \Sigma c_i x^i = S_n(x) + R_n(x)$. Tendremos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b S_n(x)\,dx + \int_a^b R_n(x)\,dx$$

y

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b S_n(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b R_n(x)\,dx\right|$$

Como $\Sigma c_i x^i$ es convergente en un intervalo, $|x| < P$ y la serie será uniformemente convergente en $|x| \leq p < P$ que contiene a $x = a$ y $x = b$. Así pues, dado un $\epsilon > 0$ tan pequeño como queramos, se puede tomar n lo suficientemente grande para que $|R_n(x)| < \dfrac{\epsilon}{b-a}$ para todos los valores de $|x| \leq p$. Por tanto,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b S_n(x)\,dx\right| < \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\,dx = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b S_n(x)\,dx\right| = 0, \quad \text{y} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \Sigma \int_a^b c_i x^i\,dx$$

como queremos demostrar.

Problemas propuestos

14. Determinar el campo de convergencia de las siguientes series:

(*a*) $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots$

(*b*) $\dfrac{x}{1\cdot 2} + \dfrac{x^2}{2\cdot 3} + \dfrac{x^3}{3\cdot 4} + \dfrac{x^4}{4\cdot 5} + \cdots$

(*c*) $x - \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^3}{3^3} - \dfrac{x^4}{4^4} + \cdots$

(*d*) $\dfrac{x}{5} - \dfrac{x^2}{2\cdot 5^2} + \dfrac{x^3}{3\cdot 5^3} - \dfrac{x^4}{4\cdot 5^4} + \cdots$

(*e*) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{x^2}{2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{x^4}{3\cdot 4\cdot 5} + \dfrac{x^6}{4\cdot 5\cdot 6} + \cdots$

(*f*) $\dfrac{x^2}{(\ln 2)^2} + \dfrac{x^3}{(\ln 3)^3} + \dfrac{x^4}{(\ln 4)^4} + \dfrac{x^5}{(\ln 5)^5} + \cdots$

(*g*) La serie obtenida derivando (*a*) término a término.
(*h*) La serie obtenida derivando (*b*) término a término.

(*i*) $x + \dfrac{x^2}{1+2^3} + \dfrac{x^3}{1+3^3} + \dfrac{x^4}{1+4^3} + \cdots$

(*j*) La serie obtenida derivando (*i*) término a término.
(*k*) La serie obtenida derivando (*j*) término a término.
(*l*) La serie obtenida integrando (*a*) término a término.
(*m*) La serie obtenida integrando (*c*) término a término.

(*n*) $(x-2) + \dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(x-2)^3}{9} + \dfrac{(x-2)^4}{16} + \cdots$

(*o*) $\dfrac{x-3}{1\cdot 3} + \dfrac{(x-3)^2}{2\cdot 3^2} + \dfrac{(x-3)^3}{3\cdot 3^3} + \dfrac{(x-3)^4}{4\cdot 3^4} + \cdots$

(*p*) $1 - \dfrac{3x-2}{5} + \dfrac{(3x-2)^2}{5^2} - \dfrac{(3x-2)^3}{5^3} + \cdots$

(*q*) La serie obtenida derivando (*n*) término a término.
(*r*) La serie obtenida integrando (*n*) término a término.

(*s*) $1 + \dfrac{x}{1-x} + \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^3 + \cdots$

(*t*) $1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{4}{x^3} + \cdots$

(*u*) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{x^2+6x+7}{2^2} + \dfrac{(x^2+6x+7)^2}{2^3} + \dfrac{(x^2+6x+7)^3}{2^4} + \cdots$

Sol.
(*a*) $-1 < x < 1$
(*b*) $-1 \leq x \leq 1$
(*c*) todos los valores de x
(*d*) $-5 < x \leq 5$
(*e*) $-1 \leq x \leq 1$
(*f*) todos los valores de x
(*g*) $-1 < x < 1$
(*h*) $-1 \leq x < 1$
(*i*) $-1 \leq x \leq 1$
(*j*) $-1 \leq x \leq 1$
(*k*) $-1 \leq x < 1$
(*l*) $-1 < x < 1$
(*m*) todos los valores de x
(*n*) $1 \leq x \leq 3$
(*o*) $0 \leq x < 6$
(*p*) $-1 < x < 7/3$
(*q*) $1 \leq x < 3$
(*r*) $1 \leq x \leq 3$
(*s*) $x < \frac{1}{2}$
(*t*) $x < -1$, $x > 1$
(*u*) $-5 < x < -3$, $-3 < x < -1$

15. Demostrar que una serie de potencias se puede derivar término a término dentro de su campo de convergencia.

Ind. $f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i x^i$ y $\sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{d}{dx}(c_i x^i) = \sum_{j=1}^{+\infty} j c_j x^{j-1}$ es convergente para $|x| < \lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$. Aplicando los teoremas I, II y V demostrar $\displaystyle\int_0^x f'(x)\,dx = f(x)$.

16. Demostrar que la representación de una función $f(x)$ en potencias de x es única.

Ind. Sea $f(x) = \Sigma s_n x^n$ y $f(x) = \Sigma t_n x^n$ en $|x| < a \neq 0$. Hacer $x = 0$ en $\Sigma(s_n - t_n)x^n = 0$, $\dfrac{d}{dx}\Sigma(s_n - t_n)x^n = 0$, $\dfrac{d^2}{dx^2}\Sigma(s_n - t_n)x^n = 0$, $\cdots$ y obtener $s_j = t_j$, $j = 0, 1, 2, 3, \cdots$

Capítulo 52

Desarrollo en serie de potencias

UNA FUNCION se puede desarrollar en serie de potencias de x siguiendo varios procedimientos, por ejemplo, prolongando indefinidamente la división

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + \cdots \qquad (1)$$

(Obsérvese que, por ejemplo, para $x = 5$ la expresión anterior conduce a un resultado absurdo. En el Problema 1 se demuestra que la serie (*1*) solo equivale a $\frac{1}{1-x}$ en el intervalo $|x| < 1$, es decir,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + \cdots, \quad -1 < x < 1$$

En los Problemas 2-3 se indican otros métodos para desarrollar una función en serie de potencias.

METODO GENERAL para obtener el desarrollo de una función en serie de potencias de x y de $(x - a)$. Para ello es necesario que tanto la función como *todas* sus derivadas estén definidas para $x = 0$ o $x = a$. Por ejemplo, las funciones $1/x$, $\ln x$, y $\cot x$, no admiten un desarrollo en serie de potencias de x.

Serie de Maclaurin. Si una función se puede representar por medio de una serie de potencias de x, ésta es necesariamente de la forma, *serie de Maclaurin,*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots \qquad (2)$$

Serie de Taylor. Si una función se puede representar por medio de una serie de potencias de $(x - a)$, ésta es necesariamente de la forma, *serie de Taylor,*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \cdots \qquad (3)$$

(Ver Problema 4.)

En el próximo capítulo trataremos del intervalo en el que una función $f(x)$ se puede representar por una serie de Maclaurin o una de Taylor. En las funciones consideradas en este libro, el intervalo en el que se pueden representar mediante un desarrollo en serie coincide con su campo de convergencia. (Ver Problemas 5-11.)

Otra expresión muy empleada en la serie de Taylor es

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \cdots \qquad (4)$$

que se obtiene de (*3*) sin más que sustituir x por $a + h$.

Problemas resueltos

1. La serie de potencias $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + \cdots$ es una serie geométrica con $a = 1$ y $r = x$. Para $|r| = |x| < 1$, la serie converge hacia $\dfrac{a}{1-r} = \dfrac{1}{1-x}$; para $|r| = |x| \geq 1$, la serie es divergente.

2. Derivando repetidamente la serie del Problema 1, obtener otras series de potencias

(i) $$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

(ii) $$2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + \cdots + n(n+1)x^{n-1} + \cdots$$

Integrando repetidamente entre los límites 0 y x la serie del Problema 1, obtenemos

(iii) $$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{1}{n}x^n + \cdots$$

(iv) $$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}x^{n+1} + \cdots$$

3. Determinar la serie de potencias $y = \Sigma c_n x^n$ que satisfaga las condiciones:
(i) $y = 2$ para $x = 0$, **(ii)** $y' = 1$ para $x = 0$, y **(iii)** $y'' + 2y' = 0$.

Consideremos

(*a*) $$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots$$

(*b*) $$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \cdots$$

(*c*) $$y'' = 2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 20c_5x^3 + \cdots$$

De (*a*) con $x = 0$, $y = 2$ obtenemos $c_0 = 2$; de (*b*) con $x = 0$, $y' = 1$ obtenemos $c_1 = 1$. Como $y'' = -2y'$, tendremos

$$2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 20c_5x^3 + \cdots = -2c_1 - 4c_2x - 6c_3x^2 - 8c_4x^3 - \cdots$$

de donde se deduce que $c_2 = -c_1 = -1$, $c_3 = -\frac{2}{3}c_2 = \frac{2}{3}$, $c_4 = -\frac{1}{2}c_3 = -\frac{1}{3}$, $\cdots$. Por tanto, $y = 2 + x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \cdots$ es la serie pedida.

4. Suponiendo que **(i)** $f(x)$ y todas sus derivadas están definidas para $x = a$ y que **(ii)** se puede representar mediante una serie de potencias de $(x - a)$, demostrar que esta serie es

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \cdots$$

Sea la serie

(*a*) $$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_{n-1}(x-a)^{n-1} + \cdots$$

Derivando sucesivamente, tenemos

(*b*) $$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1} + \cdots$$

(*c*) $$f''(x) = 2c_2 + 6c_3(x-a) + 12c_4(x-a)^2 + 20c_5(x-a)^3 + \cdots + (n+1)nc_{n+1}(x-a)^{n-1} + \cdots$$

(*d*) $$f'''(x) = 6c_3 + 24c_4(x-a) + 60c_5(x-a)^2 + \cdots + (n+2)(n+1)nc_{n+2}(x-a)^{n-1} + \cdots$$

. . . .

. . . .

Haciendo $x = a$ en (*a*), (*b*), (*c*), $\cdots$ se deduce

$$c_0 = f(a),\ c_1 = f'(a),\ c_2 = \frac{1}{2!}f''(a), \ldots, c_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a), \cdots$$

Efectuando estas sustituciones en (*a*), obtenemos el desarrollo en serie de Taylor.

En los Problemas 5-10, obtener el desarrollo de la función en potencia de x o de $(x - a)$, según se indica, en las hipótesis de este Capítulo y determinar asimismo el campo de convergencia de las series.

5. e^{-2x}; en potencias de x.

$$\begin{array}{llll} f(x) = e^{-2x} & & f(0) = 1 \\ f'(x) = -2e^{-2x} & & f'(0) = -2 \\ f''(x) = 2^2e^{-2x} & & f''(0) = 2^2 \\ f'''(x) = -2^3e^{-2x} & & f'''(0) = -2^3 \\ \dots\dots & & \dots\dots \\ \dots\dots & & \dots\dots \end{array}$$

De donde $$e^{-2x} = 1 - 2x + \frac{2^2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n\frac{2^n}{n!}x^n + \cdots$$

Como $$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^nx^n}\right| = |x| \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n+1} = 0$$

la serie es convergente para todos los valores de x.

6. sen x; en potencias de x.

$$\begin{array}{llll} f(x) = \operatorname{sen} x & & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\operatorname{sen} x & & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & & f'''(0) = -1 \\ \dots\dots & & \dots\dots \\ \dots\dots & & \dots\dots \end{array}$$

Los valores de las derivadas para $x = 0$ forman ciclos de 0, 1, 0, —1; por tanto,

$$\operatorname{sen} x = 0 + 1x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

Como $$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{x^{2n-1}}\right| = x^2 \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n(2n+1)} = 0$$

la serie es convergente para todos los valores de x.

7. $\ln(1 + x)$; en potencias de x.

$$\begin{array}{llll} f(x) = \ln(1+x) & & f(0) = 0 \\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x} & & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} & & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \dfrac{1\cdot 2}{(1+x)^3} & & f'''(0) = 2! \\ f^{iv}(x) = -\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4} & & f^{iv}(0) = -3! \\ \dots\dots & & \dots\dots \\ \dots\dots & & \dots\dots \end{array}$$

Por tanto $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + 2!\,\frac{x^3}{3!} - 3!\,\frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots$$

Según el Problema 1, Capítulo 51, la serie es convergente en el intervalo $-1 < x \leq 1$.

8. arc tag x; en potencias de x.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \text{arc tag } x & f(0) &= 0\\
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots & f'(0) &= 1\\
f''(x) &= -2x + 4x^3 - 6x^5 + \cdots & f''(0) &= 0\\
f'''(x) &= -2 + 12x^2 - 30x^4 + \cdots & f'''(0) &= -2!\\
f^{iv}(x) &= 24x - 120x^3 + \cdots & f^{iv}(0) &= 0\\
f^{v}(x) &= 24 - 360x^2 + \cdots & f^{v}(0) &= 4!\\
f^{vi}(x) &= -720x + \cdots & f^{vi}(0) &= 0\\
f^{vii}(x) &= -720 + \cdots & f^{vii}(0) &= -6!
\end{aligned}$$

$$\text{arc tag } x = x - \frac{2!}{3!}x^3 + \frac{4!}{5!}x^5 - \frac{6!}{7!}x^7 + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$$

Según el Problema 7, Capítulo 51, el campo de convergencia es $-1 \leq x \leq 1$.

9. $e^{x/2}$; en potencias de $x - 2$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{x/2} & f(2) &= e\\
f'(x) &= \tfrac{1}{2}e^{x/2} & f'(2) &= \tfrac{1}{2}e\\
f''(x) &= \tfrac{1}{4}e^{x/2} & f''(x) &= \tfrac{1}{4}e
\end{aligned}$$

$$e^{x/2} = e\left\{1 + \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}\,\frac{(x-2)^2}{2!} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{(x-2)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots\right\}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-2)^n}{2^n n!}\cdot\frac{2^{n-1}(n-1)!}{(x-2)^{n-1}}\right| = \frac{1}{2}|x-2|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$$

La serie es convergente para todos los valores de x.

10. ln x; en potencias de $x - 2$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln x & f(2) &= \ln 2\\
f'(x) &= x^{-1} & f'(2) &= \tfrac{1}{2}\\
f''(x) &= -x^{-2} & f''(2) &= -\tfrac{1}{4}\\
f'''(x) &= 2x^{-3} & f'''(2) &= \tfrac{1}{4}\\
f^{iv}(x) &= -6x^{-4} & f^{iv}(2) &= -\tfrac{3}{8}\\
&\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

$$\ln x = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{4}\,\frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{1}{4}\,\frac{(x-2)^3}{3!} - \frac{3}{8}\,\frac{(x-2)^4}{4!} + \cdots$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 - \frac{1}{64}(x-2)^4 + \cdots$$

Como $$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}\cdot\frac{2^n n}{(x-2)^n}\right| = \frac{1}{2}|x-2|\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}|x-2|$$

la serie es convergente para $|x-2| < 2$ o sea $0 < x < 4$.

Para $x = 0$, la serie es ln 2 — (serie armónica) que es divergente; para $x = 4$, la serie es $\ln 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ que es convergente. Por tanto, la serie es convergente en el intervalo $0 < x \leq 4$.

11. Desarrollar en serie de Maclaurin la función $\sqrt{1 + \text{sen } x} = \text{sen } \frac{1}{2}x + \cos \frac{1}{2}x$.

Sustituyendo x por $\frac{1}{2}x$ en el desarrollo de sen x (Problema 6) obtenemos

$$\text{sen } \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{2^3\cdot 3!} + \frac{x^5}{2^5\cdot 5!} - \frac{x^7}{2^7\cdot 5!} + \cdots$$

Derivando este desarrollo, obtenemos

$$\cos\frac{1}{2}x = 2\left\{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2^3 \cdot 2!} + \frac{x^4}{2^5 \cdot 4!} - \frac{x^6}{2^7 \cdot 6!} + \cdots\right\}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 4!} - \frac{x^6}{2^6 \cdot 6!} + \cdots$$

Por tanto,

$$\sqrt{1 + \operatorname{sen} x} = \operatorname{sen}\frac{1}{2}x + \cos\frac{1}{2}x = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 4!} + \frac{x^5}{2^5 \cdot 5!} - \cdots,$$

todos los valores de x.

12. Obtener el desarrollo de Maclaurin de $e^{\cos x} = e \cdot e^{(\cos x - 1)}$.

Aplicando $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots$ y $u = \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$, llegamos a

$$e^{\cos x} = e\left\{1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^4}{(2!)^2} - \frac{2x^6}{2!4!} + \cdots\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{3!}\left(-\frac{x^6}{(2!)^3} + \cdots\right) + \cdots\right\}$$

$$= e\left\{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{31}{720}x^6 + \cdots\right\}$$

13. En el supuesto de que todas las operaciones necesarias sean válidas, demostrar que (*a*) $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, (*b*) $e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$, (*c*) $\operatorname{sen} x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$, (*d*) $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$, siendo $i = \sqrt{-1}$.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

(*a*) $e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \cdots = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \cdots$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

(*b*) $e^{-ix} = \cos(-x) + i \operatorname{sen}(-x) = \cos x - i \operatorname{sen} x$.

(*c*) $e^{ix} - e^{-ix} = 2i \operatorname{sen} x$; luego, $\operatorname{sen} x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$.

(*d*) $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$; luego, $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$.

Problemas propuestos

14. Demostrar que (*a*) Las series (i) y (ii) del Problema 2 son convergentes para $|x| < 1$; (*b*) (iii) convergentes para $-1 \leq x < 1$; (*c*) (iv) convergentes para $-1 \leq x \leq 1$.

15. Demostrar que (*a*) La serie obtenida sumando las (i) y (ii) del Problema 2 son convergentes para $|x| < 1$; (*b*) la obtenida sumando las (iii) y (iv) son convergentes para $-1 \leq x < 1$.

16. Determinar la serie de potencias $y = \Sigma c_n x^n$ que satisface las condiciones (i) $y = 2$ para $x = 0$, (ii) $y' = 0$ para $x = 0$, y (iii) $y'' - y = 0$. *Sol.* $y = 2 + x^2 + \frac{x^4}{12} + \cdots + \frac{2x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$.

17. Determinar la serie de potencias $y = \Sigma c_n x^n$ que satisface las condiciones (i) $y = 1$ para $x = 0$, (ii) $y' = 1$ para $x = 0$, y (iii) $y'' + y = 0$. *Sol.* $y = 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$

18. Obtener los desarrollos en serie de Maclaurin:

(*a*) $\cos^2 x = 1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$, para todos los valores de x

(*b*) $\sec x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \cdots, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

(*c*) $\operatorname{tag} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

(*d*) $\operatorname{arc\,sen} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots, \quad -1 < x < 1$

(*e*) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$, para todos los valores de x

19. Obtener los desarrollos en serie de Taylor:

(*a*) $e^x = e^a\left[1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots\right]$, para todos los valores de x

(*b*) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a + (x-a)\cos a - \frac{(x-a)^2}{2!}\operatorname{sen} a - \frac{(x-a)^3}{3!}\cos a + \cdots$, para todos los valores de x

(*c*) $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 - (x - \frac{1}{4}\pi) - \frac{(x-\frac{1}{4}\pi)^2}{2!} + \frac{(x-\frac{1}{4}\pi)^3}{3!} + \cdots\right]$, para todos los valores de x

20. Obtener el desarrollo en serie de $\cos x$ derivando el correspondiente a $\operatorname{sen} x$ (Problema 6). Identificar la solución del Problema 17 con la función $y = \operatorname{sen} x + \cos x$.

21. Obtener el desarrollo en serie de e^{-x}, sustituyendo x por $\frac{1}{2}x$ en el correspondiente a e^{-2x} (Problema 5). Sustituir, luego x por $-x$ para obtener el desarrollo de e^x e identificar la solución del Problema 16 con la función $y = e^x + e^{-x}$.

22. Obtener el desarrollo en serie de Maclaurin de $\operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2 = x^2 - \frac{2x^4}{3!} + \frac{32x^6}{3!\,5!} - \frac{96x^8}{3!\,7!} + \cdots$, para todos los valores de x.

23. Demostrar que $\int_0^x e^{-y^2}\,dy = x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots$, para todos los valores de x.

24. Obtener por división el desarrollo en serie de $\frac{1}{1+x^2}$; con lo cual

$$\operatorname{arc\,tag} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots$$

y comparar con el Problema 8.

25. Aplicando el binomio de Newton obtener $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \cdots$; con lo cual

$$\operatorname{arc\,sen} x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots$$

26. Obtener por multiplicación de los correspondientes desarrollos en serie:

(*a*) $e^x \operatorname{sen} x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} + \cdots$ (*b*) $e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{30} + \cdots$

27. Obtener $\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - x^2/2! + x^4/4! - \cdots} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$. Quitar denominadores en la última igualdad e identificar los coeficientes de igual potencia de x para obtener el desarrollo de $\sec x$.

Capítulo 53

Fórmulas de Maclaurin y Taylor con restos

FORMULA DE MACLAURIN. Si $f(x)$ y sus n primeras derivadas son continuas en un intervalo que contiene al punto $x = 0$, existen dos números, x_0 y x_0^* comprendidos entre 0 y x, de manera que

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x)$$

siendo

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n, \qquad \text{(Resto de Lagrange)}$$

o bien

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0^*)}{(n-1)!}(x - x_0^*)^{n-1}x, \qquad \text{(Resto de Cauchy)}$$

FORMULA DE TAYLOR. Si $f(x)$ y sus n primeras derivadas son continuas en un intervalo que contiene al punto $x = a$, existen dos números, x_0 y x_0^*, comprendidos entre a y x, de manera que

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n(x)$$

siendo

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-a)^n, \qquad \text{(Resto de Lagrange)}$$

o bien

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0^*)}{(n-1)!}(x - x_0^*)^{n-1}(x-a), \qquad \text{(Resto de Cauchy)}$$

La fórmula de Maclaurin es un caso particular ($a = 0$) de la fórmula de Taylor. La fórmula dê Taylor, con el resto de Lagrange, no es más que una variante del teorema del valor medio generalizado (ver Capítulo 21). En el Problema 10 se deduce la fórmula con el resto de Cauchy.

Los desarrollos en serie de Maclaurin y Taylor de las funciones $f(x)$ obtenidos en el Capítulo 52 representan a dichas funciones únicamente para aquellos valores de x que hagan

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$$

PRINCIPALES DESARROLLOS EN SERIE. A continuación se exponen los desarrollos en serie, junto con los intervalos en los que son válidos, de las funciones más empleadas en el análisis matemático.

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^3}{3!} + \cdots + \frac{(ax)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots \qquad \text{Para todos los valores de } x.$$

$$\operatorname{sen} ax = ax - \frac{(ax)^3}{3!} + \frac{(ax)^5}{5!} - \frac{(ax)^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(ax)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \qquad \text{Para todos los valores de } x.$$

$$\cos ax = 1 - \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^4}{4!} - \frac{(ax)^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(ax)^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots \qquad \text{Para todos los valores de } x.$$

$$\ln(a+x) = \ln a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{na^n} + \cdots \qquad -a < x \leq a.$$

$$\operatorname{arc\,sen} x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)x^{2n-1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2)(2n-1)} + \cdots \qquad -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{arc tag } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \qquad -1 \leq x \leq 1$$

$$\ln x = \ln a + \frac{1}{a}(x-a) - \frac{1}{2a^2}(x-a)^2 + \frac{1}{3a^3}(x-a)^3 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(n-1)a^{n-1}}(x-a)^{n-1} + \cdots \qquad 0 < x \leq 2a$$

$$e^x = e^a\left\{1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots\right\} \qquad \text{Para todos los valores de } x.$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a + (x-a)\cos a - \frac{(x-a)^2}{2!}\operatorname{sen} a - \frac{(x-a)^3}{3!}\cos a + \cdots \qquad \text{Para todos los valores de } x.$$

$$\cos x = \cos a - (x-a)\operatorname{sen} a - \frac{(x-a)^2}{2!}\cos a + \frac{(x-a)^3}{3!}\operatorname{sen} a + \cdots \qquad \text{Para todos los valores de } x.$$

Problemas resueltos

1. Determinar el intervalo en el que es válido el desarrollo de e^x en serie de Maclaurin.

$f^{(n)}(x) = e^x$; el resto de Lagrange es $|R_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n}f^{(n)}(x_0)\right| = \frac{|x^n|}{n!}e^{x_0}$, siendo x_0 un valor comprendido entre 0 y x.

El factor $\frac{x^n}{n!}$ es el término general de $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ que, sabemos, es convergente para todos los valores de x. Por tanto $\lim_{n\to+\infty} \frac{|x^n|}{n!} = 0$. Como el factor e^{x_0} es finito e independiente del valor x, $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ (número finito). En consecuencia, el desarrollo de e^x es válido para todos los valores de x.

2. Determinar el intervalo en el que es válido el desarrollo en serie de Maclaurin de la función sen x.

Sin tener en cuenta el signo $f^{(n)}(x) = \operatorname{sen} x$ o $\cos x$, y $|R_n(x)| = \frac{|x^n|}{n!}|\operatorname{sen} x_0|$, o bien, $\frac{|x^n|}{n!}\cos x_0|$, siendo x_0 un valor comprendido entre 0 y x.

Ahora bien, $\frac{x^n}{n!} \to 0$ cuando $n \to +\infty$. (Problema 1) y $|\operatorname{sen} x_0|$ y $|\cos x_0|$ no pueden ser mayores que 1, con lo que $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$. Por tanto, el desarrollo es válido para todos los valores de x.

3. Determinar el intervalo en el cual cos x se puede representar por el desarrollo de Taylor en serie de potencias de $(x - a)$.

Aplicando el resto de Lagrange, $|R_n(x)| = \frac{|(x-a)^n|}{n!}|\operatorname{sen} x_0|$, o bien, $\frac{|(x-a)^n|}{n!}|\cos x_0|$, en donde x_0 está comprendido entre a y x.

Como $\frac{|(x-a^n)|}{n!} \to 0$ para $n \to +\infty$, y además $|\operatorname{sen} x_0|$ y $|\cos x_0|$ son inferiores a la unidad, $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$, con lo que la serie representa cos x para todos los valores de x.

4. Determinar el intervalo en el que es válido el desarrollo en serie de Maclaurin de la función ln$(1 + x)$.

En este caso $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$: siendo x_0 y x_0^* valores comprendidos entre 0 y x.

(*a*) el resto de Lagrange es

$$R_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}\cdot\frac{(n-1)!}{(1+x_0)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{1+x_0}\right)^n \qquad \text{y}$$

(*b*) el resto de Cauchy es

$$R_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{(x-x_0^*)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{(n-1)!}{(1+x_0^*)^n}x = (-1)^{n-1}\frac{x(x-x_0^*)^{n-1}}{(1+x_0^*)^n}$$

Cuando $0 < x_0 < x \leq 1$, $0 < x < 1 + x_0$ y $\frac{x}{1+x_0} < 1$; aplicando (*a*),

$$|R_n(x)| = \frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+x_0}\right)^n < \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$$

Cuando $-1 < x < x_0^* < 0$, tendremos $0 < 1 + x < 1 + x_0^*$ y $\frac{1}{1+x_0^*} < \frac{1}{1+x}$. Aplicando (*b*),

$$|R_n(x)| = \frac{|x - x_0^*|^{n-1}}{(1+x_0^*)^n}|x| = \left|\frac{x_0^* - x}{1 + x_0^*}\right|^{n-1} \cdot \frac{|x|}{1 + x_0^*} = \left(\frac{x_0^* + |x|}{1 + x_0^*}\right)^{n-1} \cdot \frac{|x|}{1 + x_0^*} < \left(\frac{x_0^* + |x|}{1 + x_0^*}\right)^{n-1} \cdot \frac{|x|}{1+x}$$

Ahora bien, como $1 > |x|$, $x_0^* < x_0^*|x|$, $x_0^* + |x| < |x| + x_0^*|x|$ y $\dfrac{x_0^* + |x|}{1 + x_0^*} < |x|$. Tendremos,

$$|R_n(x)| < \frac{|x|^n}{1+x} \quad \text{y} \quad \lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$$

Por tanto, el desarrollo en serie de Maclaurin de $\ln(1 + x)$ es válido en el intervalo $-1 < x \leq 1$.

5. En el desarrollo en serie de Maclaurin de e^x, demostrar

$$|R_n(x)| < \frac{|x^n|}{n!} \text{ para } x < 0 \quad \text{y} \quad R_n(x) < \frac{x^n e^x}{n!} \text{ para } x > 0$$

Del Problema 1, $R_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}e^{x_0}$, siendo x_0 un valor comprendido entre 0 y x. Para $x < 0$, $e^{x_0} < 1$; luego $|R_n(x)| < \dfrac{|x^n|}{n!}$. Para $x > 0, e^{x_0} < e^x$; luego, $R_n(x) < \dfrac{x^n e^x}{n!}$.

6. En el desarrollo en serie de Maclaurin de $\ln(1 + x)$, demostrar

$$R_n(x) < \frac{x^n}{n} \text{ para } 0 < x \leq 1 \quad \text{y} \quad |R_n(x)| < \frac{|x^n|}{n(1+x)^n} \text{ para } -1 < x < 0$$

del Problema 4(*a*), $|R_n(x)| = \dfrac{1}{n}\left|\dfrac{x}{1+x_0}\right|^n$, siendo x_0 un valor comprendido entre 0 y x. Para $0 < x_0 < x \leq 1$, $\dfrac{1}{1+x_0} < 1$; luego, $|R_n(x)| < \dfrac{x^n}{n}$ Para $-1 < x < x_0 < 0$, $1+x_0 > 1+x$ y. $\dfrac{1}{1+x_0} < \dfrac{1}{1+x}$; luego, $|R_n(x)| < \dfrac{|x^n|}{n(1+x)^n}$.

Problemas propuestos

7. Determinar el intervalo en el que es válido el desarrollo en serie de Maclaurin de la función $\cos x$
Sol. Para todos los valores de x.

8. Determinar los intervalos en los cuales (*a*) e^x y (*b*) $\operatorname{sen} x$ se pueden representar mediante una serie de Taylor en potencias de $(x - a)$. *Sol.* Para todos los valores de x.

9. Demostrar que $\ln x$ se puede desarrollar en serie de Taylor de potencias de $(x - a)$ en el intervalo $0 < x \leq 2a$.

Ind. $|R_n(x)| = \left|\dfrac{(x-a)(x-x_0^*)^{n-1}}{(x_0^*)^n}\right|$. Para $0 < x < a$ y para $a < x \leq 2a$, $\left|\dfrac{x - x_0^*}{x_0^*}\right| < 1$.

10. Supongamos que T viene definido por

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + T(b-a)$$

y sea

$$F(x) = -f(b) + f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + T(b-x)$$

Razonando como se hizo en el Problema 15 del Capítulo 21, obtener la fórmula de Taylor con el resto del Cauchy.

11. (*a*) Haciendo $x_0^* = a + \theta(x - a)$, siendo $0 < \theta < 1$, en la fórmula de Taylor con el resto de Cauchy, demostrar

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}[a + \theta(x-a)]}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}(x-a)^n$$

(*b*) Demostrar que $R_n(x) = \dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{(n-1)!}(1 - \theta)^{n-1}x^n$ en la fórmula de Maclaurin.

12. Demostrar que $\dfrac{1}{1-x}$ se puede representar por su serie de Maclaurin en el intervalo $-1 \leq x < 1$.

Ind. Del Problema 11 (*b*), $R_n(x) = \dfrac{n(1-\theta)^{n-1}x^n}{(1-\theta x)^{n+1}}$, $0 < \theta < 1$. Para $|x| < 1, \dfrac{1-\theta}{1-\theta x} < 1$ y $1 - \theta x > 1 - |x|$.

13. (*a*) Demostrar que $xe^x = \sum_{i=1}^{+\infty} \dfrac{n}{n!}x^n$, para todos los valores de x, y $\sum_{i=1}^{+\infty} \dfrac{n}{n!} = e$; ídem, $(x^2 + x)e^x = \sum_{i=1}^{+\infty} \dfrac{n^2}{n!}x^n$ y $\sum_{i=1}^{+\infty} \dfrac{n^2}{n!} = 2e$. (*b*) Obtener $\sum_{i=1}^{+\infty} \dfrac{n^3}{n!} = 5e$ y $\sum_{i=1}^{+\infty} \dfrac{n^4}{n!} = 15e$.

Capítulo 54

Cálculos con series de potencias

LAS SERIES DE POTENCIAS se emplean, con frecuencia, en la realización de tablas de logaritmos de funciones trigonométricas y en diversos cálculos como los que vamos a considerar.

Cuando se toma como valor de una función la suma de los n primeros términos de su desarrollo en serie de potencias para un valor dado de la variable es necesario conocer el error que se comete al efectuar dicha aproximación. Para ello se aplican los teoremas siguientes:

1. Si el desarrollo de la función $f(x)$ está formado por una serie alternada y $x = \xi$ es un valor de su campo de convergencia, el error que se comete al tomar como valor de $f(\xi)$ la suma de los n primeros términos de la serie es menor que el valor numérico del primer término despreciado.

2. Si el desarrollo de la función $f(x)$ está formado por una serie de Taylor y $x = \xi$ es un valor de su campo de convergencia, el error que se comete al tomar como valor de $f(\xi)$ la suma de los n primeros términos de la serie es menor que $\dfrac{M}{n!}|x - a|^n$, siendo M igual o mayor que el máximo valor de $|f^{(n)}(x)|$ en el intervalo desde a hasta ξ.

Para una serie de Maclaurin, $a = 0$.

Problemas resueltos

1. Hallar el valor de $1/e$ con cinco cifras decimales:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots$$

$$\begin{aligned} e^{-1} &= 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots \\ &= 1 - 1 + 0{,}500000 - 0{,}166667 + 0{,}041667 - 0{,}008333 + 0{,}001389 \\ &\qquad - 0{,}000198 + 0{,}000025 - 0{,}000003 + \cdots \\ &= 0{,}36788 \end{aligned}$$

2. Hallar el valor de sen 62° con cinco cifras decimales.

La serie de Taylor en potencias de $(x - a)$ es

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a + (x-a)\cos a - \frac{(x-a)^2}{2!}\operatorname{sen} a - \frac{(x-a)^3}{3!}\cos a + \cdots$$

Tomamos $a = 60°$, ya que es próxima a 62° y sus funciones trigonométricas son conocidas. Tendremos

$$x - a = 62° - 60° = 2° = \pi/90 = 0{,}034907$$

y

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 62° &= \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}(0{,}034907) - \tfrac{1}{4}\sqrt{3}(0{,}034907)^2 - \tfrac{1}{12}(0{,}034907)^3 + \cdots \\ &= 0{,}866025 + 0{,}017454 - 0{,}000528 - 0{,}000004 + \cdots = 0{,}88295 \end{aligned}$$

3. Hallar el valor de ln 0,97 con siete cifras decimales.

$$\ln(a - x) = \ln a - \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} - \cdots - \frac{x^n}{na^n} - \cdots$$

Tomamos $a = 1$ y $x = 0{,}03$; por tanto

$$\ln 0{,}97 = -0{,}03 - \tfrac{1}{2}(0{,}03)^2 - \tfrac{1}{3}(0{,}03)^3 - \tfrac{1}{4}(0{,}03)^4 - \tfrac{1}{5}(0{,}03)^5 - \cdots = -0{,}0304592$$

4. Determinar el número de términos del desarrollo en serie de $\ln(1+x)$ que hay que tomar para que el error cometido al hallar el ln 1,02 sea menor que 0,00000005.

$$\ln 1{,}02 = 0{,}02 - \frac{(0{,}02)^2}{2} + \frac{(0{,}02)^3}{3} - \frac{(0{,}02)^4}{4} + \cdots$$

Como se trata de una serie alternada, el error cometido al despreciar todos los términos posteriores al que ocupa el lugar n es menor que el valor numérico del primero que se desprecia. Por tanto, todo consiste en buscar qué término del desarrollo tiene un valor numérico menor que 0,00000005. Se hace por tanteos.

$$\frac{(0{,}02)^3}{3} = 0{,}0000027 \quad \text{y} \quad \frac{(0{,}02)^4}{4} = 0{,}00000004$$

Por consiguiente, habrá que tomar 3 términos para obtener la precisión requerida.

5. Determinar el valor de x para el cual $\operatorname{sen} x$ se puede sustituir por x con un error menor que 0,0005.

$\operatorname{sen} x = x - x^3/3! + \cdots$ es una serie alternada. El error que se comete al tomar solamente los dos primeros términos es menor que $|x^3|/3!$ Para que $|x^3|/3! = 0{,}0005$ debe ser $|x^3| = 0{,}003$ ó sea $|x| = 0{,}1442$; es decir, $|x| < 8°15'$.

6. Hallar entre qué valores debe estar comprendido un ángulo para que el valor de $\cos x$, calculado con los tres primeros términos del desarrollo en serie de Taylor en potencias de $(x - \pi/3)$, venga dado con un error menor que 0,00005.

Como $f'''(x) = \operatorname{sen} x$, $|R_3| = \dfrac{|\operatorname{sen} x_0|}{3!}|x - \pi/3|^3$, siendo x_0 un valor comprendido entre $\pi/3$ y x.

Como $|\operatorname{sen} x_0| \leq 1$, $|R_3| \leq \frac{1}{6}|x - \pi/3|^3 = 0{,}00005$.

Por tanto $|x - \pi/3| \leq \sqrt[3]{0{,}0003} = 0{,}0669 = 3°50'$. Por tanto, x debe estar comprendido entre $56°10'$ y $63°50'$.

7. La Fig. 54-1 representa un arco de circunferencia terrestre de 160 kilómetros de longitud. Hallar la flecha o separación máxima entre la cuerda y el arco.

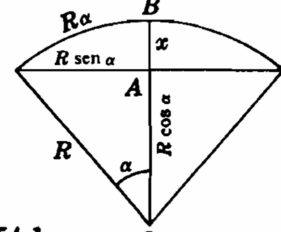


Fig. 54-1

Sea x la flecha pedida. Tendremos, $x = OB - OA = R - R\cos\alpha$, siendo R el radio de la Tierra. Como el ángulo α es pequeño, aproximadamente, $\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}x^2$, y

$$x = R\{1 - (1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2)\} = \tfrac{1}{2}R\alpha^2 = (R\alpha)^2/2R = (80)^2/2R$$

Tomando $R = 6\,400$ kilómetros, $x = \frac{1}{2}$ kilómetro.

8. Deducir la fórmula aproximada $\operatorname{sen}(\frac{1}{4}\pi + x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+x)$ y aplicarla para calcular sen 43°.

Tomando los dos primeros términos del desarrollo de Taylor, tenemos

$$\operatorname{sen}(\tfrac{1}{4}\pi + x) = \operatorname{sen}\tfrac{1}{4}\pi + x\cos\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1+x)$$

$$\operatorname{sen} 43° = \operatorname{sen}[\tfrac{1}{4}\pi + (-\pi/90)] \doteq \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1 - 0{,}0349) = 0{,}6824$$

9. Resolver la ecuación $\cos x - 2x^2 = 0$.

Sustituyendo x por sus dos primeros términos $1 - \frac{1}{2}x^2$ de la serie de Maclaurin, tenemos

$$1 - \tfrac{1}{2}x^2 - 2x^2 = 0 \quad \text{ó} \quad 2 - 5x^2 = 0$$

Las raíces son $\pm\sqrt{10}/5 = \pm 0{,}632$. Las raíces obtenidas aplicando el método de Newton son $\pm 0{,}635$.

10. Hallar mediante un desarrollo en serie de potencias $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x + 2x^3/3! + \cdots}{x - x^3/3! + \cdots} = \lim_{x\to 0}\frac{2 + x^2/3 + \cdots}{1 - x^2/6 + \cdots} = 2$$

11. Desarrollar $f(x) = x^4 - 11x^3 + 43x^2 - 60x + 14$ en potencias de $(x-3)$ y calcular $\int_3^{3,2} f(x)\,dx$.

$f(3) = 5,\ f'(3) = 9,\ f''(3) = -4,\ f'''(3) = 6,\ f^{iv}(3) = 24.$ Luego,

$$f(x) = 5 + 9(x-3) - 2(x-3)^2 + (x-3)^3 + (x-3)^4$$

$$\int_3^{3,2} f(x)\,dx = 5x + \tfrac{9}{2}(x-3)^2 - \tfrac{2}{3}(x-3)^3 + \tfrac{1}{4}(x-3)^4 + \tfrac{1}{5}(x-3)^5 \Big|_3^{3,2} = 1{,}185$$

12. Hallar $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$.

La dificultad de esta integral reside en que la integral $\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ no se puede expresar por medio de funciones elementales. Sin embargo,

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots\right)dx$$

$$= x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \cdots \Big|_0^1 = 0{,}946083$$

El error cometido al tomar sólo cuatro términos es $\leq \frac{1}{9\cdot 9!} = 0{,}0000003$.

Problemas propuestos

13. Hallar con cuatro cifras decimales:
(*a*) $e^{-2} = 0{,}1353$, (*b*) sen $32° = 0{,}5299$, (*c*) cos $36° = 0{,}8090$, (*d*) tag $31° = 0{,}6009$.

14. Hallar los valores de x para los cuales
(*a*) e^x se puede sustituir por $1 + x + \frac{1}{2}x^2$ con un error menor que 0,0005
(*b*) $\cos x$ se puede sustituir por $1 - \frac{1}{2}x^2$ con un error menor que 0,0005
(*c*) $\operatorname{sen} x$ se puede sustituir por $x - x^3/6 + x^5/120$ con un error menor que 0,00005
Sol. (*a*) $|x| < 0{,}1$, (*b*) $|x| < 18°57'$, (*c*) $|x| < 47°$

15. Hallar mediante un desarrollo en serie de potencias:

(*a*) $\lim_{x\to 0} \frac{e - e^{\cos x}}{x^2} = \frac{1}{2}e$, (*b*) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^3} = \frac{1}{6}$, (*c*) $\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x} = \infty$.

16. Hallar:

(*a*) $\int_0^{\pi/2} (1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 \phi)^{-1/2}\,d\phi = 1{,}854$, (*b*) $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx = 0{,}76355$, (*c*) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4} = 0{,}4940$.

17. Hallar la longitud de la curva $y = x^3/3$ desde $x = 0$ a $x = 0{,}5$. *Sol.* 0,5031

18. Hallar el área limitada por la curva $y = \operatorname{sen} x^2$ desde $x = 0$ a $x = 1$. *Sol.* 0,3103

Capítulo 55

Integración aproximada

UN VALOR APROXIMADO de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ se obtiene aplicando las fórmulas que veremos a continuación, o bien por medio de integradores mecánicos. Los procedimientos de integración aproximada se emplean cuando la integración ordinaria sea muy complicada, cuando una integral indefinida no se pueda expresar mediante funciones elementales, o bien, cuando el integrando $f(x)$ venga definido por una tabla de valores.

En el Capítulo 34 hemos obtenido un valor aproximado de $\int_a^b f(x)\,dx$ dado por la suma $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x$. Para obtener S_n se interpretó la integral definida como un área, la cual se dividía en n franjas y se aproximaba el área de cada una de ellas a un rectángulo efectuándose, a continuación, la suma correspondiente a todos ellos. Las fórmulas que veremos seguidamente solo difieren en la manera en que se tomen los valores aproximados de las franjas.

FORMULA DE LOS TRAPECIOS. Sea el área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las ordenadas en los extremos $x = a$ y $x = b$. Dividamos dicha área en n franjas verticales de anchura $h = (b - a)/n$ (Fig. 55-1) y consideremos la franja i limitada por el arco $P_{i-1}P_i$ de $y = f(x)$. Un valor aproximado del área de esta franja es

$$\tfrac{1}{2}h\{f[a + (i-1)h] + f(a+ih)\}$$

que es el área del trapecio que resulta al sustituir el arco $P_{i-1}P_i$ por el segmento rectilíneo $P_{i-1}P_i$. Al efectuar esta sustitución en todas las franjas (el símbolo $\approx$ se debe leer «aproximadamente igual»),

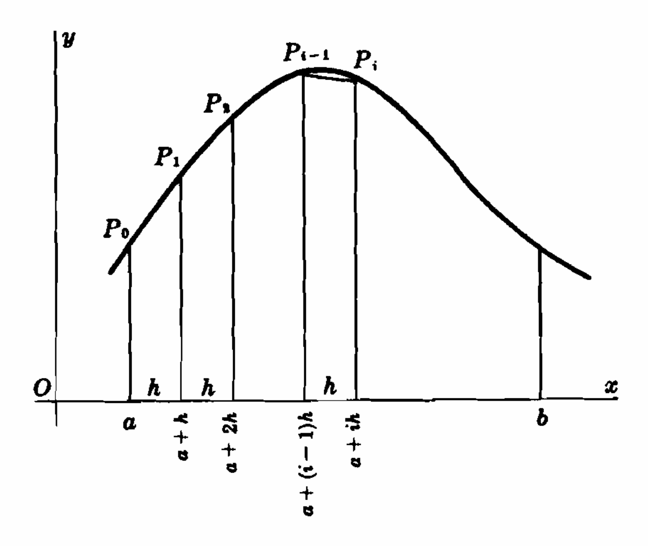


Fig. 55-1

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\{f(a) + f(a+h)\} + \frac{h}{2}\{f(a+h) + f(a+2h)\} + \cdots + \frac{h}{2}\{f[a+(n-1)h] + f(b)\}$$

o sea

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\{f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots + 2f[a+(n-1)h] + f(b)\} \qquad (1)$$

FORMULA DEL PRISMATOIDE. Dividamos el área definida por la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ en dos franjas verticales de anchura $h = \tfrac{1}{2}(b - a)$ y sustituyamos el arco $P_0P_1P_2$ de la curva $y = f(x)$ por el arco de parábola $y = Ax^2 + Bx + C$ que pasa por los puntos P_0, P_1, P_2, como se representa en la Fig. 55-2. Como se demuestra en el Problema 1, se llega, después de efectuar algunos cambios en la notación, a

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left\{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right\} \qquad (2)$$

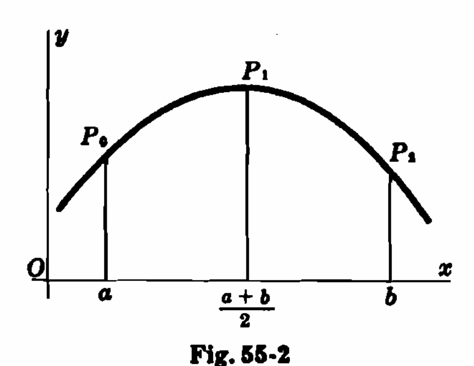


Fig. 55-2

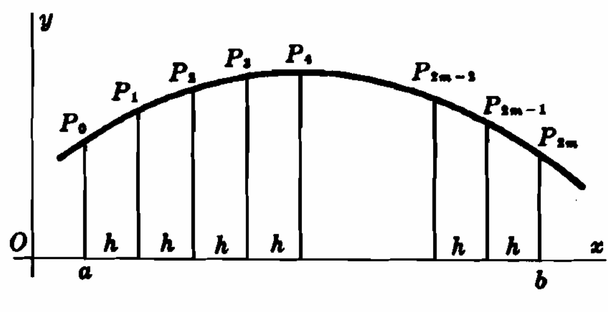


Fig. 55-3

FORMULA DE SIMPSON. Supongamos que el área que se trata de hallar la dividimos en $n = 2m$ franjas de anchura $h = (b - a)/n$, como indica la Fig. 55-3. Aplicando la fórmula del prismatoide para hallar el valor aproximado del área limitada por cada uno de los arcos $P_0P_1P_2$, $P_2P_3P_4$, ..., $P_{2m-2}\,P_{2m-1}\,P_{2m}$, tendremos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\{f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) \qquad (S)$$
$$+ \cdots + 2f[a+(2m-2)h] + 4f[a+(2m-1)h] + f(b)\}$$

INTEGRACION MEDIANTE UN DESARROLLO EN SERIE DE POTENCIAS. Este procedimiento consiste en sustituir el integrando por los n primeros términos de su desarrollo en serie de Maclaurin o de Taylor. El método se puede aplicar siempre que el integrando admita un desarrollo de aquel tipo y los límites de integración pertenezcan al campo de convergencia de la serie . (Ver Capítulo 54.)

Problemas resueltos

1. Dada la parábola $y = Ax^2 + Bx + C$, que pasa por los puntos $P_0(\xi, y_0)$, $P_1\left(\frac{\xi+\eta}{2}, y_1\right)$, y $P_2(\eta, y_2)$, como indica la Fig. 55-4, demostrar que

$$\int_\xi^\eta y\,dx = \frac{\eta-\xi}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

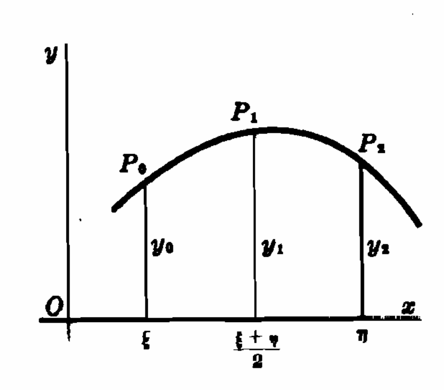


Fig. 55-4

Tendremos $\displaystyle\int_\xi^\eta y\,dx = \int_\xi^\eta (Ax^2 + Bx + C)\,dx$

$$= \frac{\eta-\xi}{3}[A(\xi^2 + \xi\eta + \eta^2) + \tfrac{3}{2}B(\xi+\eta) + 3C]$$

Como $y = Ax^2 + Bx + C$ pasa por los puntos P_0, P_1, P_2, se verificará:

$$y_0 = A\xi^2 + B\xi + C$$
$$y_1 = A\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)^2 + B\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) + C$$
$$y_2 = A\eta^2 + B\eta + C$$

y
$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2[A(\xi^2 + \xi\eta + \eta^2) + \tfrac{3}{2}B(\xi+\eta) + 3C]$$

Por tanto,
$$\int_\xi^\eta y\,dx = \frac{\eta-\xi}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

2. Calcular el valor aproximado de $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2}$ por los cuatro métodos y comprobar los resultados efectuando la integración

Fórmula de los trapecios, con $n = 5$.

Aquí, $h = \frac{\frac{1}{2} - 0}{5} = 0{,}1$. Por tanto $a = 0$, $a + h = 0{,}1$, $a + 2h = 0{,}2$, $a + 3h = 0{,}3$, $a + 4h = 0{,}4$, $b = 0{,}5$.

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{0{,}1}{2}[f(0) + 2f(0{,}1) + 2f(0{,}2) + 2f(0{,}3) + 2f(0{,}4) + f(0{,}5)]$$

$$\approx \frac{1}{20}\left(1 + \frac{2}{1{,}01} + \frac{2}{1{,}04} + \frac{2}{1{,}09} + \frac{2}{1{,}16} + \frac{1}{1{,}25}\right) = 0{,}4631$$

Fórmula del prismatoide.

Aquí, $h = \frac{\frac{1}{2} - 0}{2} = \frac{1}{4}$ y $f(a) = f(0) = 1$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{16}{17}$, $f(b) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$.

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\left(1 + \frac{64}{17} + \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{12}(1 + 3{,}76471 + 0.8) = 0{,}4637$$

Fórmula de Simpson, con $n = 4$.

Tenemos, $h = \frac{\frac{1}{2} - 0}{4} = \frac{1}{8}$. De donde $= 0$, $a + h = \frac{1}{8}$, $a + 2h = \frac{1}{4}$, $a + 3h = \frac{3}{8}$, $b = \frac{1}{2}$.

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{24}\left(1 + 4\frac{1}{1+(\frac{1}{8})^2} + 2\frac{1}{1+(\frac{1}{4})^2} + 4\frac{1}{1+(\frac{3}{8})^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2}\right)$$

$$\approx \frac{1}{24}\left(1 + \frac{256}{65} + \frac{32}{17} + \frac{256}{73} + \frac{4}{5}\right) = 0{,}4637$$

Desarrollo en serie, utilizando 7 términos.

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} \approx \int_0^{1/2} (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + x^{12})\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13}\right]_0^{1/2}$$

$$\approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^7} + \frac{1}{9\cdot 2^9} - \frac{1}{11\cdot 2^{11}} + \frac{1}{13\cdot 2^{13}}$$

$$\approx 0{,}50000 - 0{,}04167 + 0{,}00625 - 0{,}00112 + 0{,}00022 - 0{,}00004 + 0{,}00001 = 0{,}4636$$

Integración. $$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tag } x\Big]_0^{1/2} = \text{arc tag } \tfrac{1}{2} = 0{,}4636$$

3. Hallar el área limitada por $y = e^{-x^2}$, el eje x, y las rectas $x = 0$ y $x = 1$ aplicando (*a*) la fórmula de Simpson con $n = 4$ y (*b*) el desarrollo en serie.

(*a*) Tenemos, $h = \frac{1}{4}$; $a = 0$, $a + h = \frac{1}{4}$, $a + 2h = \frac{1}{2}$, $a + 3h = \frac{3}{4}$, $b = 1$.

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \frac{\frac{1}{4}}{3}(1 + 4e^{-1/16} + 2e^{-1/4} + 4e^{-9/16} + e^{-1})$$

$$\approx \tfrac{1}{12}\{1 + 4(0{,}9399) + 2(0{,}7788) + 4(0{,}5701) + 0{,}3679\} = 0{,}747 \text{ unidades de superficie}$$

(*b*) $$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{12}}{6!}\right)dx$$

$$\approx \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} - \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} + \frac{x^{13}}{13\cdot 6!}\right]_0^1$$

$$\approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} - \frac{1}{11\cdot 5!} + \frac{1}{13\cdot 6!}$$

$$\approx 1 - 0{,}3333 + 0{,}1 - 0{,}0238 + 0{,}0046 - 0{,}0008 + 0{,}0001 = 0{,}747 \text{ unidades de superficie}$$

4. Un terreno está situado entre una valla rectilínea y un río. La anchura y (metros) del terreno a una distancia x de uno de los extremos de la valla viene dada por:

x	0	20	40	60	80	100	120
y	0	22	41	53	38	17	0

Aplicar la fórmula de Simpson para hallar, aproximadamente, el área del terreno.

Aquí, $h = 20$ y $\int_0^{120} f(x)\,dx \approx {}^{20}/_3(0 + 4\cdot 22 + 2\cdot 41 + 4\cdot 53 + 2\cdot 38 + 4\cdot 17 + 0)$

$\approx$ 3507 metros cuadrados.

5. Una curva viene dada por el siguiente cuadro de valores:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	0,6	0,9	1,2	1,4	1,5	1,7	1,8	2

(*a*) Hallar el valor aproximado del área limitada por la curva, el eje x y las ordenadas extremas $x = 1$ y $x = 9$, aplicando la fórmula de Simpson.

(*b*) Hallar el valor aproximado del volumen generado en la rotación del área del apartado (*a*) alrededor del eje x, aplicando la fórmula de Simpson.

(*a*) Aquí, $h = 1$ y

$$\int_1^9 y\,dx \approx \frac{1}{3}\{0 + 4(0{,}6) + 2(0{,}9) + 4(1{,}2) + 2(1{,}4) + 4(1{,}5) + 2(1{,}7) + 4(1{,}8) + 2\}$$

$$\approx 10{,}13 \text{ unidades de superficie}$$

(*b*) $$\pi\int_1^9 y^2\,dx \approx \frac{\pi}{3}\{0 + 4(0{,}6)^2 + 2(0{,}9)^2 + 4(1{,}2)^2 + 2(1{,}4)^2 + 4(1{,}5)^2 + 2(1{,}7)^2 + 4(1{,}8)^2 + 4\}$$

$$\approx 46{,}58 \text{ unidades de volumen}$$

Problemas propuestos

6. Deducir la fórmula de Simpson.

7. Calcular el valor aproximado de $\int_2^6 \frac{dx}{x}$ aplicando (*a*) la fórmula del trapecio con $n = 4$, (*b*) la fórmula del prisma, y (*c*) la fórmula de Simpson con $n = 4$. Comprobar los resultados por integración.
Sol. (*a*) 1,117, (*b*) 1,111, (*c*) 1,100; 1,099.

8. Calcular el valor aproximado de $\int_1^5 \sqrt{35 + x}\,dx$ como en el Problema 7.

Sol. (*a*) 24,654, (*b*) 24,655, (*c*) 24,655; 24,655.

9. Calcular el valor aproximado de $\int_1^3 \ln x\,dx$ aplicando (*a*) la fórmula del trapecio con $n = 5$ y (*b*) la fórmula de Simpson con $n = 8$. Comprobar por integración. *Sol.* (*a*) 1,2870, (*b*) 1,2958; 1,2958.

10. Calcular el valor aproximado de $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\,dx$ aplicando (*a*) la fórmula del trapecio con $n = 5$ y (*b*) la fórmula de Simpson con $n = 4$. *Sol.* (*a*) 1,115, (*b*) 1,111.

11. Calcular el valor aproximado de $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ por la fórmula de Simpson con $n = 6$. *Sol.* 1,852.

12. Aplicar la fórmula de Simpson para hallar (*a*) el área limitada por la curva y (*b*) el volumen generado en la rotación del área alrededor del eje x. La curva viene dada por

x	1	2	3	4	5
y	1,8	4,2	7,8	9,2	12,3

Sol. (*a*) 27,8, (*b*) 228,44π

Capítulo 56

Derivadas parciales

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. Si a cada punto (x, y) de una región del plano xy se le hace corresponder un número real z, diremos que z es una función, $z = f(x, y)$, de las variables independientes x e y. El lugar geométrico de todos los puntos (x, y, z) que satisfacen la ecuación $z = f(x, y)$ es una superficie. Análogamente se definen las funciones $w = f(x, y, z, \ldots)$ de varias variables independientes aunque, por el momento, no tengan una interpretación geométrica sencilla.

El estudio de las funciones de dos variables difiere notablemente del de las funciones de una variable. Sin embargo, el cálculo de las funciones de tres o más variables es muy similar al caso de dos variables. En este libro trataremos, fundamentalmente, de las funciones de dos variables.

Una función $f(x, y)$ tiende al límite A cuando $x \to x_0$ e $y \to y_0$, si dado un $\epsilon > 0$ tan pequeño como queramos, existe un $\delta > 0$ tal que, para todos los pares de valores (x, y) que cumplan la desigualdad

(i) $$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

se verifica: $|f(x, y) - A| < \epsilon$. La condición (i) representa un intervalo reducido del punto (x_0, y_0), es decir, todos los puntos excepto el propio (x_0, y_0), situados en un círculo de radio δ y centro (x_0, y_0).

Una función $f(x, y)$ es continua en el punto (x_0, y_0) siempre que $f(x_0, y_0)$ esté definida y, además, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

(Ver Problemas 1-2.)

DERIVADAS PARCIALES. Sea $z = f(x, y)$ una función de las variables independientes x e y. Como x e y son independientes, podremos **(i)** variar x manteniendo constante y, **(ii)** variar y manteniendo constante x, **(iii)** variar x e y simultáneamente. En los dos primeros casos, z es una función de una sola variable y se puede hallar su derivada de acuerdo con las expresiones clásicas que ya hemos visto.

Si x varía permaneciendo constante y, z es una función de x y su derivada con respecto a esta variable x,

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

se denomina *primera derivada parcial de* $z = f(x, y)$ *con respecto a* x.

Si lo que varía es y permaneciendo constante x, z es una función de y y su derivada con respecto a y

$$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

recibe el nombre de *primera derivada parcial de* $z = f(x, y)$ *con respecto a* y.

(Ver Problemas 3-8.)

Si z está definida implícitamente como función de x e y mediante la relación $F(x, y, z) = 0$, para hallar las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ no hay más que aplicar las fórmulas de la derivación implícita dadas en el Capítulo 6.

(Ver Problemas 9-12.)

Las derivadas parciales anteriores admiten una interpretación geométrica muy sencilla. Consideremos la superficie $z = f(x, y)$ de la Fig. 56-1, y sean APB y CPD las intersecciones con dicha superficie de los planos que pasando por P sean paralelos a los xOz e yOz, respectivamente. Si hacemos variar a x permaneciendo constante y, el punto P se desplazará a lo largo de la curva APB y el valor de $\frac{\partial z}{\partial x}$ en el punto P es la pendiente de la curva APB en P.

Análogamente, si hacemos variar y permaneciendo constante x, P se moverá a lo largo de la curva CPD, y el valor de $\frac{\partial z}{\partial y}$ en P es la pendiente de la curva CPD en P.

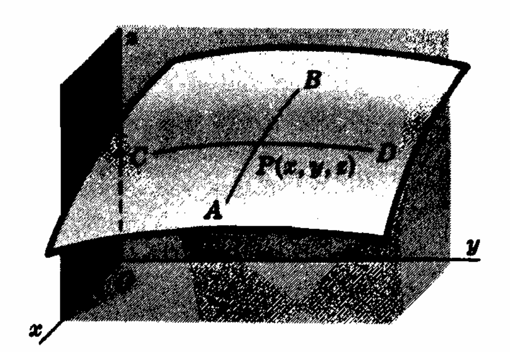


Fig. 56-1

(Ver Problema 13.)

DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR. La derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial x}$ de $z = f(x, y)$ se puede a su vez derivar parcialmente con respecto a x y a y, dando lugar a las segundas derivadas parciales $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$. Análogamente, de $\frac{\partial z}{\partial y}$ se obtienen $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$.

Si $z = f(x, y)$ y sus derivadas parciales son continuas es indiferente el orden de derivación, es decir, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$. (Ver Problemas 14-15.)

Problemas resueltos

1. Estudiar la continuidad de la función $z = x^2 + y^2$.

Para cualquier conjunto de valores finitos $(x, y) = (a, b)$, $z = a^2 + b^2$.
Cuando $x \to a$ e $y \to b$, $x^2 + y^2 \to a^2 + b^2$.
Por tanto, la función es continua para todos los valores de las variables.

2. Las funciones siguientes, son continuas en todos los puntos salvo en el origen (0,0), en el que no están definidas. ¿Cómo se puede hacer que sean también continuas en dicho punto?

(*a*) $z = \frac{\operatorname{sen}(x + y)}{x + y}$.

Supongamos que $(x, y) \to (0,0)$ a lo largo de la recta $y = mx$; tendremos $z = \frac{\operatorname{sen}(x + y)}{x + y} = \frac{\operatorname{sen}(1 + m)x}{(1 + m)x} \to 1$,

Se puede hacer que la función sea continua en todos los puntos definiéndola como sigue: $z = \frac{\operatorname{sen}(x + y)}{x + y}$, $(x,y) \neq (0, 0)$; $z = 1$, $(x, y) = (0, 0)$.

(*b*) $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Supongamos que $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de la recta $y = mx$; el valor límite de $z = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{m}{1 + m^2}$ depende de la recta que se elija. Por tanto, la función no se puede hacer continua en (0, 0).

Hallar las derivadas parciales de primer orden en los Problemas 3-7.

3. $z = 2x^2 - 3xy + 4y^2$.

Considerando y constante y derivando con respecto a x, $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y$.

Considerando x constante y derivando con respecto a y, $\frac{\partial z}{\partial y}, = -3x + 8y$.

4. $z = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x}$.

Considerando y constante y derivando con respecto a x, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{y} - \dfrac{y^2}{x^2}$.

Considerando x constante y derivando con respecto a y, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{2y}{x}$.

5. $z = \text{sen}\,(2x+3y)$. $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2\cos(2x+3y), \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3\cos(2x+3y)$

6. $z = \text{arc tag}\ x^2y + \text{arc tag}\ xy^2$. $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2xy}{1+x^4y^2} + \dfrac{y^2}{1+x^2y^4}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^2}{1+x^4y^2} + \dfrac{2xy}{1+x^2y^4}$

7. $z = e^{x^2+xy}$. $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+xy}(2x+y) = z(2x+y), \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+xy}(x) = xz$

8. El área de un triángulo viene dada por $K = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,C$. Si $a = 20$, $b = 30$ y $C = 30°$, hallar las variaciones:

(*a*) de K con respecto a a, suponiendo b y C constantes.

(*b*) de K con respecto a C, suponiendo a y b constantes.

(*c*) de b con respecto a a, suponiendo K y C constantes.

(*a*) $\dfrac{\partial K}{\partial a} = \frac{1}{2}b\,\text{sen}\,C = \frac{1}{2}(30)(\text{sen}\,30°) = \dfrac{15}{2}$,

(*b*) $\dfrac{\partial K}{\partial C} = \frac{1}{2}ab\cos C = \frac{1}{2}(20)(30)(\cos 30°) = 150\sqrt{3}$

(*c*) $b = \dfrac{2K}{a\,\text{sen}\,C}; \dfrac{\partial b}{\partial a} = -\dfrac{2K}{a^2\,\text{sen}\,C} = -\dfrac{2(\frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,C)}{a^2\,\text{sen}\,C} = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{3}{2}$

Hallar, en los Problemas 9-11, las derivadas parciales de primer orden de z con respecto a las variables independientes x e y.

9. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Solución 1. Despejando z obtenemos $z = \pm\sqrt{25 - x^2 - y^2}$. Por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\pm\sqrt{25-x^2-y^2}} = -\frac{x}{z} \text{ y } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\pm\sqrt{25-x^2-y^2}} = -\frac{y}{z}$$

Solución 2. Derivando implícitamente con respecto a x, tomando y constante.

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$$

Derivando implícitamente con respecto a y, tomando x constante.

$$2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

10. $x^2(2y+3z) + y^2(3x-4z) + z^2(x-2y) = xyz$.

En este caso, sería muy complicado seguir el procedimiento de la solución 1 del Problema 9.

Derivando inplícitamente con respecto a x,

$$2x(2y+3z) + 3x^2\frac{\partial z}{\partial x} + 3y^2 - 4y^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2z(x-2y)\frac{\partial z}{\partial x} + z^2 = yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}$$

y
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4xy + 6xz + 3y^2 + z^2 - yz}{3x^2 - 4y^2 + 2xz - 4yz - xy}$$

Derivando implícitamente con respecto a y,

$$2x^2 + 3x^2\frac{\partial z}{\partial y} + 2y(3x-4z) - 4y^2\frac{\partial z}{\partial y} + 2z(x-2y)\frac{\partial z}{\partial y} - 2z^2 = xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}$$

y
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x^2 + 6xy - 8yz - 2z^2 - xz}{3x^2 - 4y^2 + 2xz - 4yz - xy}$$

11. $xy + yz + zx = 1$.

Derivando con respecto a x, $y + y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial x} + z = 0$ y $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y+z}{x+y}$.

Derivando con respecto a y, $x + y\dfrac{\partial z}{\partial y} + z + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x+z}{x+y}$

12. Considerando x e y como variables independientes, calcular $\dfrac{\partial r}{\partial x}, \dfrac{\partial r}{\partial y}, \dfrac{\partial \theta}{\partial x}, \dfrac{\partial \theta}{\partial y}$ siendo $x = e^{2r}, \cos\theta$, $y = e^{3r}, \operatorname{sen}\theta$.

Derivando las relaciones parcialmente con respecto a x:

$$1 = 2e^{2r}\cos\theta\,\frac{\partial r}{\partial x} - e^{2r}\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \text{y} \quad 0 = 3e^{3r}\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial r}{\partial x} + e^{3r}\cos\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos: $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{\cos\theta}{e^{2r}(2+\operatorname{sen}^2\theta)}$ y $\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -\dfrac{3\operatorname{sen}\theta}{e^{2r}(2+\operatorname{sen}^2\theta)}$.

Derivando las relaciones parcialmente con respecto a y:

$$0 = 2e^{2r}\cos\theta\,\frac{\partial r}{\partial y} - e^{2r}\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \text{y} \quad 1 = 3e^{3r}\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial r}{\partial y} + e^{3r}\cos\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos: $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{e^{3r}(2+\operatorname{sen}^2\theta)}$ y $\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{2\cos\theta}{e^{3r}(2+\operatorname{sen}^2\theta)}$.

13. Hallar la pendiente de las tangentes a las curvas intersección de la superficie $z = 3x^2 + 4y^2 - 6$ con los planos que pasan por el punto (1, 1, 1) y son paralelos a los planos coordenados xOz e yOz.

El plano $x = 1$, paralelo al yOz, corta a la superficie según la curva $z = 4y^2 - 3$, $x = 1$. Por tanto, la pendiente pedida es $\partial z/\partial y = 8y = 8 \cdot 1 = 8$.

El plano $y = 1$, paralelo al xOz, corta a la superficie según la curva $z = 3x^2 - 2$, $y = 1$. Por tanto, la pendiente pedida es $\partial z/\partial x = 6x = 6$.

Hallar, en los Problemas 14-15, las segundas derivadas parciales de z.

14. $z = x^2 + 3xy + y^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2$$

15. $z = x\cos y - y\cos x$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos y + y\operatorname{sen} x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x\operatorname{sen} y - \cos x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = y\cos x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -x\cos y$$

Problemas propuestos

16. Estudiar la continuidad en el punto (0,0) de las funciones siguientes:

(*a*) $\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$, (*b*) $\dfrac{x-y}{x+y}$, (*c*) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, (*d*) $\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ *Sol.* (*a*) No, (*b*) No, (*c*) Sí, (*d*) No.

17. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en las funciones siguientes:

(*a*) $z = x^2 + 3xy + y^2$ *Sol.* $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y$

(*b*) $z = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}$ *Sol.* $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y^2} + \frac{2y}{x^3}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{y^3} - \frac{1}{x^2}$

(*c*) $z = \text{sen}\, 3x \cos 4y$ *Sol.* $\frac{\partial z}{\partial x} = 3 \cos 3x \cos 4y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -4\, \text{sen}\, 3x\, \text{sen}\, 4y$

(*d*) $z = \text{arc tag}\, \frac{y}{x}$ *Sol.* $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$

(*e*) $x^2 - 4y^2 + 9z^2 = 36$ *Sol.* $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{9z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4y}{9z}$

(*f*) $z^3 - 3x^2y + 6xyz = 0$ *Sol.* $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y(x - z)}{z^2 + 2xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x - 2z)}{z^2 + 2xy}$

(*g*) $yz + xz + xy = 0$ *Sol.* $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y + z}{x + y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x + z}{x + y}$

18. (*a*) Si $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, demostrar que $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

(*b*) Si $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, demostrar que $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

(*c*) Si $z = e^{x/y}\, \text{sen}\, \frac{x}{y} + e^{y/x} \cos \frac{y}{x}$, demostrar que $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

(*d*) Si $z = (ax + by)^2 + e^{ax+by} + \text{sen}\,(ax + by)$, demostrar que $b \frac{\partial z}{\partial x} = a \frac{\partial z}{\partial y}$.

19. Hallar la ecuación de la tangente
(*a*) a la parábola $z = 2x^2 - 3y^2$, $y = 1$ en el punto $(-2, 1, 5)$. *Sol.* $8x + z + 11 = 0, y = 1$
(*b*) a la parábola $z = 2x^2 - 3y^2$, $x = -2$ en el punto $(-2, 1, 5)$. *Sol.* $6y + z - 11 = 0, x = -2$
(*c*) a la hipérbola $z = 2x^2 - 3y^2$, $z = 5$ en el punto $(-2, 1, 5)$. *Sol.* $4x + 3y + 5 = 0, z = 5$

Demostrar que las tres rectas están situadas en el plano $8x + 6y + z + 5 = 0$.

20. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, en las funciones siguientes:

(*a*) $z = 2x^2 - 5xy + y^2$ *Sol.* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = -5$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$

(*b*) $z = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}$ *Sol.* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{6y}{x^4}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = 2\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3}\right)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{6x}{y^4}$

(*c*) $z = \text{sen}\, 3x \cos 4y$ *Sol.* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -9z$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = -12 \cos 3x\, \text{sen}\, 4y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -16z$

(*d*) $z = \text{arc tag}\, \frac{y}{x}$ *Sol.* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$

21. (*a*) Si $z = \frac{xy}{x - y}$, demostrar que $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

(*b*) Si $z = e^{\alpha x} \cos \beta y$ y $\beta = \pm\alpha$, demostrar que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

(*c*) Si $z = e^{-t}(\text{sen}\, x + \cos y)$, demostrar que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial t}$

(*d*) Si $z = \text{sen}\, ax\, \text{sen}\, by\, \text{sen}\, kt\sqrt{a^2 + b^2}$, demostrar que $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = k^2 \left\{ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right\}$.

22. En la fórmula de los gases reales $\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = ct$, siendo a, b y c constantes, demostrar que

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{2a(v - b) - (p + a/v^2)v^3}{v^3(v - b)}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{cv^3}{(p + a/v^2)v^3 - 2a(v - b)}, \quad \frac{\partial t}{\partial p} = \frac{v - b}{c}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial p}\right) = -1$$

Capítulo 57

Diferenciales y derivadas totales

DIFERENCIALES TOTALES. Las diferenciales, dx y dy de la función $y = f(x)$ de una sola variable independiente, según vimos en el Capítulo 23, vienen dadas por

$$dx = \Delta x, \qquad dy = f'(x)\,dx = \frac{dy}{dx}dx$$

Consideremos la función $z = f(x, y)$ de las dos variables independientes x e y, y sean $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$. Al variar x permaneciendo constante y, z resulta una función de x solamente y *la diferencial parcial de z con respecto a x* será $d_x z = f_x(x, y)dx = \dfrac{\partial z}{\partial x}\,dx$. Análogamente, *la diferencial parcial de z con respecto a y* viene dada por $d_y z = f_y(x, y)\,dy = \dfrac{\partial z}{\partial y}\,dy$. Pues bien, *la diferencial total de z* es la suma de las diferenciales parciales anteriores, es decir,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (1)$$

Para una función $w = F(x, y, z, \ldots t)$, la diferencial total dw se define por

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz + \cdots + \frac{\partial w}{\partial t}dt \qquad (1')$$

(Ver Problemas 1-2.)

Como ocurre con las funciones de una sola variable, la diferencial total de una función de varias variables es un valor muy próximo al incremento total de la función cuando las variables independientes experimentan un incremento pequeño.

Ejemplo:

Sea $z = xy$; $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}\,dy = y\,dx + x\,dy$; si se incrementan x e y en $\Delta x = dx$ e $\Delta y = dy$, respectivamente, el incremento Δz de z será

$$\begin{aligned} \Delta z &= (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy \\ &= x\,\Delta y + y\,\Delta x + \Delta x\,\Delta y \\ &= x\,dy + y\,dx + dx\,dy \end{aligned}$$

En la Fig. 57-1, se hace una interpretación geométrica. Como se puede observar, dz y Δz difieren en un rectángulo de área $\Delta x\,\Delta y = dx\,dy$.

(Ver Problemas 3-9.)

Δy	$x \cdot \Delta y$	$\Delta x \cdot \Delta y$
y	$x \cdot y$	$y \cdot \Delta x$
	x	Δx

Fig. 57-1

DERIVADA TOTAL DE UNA FUNCION DE FUNCION. Sea $z = f(x, y)$ una función continua de las variables x, y con derivadas parciales, $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, continuas y x e y funciones derivables $x = g(t)$, $y = h(t)$ de una variable t; en estas condiciones, z es una función de t y su derivada total, dz/dt, con respecto a t viene dada por

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad (2)$$

Análogamente, sea $w = f(x, y, z, \ldots)$ una función continua de las variables $x, y, z, \ldots$, con derivadas parciales continuas, y $x, y, z, \ldots$, funciones derivables de una variable t; la derivada total de w con respecto a t viene dada por

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \cdots \qquad (2')$$

(Ver problemas 10-16)

Si $z = f(x, y)$ es una función continua de las variables x e y y sus derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ son continuas, y x e y son, a su vez, funciones continuas, $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$, de las variables independientes r y s, z es una función de t, siendo

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad (3)$$

Análogamente, si $w = f(x, y, z, \ldots)$ es una función continua de n variables $x, y, z, \ldots$ y sus derivadas parciales $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$, $\partial w/\partial z, \ldots$, y $x, y, z, \ldots$ son funciones continuas de m variables independientes $r, s, t, \ldots$, tendremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} + \cdots \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} + \cdots \quad \text{etc.} \end{aligned} \qquad (3')$$

(Ver problemas 17-19)

Problemas resueltos

Hallar la diferencial total en los problemas 1-2.

1. $z = x^3y + x^2y^2 + xy^3$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y + 2xy^2 + y^3, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 2x^2y + 3xy^2$$

Por tanto $\quad dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (3x^2y + 2xy^2 + y^3)\,dx + (x^3 + 2x^2y + 3xy^2)\,dy$

2. $z = x \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{sen} y - y\cos x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x\cos y - \operatorname{sen} x$$

Por tanto $\quad dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (\operatorname{sen} y - y\cos x)\,dx + (x\cos y - \operatorname{sen} x)\,dy$

3. Comparar dz y Δz, en la función $z = x^2 + 2xy - 3y^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 6y, \qquad dz = 2(x+y)\,dx + 2(x-3y)\,dy$$

$$\begin{aligned} \Delta z &= [(x+dx)^2 + 2(x+dx)(y+dy) - 3(y+dy)^2] - (x^2 + 2xy - 3y^2) \\ &= 2(x+y)\,dx + 2(x-3y)\,dy + (dx)^2 + 2\,dx\,dy - 3(dy)^2 \end{aligned}$$

Así, pues, dz y Δz difieren en $(dx)^2 + 2\,dx\,dy - 3(dy)^2$.

4. Hallar un valor aproximado del área de un rectángulo de dimensiones 35,02 por 24,97 unidades.

Llamando x e y a los lados del rectángulo, el área es $A = xy$, con lo cual $dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy = y\,dx + x\,dy$.

Para $x = 35$, $dx = 0{,}02$, $y = 25$, $dy = -0{,}03$, resulta $A = 35 \times 25 = 875$ y $dA = 25(0{,}02) + 35(-0{,}03) - 0{,}55$
El área es, aproximadamente, $A + dA = 874{,}45$ unidades de superficie.

5. Hallar, aproximadamente, la variación de longitud que experimenta la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 y 8 centímetros, cuando el primero se alarga $\frac{1}{4}$ centímetros y el segundo lo hace en $\frac{1}{8}$ centímetros.

Sean x, y, z los catetos menor, mayor y la hipotenusa del triángulo, respectivamente. Tendremos

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Para $x = 6$, $y = 8$, $dx = 1/4$, y $dy = -1/8$, de donde $dz = \dfrac{6(1/4) + 8(-1/8)}{\sqrt{6^2+8^2}} = 1/20$ cm. Por tanto, la hipotenusa se alarga aproximadamente 1/20 centímetros.

6. La potencia calorífica disipada en una resistencia eléctrica viene dada por $P = E^2/R$ vatios. Siendo $E = 200$ voltios y $R = 8$ ohmios, hallar la disminución que experimenta la potencia cuando E disminuye en 5 voltios y R lo hace en 0,2 ohmios.

$$\frac{\partial P}{\partial E} = \frac{2E}{R}, \quad \frac{\partial P}{\partial R} = -\frac{E^2}{R^2}, \quad dP = \frac{2E}{R}dE - \frac{E^2}{R^2}dR$$

Para $E = 200$, $R = 8$, $dE = -5$, y $dR = -0{,}2$, por tanto,

$$dP = \frac{2\cdot 200}{8}(-5) - \left(\frac{200}{8}\right)^2(-0{,}2) = -250 + 125 = -125 \text{ watts}$$

La potencia disminuye aproximadamente 125 vatios.

7. Al medir un bloque paralelepipédico de madera, han resultado, para sus dimensiones, los valores 10, 12 y 20 centímetros con un error probable de 0,05 centímetros en cada una. Hallar, aproximadamente, el máximo error que se puede cometer al evaluar el área total del bloque y el porcentaje de error respecto del área como consecuencia de los errores en las medidas individuales.

El área total es $S = 2(xy + yz + zx)$; luego

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x}dx + \frac{\partial S}{\partial y}dy + \frac{\partial S}{\partial z}dz = 2(y+z)\,dx + 2(x+z)\,dy + 2(y+x)\,dz$$

El máximo error en S tendrá lugar cuando los errores en las longitudes sean del mismo signo, por ejemplo, positivos.

$$dS = 2(12+20)(0{,}05) + 2(10+20)(0{,}05) + 2(12+10)(0{,}05) = 8{,}4 \text{ cm}^2$$

El porcentaje de error es (error/área)(100) = (8,4/1120)(100) = 0,75 %.

8. En la fórmula $R = E/C$, hallar el error máximo y el porcentaje de error si $C = 20$ con un error probable de 0,1 y $E = 120$ con un error probable de 0,05.

$$dR = \frac{\partial R}{\partial E}dE + \frac{\partial R}{\partial C}dC = \frac{1}{C}dE - \frac{E}{C^2}dC$$

El error máximo se dará cuando $dE = 0{,}05$ y $dC = -0{,}1$; luego

$$dR = \frac{0{,}05}{20} - \frac{120}{400}(-0{,}1) = 0{,}0325 \text{ es aproximadamente el error máximo}$$

El porcentaje de error es $\dfrac{dR}{R}(100) = \dfrac{0{,}0325}{8}(100) = 0{,}40625 = 0{,}41$ %.

9. Dos lados de un triángulo miden 150 y 200 metros y el ángulo que forman es de 60°. Sabiendo que los errores probables en la medición son de 0,2 metros en la medida de los lados y de 1° en la del ángulo, hallar el máximo error probable que se puede cometer al evaluar su área.

$$A = \tfrac{1}{2}xy \operatorname{sen}\theta, \quad \partial A/\partial x = \tfrac{1}{2}y \operatorname{sen}\theta, \quad \partial A/\partial y = \tfrac{1}{2}x\operatorname{sen}\theta, \quad \partial A/\partial\theta = \tfrac{1}{2}xy\cos\theta$$

y

$$dA = \tfrac{1}{2}y\operatorname{sen}\theta\,dx + \tfrac{1}{2}x\operatorname{sen}\theta\,dy + \tfrac{1}{2}xy\cos\theta\,d\theta$$

Para $x = 150$, $y = 200$, $\theta = 60°$, $dx = 0{,}2$, $dy = 0{,}2$, y $d\theta = 1° = \pi/180$, luego

$$dA = \tfrac{1}{2}(200)(\operatorname{sen}60°)(0{,}2) + \tfrac{1}{2}(150)(\operatorname{sen}60°)(0{,}2) + \tfrac{1}{2}(150)(200)(\cos 60°)(\pi/180) = 161{,}21 \text{ m}^2.$$

10. Hallar dz/dt, siendo $z = x^2 + 3xy + 5y^2$; $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 10y, \quad \frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = -\operatorname{sen} t$$

luego

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (2x+3y)\cos t - (3x+10y)\operatorname{sen} t$$

11. Hallar dz/dt, siendo: $z = \ln(x^2 + y^2)$; $x = e^{-t}$, $y = e^t$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}, \quad \frac{dx}{dt} = -e^{-t}, \quad \frac{dy}{dt} = e^t$$

Luego $$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{2x}{x^2+y^2}(-e^{-t}) + \frac{2y}{x^2+y^2}(e^t) = 2\frac{ye^t - xe^{-t}}{x^2+y^2}$$

12. Sea $z = f(x,y)$ una función continua de x e y cuyas derivadas parciales, $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, son continuas, y sea y una función derivable de x. En estas condiciones, z es una función derivable de x y, según (2),

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

Hemos puesto f en lugar de z, para evitar la confusión entre dz/dx y $\partial z/\partial x$ en la misma expresión.

13. Hallar dz/dx, siendo: $z = f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2$, $y = e^{ax}$.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = (2x+2y) + (2x+8y)ae^{ax} = 2(x+y) + 2a(x+4y)e^{ax}$$

14. Hallar (*a*) dz/dx y (*b*) dz/dy, siendo: $z = f(x, y) = xy^2 + x^2y$, $y = \ln x$.

(*a*) En este caso x es la variable independiente.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = (y^2+2xy) + (2xy+x^2)\left(\frac{1}{x}\right) = y^2 + 2xy + 2y + x$$

(*b*) Aquí y es la variable independiente.

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dy} + \frac{\partial f}{\partial y} = (y^2+2xy)x + (2xy+x^2) = xy^2 + 2x^2y + 2xy + x^2$$

15. La altura de un cono recto circular mide 15 centímetros y disminuye a razón de 0,2 centímetros cada minuto. El radio de la base mide 10 centímetros y disminuye a razón de 0,3 centímetros cada minuto. Hallar la variación de volumen que experimenta en la unidad de tiempo.

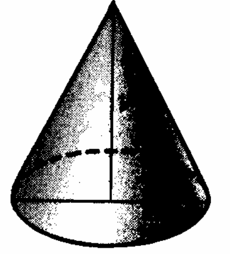


Fig. 57-2

Sea x = radio e y = altura del cono. De $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$, tomando a x e y como funciones del tiempo t,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}\pi\left(2xy\frac{dx}{dt} + x^2\frac{dy}{dt}\right)$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi[2\cdot 10\cdot 15\cdot(-0,3) + 10^2\cdot(0,2)] = -70\pi/3 \text{ cm}^3/\text{min}.$$

16. Un punto P se mueve a lo largo de la curva de intersección del paraboloide $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = z$ y del cilindro $x^2 + y^2 = 5$, en donde x, y y z se expresan en centímetros. Si x aumenta a razón de 0,2 centímetros por minuto, hallar la variación de z en la unidad de tiempo cuando $x = 2$.

De $z = \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}$, $\quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{x}{8}\frac{dx}{dt} - \frac{2y}{9}\frac{dy}{dt}$

Como $x^2 + y^2 = 5$, $y = \pm 1$ para $x = 2$; también, $x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$.

Para $y = 1$, $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{1}(0,2) = -0,4$ y $\frac{dz}{dt} = \frac{2}{8}(0,2) - \frac{2}{9}(-0,4) = \frac{5}{36}$ cm/min.

Para $y = -1$, $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} = 0,4$ y $\frac{dz}{dt} = \frac{2}{8}(0,2) - \frac{2}{9}(-1)(0,4) = \frac{5}{36}$ cm/min.

17. Hallar $\partial z/\partial r$ y $\partial z/\partial s$, siendo: $z = x^2 + xy + y^2$; $x = 2r + s$, $y = r - 2s$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y, \quad \frac{\partial x}{\partial r} = 2, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = -2$$

Luego $$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = (2x+y)(2) + (x+2y)(1) = 5x + 4y$$

y $$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (2x+y)(1) + (x+2y)(-2) = -3y$$

18. Hallar $\frac{\partial u}{\partial \varrho}$, $\frac{\partial u}{\partial \beta}$, $\frac{\partial u}{\partial \theta}$, siendo: $u = x^2 + 2y^2 + 2z^2$, $x = \varrho \operatorname{sen} \beta \cos \theta$, $y = \varrho \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \theta$, $z = \varrho \cos \beta$.

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \rho} = 2x \operatorname{sen} \beta \cos \theta + 4y \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \theta + 4z \cos \beta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \beta} = 2x\, \varrho \cos \beta \cos \theta + 4y\, \varrho \cos \beta \operatorname{sen} \theta - 4z\, \varrho \operatorname{sen} \beta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} = -2x\, \varrho \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \theta + 4y\, \varrho \operatorname{sen} \beta \cos \theta$$

19. Hallar du/dx, siendo: $u = f(x, y, z) = xy + yz + zx$, $y = 1/x$, $z = x^2$.

Aplicando (3'),

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx} = (y + z) + (x + z)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + (y + x)2x = y + z + 2x(x + y) - \frac{x + z}{x^2}$$

20. Sea $z = f(x, y)$ una función continua de x e y, cuyas primeras derivadas parciales son $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$. Deducir la expresión

$$\text{(A)} \qquad \Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

en donde ϵ_1 y $\epsilon_2 \to 0$ cuando Δx e $\Delta y \to 0$.

Cuando x e y se incrementan en Δx y Δy, respectivamente, el incremento experimentado por z vale

$$\text{(i)} \qquad \begin{aligned} \Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] \end{aligned}$$

En la primera expresión entre corchetes, la única variable es x, y en la segunda, solo varía y. Aplicando a cada uno de ellos el teorema del valor medio [(V) del Capítulo 21]:

$$\text{(ii)} \qquad f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \Delta x \cdot f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y)$$

$$\text{(iii)} \qquad f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y \cdot f_y(x, y + \theta_2 \Delta y)$$

siendo $0 < \theta_1 < 1$ y $0 < \theta_2 < 1$. Obsérvese que aquí las derivadas consideradas son derivadas parciales.

Como $\partial z/\partial x = f_x(x, y)$ y $\partial z/\partial y = f_y(x, y)$ son, por hipótesis, funciones continuas de x e y,

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f_x(x, y) \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f_y(x, y)$$

Luego $\qquad f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f_x(x, y) + \epsilon_1, \quad f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f_y(x, y) + \epsilon_2$

donde $\epsilon_1 \to 0$ y $\epsilon_2 \to 0$ cuando Δx e $\Delta y \to 0$.

Efectuando estas sustituciones en (ii) y (iii), y sustituyendo después en (i), resulta:

$$\begin{aligned} \Delta z &= \{f_x(x, y) + \epsilon_1\} \Delta x + \{f_y(x, y) + \epsilon_2\} \Delta y \\ &= f_x(x, y) \Delta x + f_y(x, y) \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \end{aligned}$$

Obsérvese que la diferencial total, dz, es un valor muy próximo al del incremento total, Δz, cuando $|\Delta x|$ y $|\Delta y|$ sean muy pequeños.

Problemas propuestos

21. Hallar la diferencial total de:

(*a*) $z = x^3y + 2xy^3$ *Sol.* $dz = (3x^2 + 2y^2)y\,dx + (x^2 + 6y^2)x\,dy$

(*b*) $\theta = \text{arc tag } y/x$ *Sol.* $d\theta = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$

(*c*) $z = e^{x^2-y^2}$ *Sol.* $dz = 2z(x\,dx - y\,dy)$

(*d*) $z = x(x^2 + y^2)^{-1/2}$ *Sol.* $dz = \dfrac{y(y\,dx - x\,dy)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

22. La frecuencia fundamental de vibración de un hilo o una varilla de sección circular sometidos a una tensión T viene dada por $n = \dfrac{1}{2rl}\sqrt{\dfrac{T}{\pi d}}$, siendo l la longitud, r el radio y d la densidad. Calcular, aproximadamente, la variación de la frecuencia, cuando (*a*) l aumenta en dl, (*b*) T aumenta en dT, (*c*) l y T se modifican, simultáneamente, en las cantidades citadas.

Sol. (*a*) $-\dfrac{n}{l}dl$, (*b*) $\dfrac{n}{2T}dT$, (*c*) $n\left(-\dfrac{dl}{l} + \dfrac{dT}{2T}\right)$

23. Hallar, mediante el cálculo diferencial:

(*a*) el volumen de un prisma recto de base cuadrada de lado 8,005 y de altura 9,996 centímetros. *Sol.* 640,544 cm³.

(*b*) la diagonal de un prisma rectangular de dimensiones 3,03 por 5,98 por 6,01 metros. *Sol.* 9,003 m.

24. Calcular, aproximadamente, el máximo error probable y el porcentaje de error cuando se halla z mediante las fórmulas:

(*a*) $z = \pi r^2 h$; $r = 5 \pm 0{,}05$, $h = 12 \pm 0{,}1$. *Sol.* $8{,}5\pi$; 2,8 %

(*b*) $1/z = 1/f + 1/g$; $f = 4 \pm 0{,}01$. $g = 8 \pm 0{,}02$. *Sol.* 0,0067; 0,25 %

(*c*) $z = y/x$; $x = 1{,}8 \pm 0{,}1$, $y = 2{,}4 \pm 0{,}1$. *Sol.* 0,13; 10 %

25. Calcular, aproximadamente, el máximo porcentaje de error en:

(*a*) $\omega = \sqrt[3]{g/b}$ sabiendo que el error probable en la medida de g es del 1 %, y el correspondiente en la medida de b, $\frac{1}{2}$ %

Ind. $\ln \omega = \frac{1}{3}(\ln g - \ln b)$; $\dfrac{\partial\omega}{\omega} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{dg}{g} - \dfrac{db}{b}\right)$, $\left|\dfrac{dg}{g}\right| = 0{,}01$, $\left|\dfrac{db}{b}\right| = 0{,}005$. *Sol.* 0,005

(*b*) $g = 2s/t^2$ sabiendo que el error probable en la medida de s es del 1 %, y el de la medida de t, del $\frac{1}{4}$ %.
Sol. 0,015.

26. Hallar du/dt, siendo:

(*a*) $u = x^2y^3$, $x = 2t^3$, $y = 3t^2$. *Sol.* $6xy^2t(2yt + 3x)$.

(*b*) $u = x\cos y + y\,\text{sen}\,x$, $x = \text{sen}\,2t$, $y = \cos 2t$.
Sol. $2(\cos y + y\cos x)\cos 2t - 2(-x\,\text{sen}\,y + \text{sen}\,x)\,\text{sen}\,2t$.

(*c*) $u = xy + yz + zx$, $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = e^t + e^{-t}$. *Sol.* $(x + 2y + z)e^t - (2x + y + z)e^{-t}$.

27. En un instante dado, el radio de un cilindro recto circular mide 6 centímetros y aumenta a razón de 0,2 centímetros por segundo, mientras que su altura, que mide 8 centímetros, disminuye a razón de 0,4 centímetros por segundo. Hallar la variación, con respecto al tiempo, del (*a*) volumen, (*b*) área total, en el instante considerado.
Sol. (*a*) $4{,}8\pi$ cm³/s, (*b*) $3{,}2\pi$ cm²/s.

28. Una partícula se mueve en un plano de forma que su abscisa y su ordenada vienen dadas, en función del tiempo, por $x = 2 + 3t$, $y = t^2 + 4$, en donde x e y se expresan en metros y t en minutos. Hallar la variación de la distancia al origen en la unidad de tiempo en el instante $t = 1$. *Sol.* $5/\sqrt{2}$ m/min.

29. Un punto se mueve a lo largo de la curva de intersección de la superficie $x^2 + 3xy + 3y^2 = z^2$ con el plano $x - 2y + 4 = 0$. Cuando $x = 2$ y aumenta a razón de 3 unidades por segundo, hallar (*a*) la variación de y en la unidad de tiempo, (*b*) la variación de z en la unidad de tiempo, (*c*) la velocidad del punto móvil.
Sol. (*a*) inc. 3/2 unidades/seg. (*b*) inc. 75/14 unidades/seg. en (2, 3, 7) y dec. 75/14 unidades/seg en (2, 3, —7), (*c*) 6,3 unidades/seg

30. Hallar $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$, siendo:

(*a*) $z = x^2 - 2y^2$, $x = 3s + 2t$, $y = 3s - 2t$. *Sol.* $6(x - 2y)$, $4(x + 2y)$

(*b*) $z = x^2 + 3xy + y^2$, $x = \text{sen}\, s + \cos t$, $y = \text{sen}\, s - \cos t$. *Sol.* $5(x + y)\cos s$, $(x - y)\,\text{sen}\, t$

(*c*) $z = x^2 + 2y^2$, $x = e^s - e^t$, $y = e^s + e^t$. *Sol.* $2(x + 2y)e^s$, $2(2y - x)e^t$

(*d*) $z = \text{sen}\,(4x + 5y)$, $x = s + t$, $y = s - t$. *Sol.* $9\cos(4x + 5y)$, $-\cos(4x + 5y)$

(*e*) $z = e^{xy}$, $x = s^2 + 2st$, $y = 2st + t^2$. *Sol.* $2e^{xy}\{tx + (s + t)y\}$, $2e^{xy}\{(s + t)x + sy\}$

31. (*a*) Si $u = f(x, y)$ y $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, demostrar que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

(*b*) Si $u = f(x, y)$ y $x = r\cosh s$, $y = r\,\text{senh}\, s$, demostrar que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2$$

32. (*a*) Si $z = f(x + ay) + g(x - ay)$, demostrar que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Ind. Hacer $z = f(u) + g(v)$, $u = x + ay$, $v = x - ay$.

(*b*) Si $z = x^n f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, demostrar que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = nz$.

(*c*) Si $z = f(x, y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$, demostrar que si se cumplen las condiciones de continuidad (Pág. 259).

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = f_{xx}(g')^2 + 2f_{xy}g'h' + f_{yy}(h')^2 + f_x g'' + f_y h''$$

(*d*) Si $z = f(x, y)$, $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$, demostrar que si se cumplen las condiciones de continuidad

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = f_{xx}(g_r)^2 + 2f_{xy}g_r h_r + f_{yy}(h_r)^2 + f_x g_{rr} + f_y h_{rr}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial s} = f_{xx}g_r g_s + f_{xy}(g_r h_s + g_s h_r) + f_{yy}h_r h_s + f_x g_{rs} + f_y h_{rs}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = f_{xx}(g_s)^2 + 2f_{xy}g_s h_s + f_{yy}(h_s)^2 + f_x g_{ss} + f_y h_{ss}$$

33. Una función, $f(x, y)$, es homogénea de orden n, si $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. [Por ejemplo, $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ es homogénea de segundo orden; $f(x, y) = x\,\text{sen}\, y/x + y\cos y/x$ es homogénea de primer orden.] Derivar $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ con respecto a t, y sustituir t por 1 para demostrar que $xf_x + yf_y = nf$. Comprobar esta fórmula aplicándola a las funciones de los dos ejemplos. Véase, también, el Problema 32 (*b*).

34. Si $z = \phi(u, v)$ siendo $u = f(x, y)$ y $v = g(x, y)$, y si $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$, demostrar que

$$(a)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$(b)\quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}\right)$$

35. Aplicar (A) del Problema 20 para deducir las fórmulas de derivación (*2*) y (*3*). *Ind.* Para la (*2*), dividir por Δt.

Capítulo 58

Funciones implícitas

LA DERIVADA de una función de una variable, definida implícitamente mediante una relación $f(x, y) = 0$, se trató en el Capítulo 6. Ahora, vamos a enunciar sin demostración, los teoremas siguientes:

I. Si $f(x, y)$ es continua en una región del plano que contiene a un punto (x_0, y_0) para el cual $f(x_0 y_0) = 0$, las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ son continuas en dicha región y $\partial f/\partial y \neq 0$ en (x_0, y_0), existe un intervalo en torno de (x_0, y_0) en el que se puede despejar y de la ecuación $f(x, y) = 0$, siendo y una función continua y derivable con respecto a x: $y = \phi(x)$ con $y_0 = \phi(x_0)$ y $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$.

(Ver Problemas 1-3.)

En el caso de tres variables, se verifica

II. Si $f(x, y, z)$ es continua en una región del plano que contiene a un punto (x_0, y_0, z_0) para el cual $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, las derivadas parciales $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}$ son continuas en dicha región, y $\partial F/\partial z \neq 0$ en (x_0, y_0, z_0), existe un intervalo en torno de (x_0, y_0, z_0) en el que se puede despejar z de la ecuación $F(x, y, z) = 0$, siendo z una función continua y derivable de x e y: $z = \phi(x, y)$ con $z_0 = \phi(x_0, y_0)$ y $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$.

(Ver Problemas 4-5.)

III. Si $f(x, y, u, v)$ y $g(x, y, u, v)$ son continuas en una región que contiene al punto (x_0, y_0, u_0, v_0) para el cual $f(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ y $g(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$, y las primeras derivadas parciales de f y g son continuas en dicha región, y si en (x_0, y_0, u_0, v_0) el determinante $J\left(\dfrac{f, g}{u, v}\right) = \begin{vmatrix} \partial f/\partial u & \partial f/\partial v \\ \partial g/\partial u & \partial g/\partial v \end{vmatrix} \neq 0$, existe un intervalo en torno de (x_0, y_0, u_0, v_0) en el que del sistema $f(x, y, u, v) = 0$ y $g(x, y, u, v) = 0$ se puede despejar u y v como funciones continuas y derivables de x e y: $u = \phi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$. Si en el punto (x_0, y_0, u_0, v_0) el determinante $J\left(\dfrac{f, g}{x, y}\right) \neq 0$, existe un intervalo en torno de (x_0, y_0, u_0, v_0) en el que del sistema $f(x, y, u, v) = 0$ y $g(x, y, u, v) = 0$ se puede despejar x e y como funciones continuas y derivables de u y v: $x = h(u, v)$, $y = k(u, v)$.

(Ver Problemas 6-7.)

Problemas resueltos

1. Aplicando el teorema I, demostrar que $x^2 + y^2 - 13 = 0$ define a y como función derivable de x en un intervalo del punto $(2, 3)$ que no comprenda a ningún punto del eje x. Hallar la derivada en dicho punto.

Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 - 13$. Tendremos, $f(2, 3) = 0$, mientras que en el intervalo de $(2, 3)$ anterior, la función está definida, sus derivadas parciales $\partial f/\partial x = 2x$ y $\partial f/\partial y = 2y$ son continuas y $\partial f/\partial y \neq 0$. Por consiguiente,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\frac{x}{y} = -\frac{2}{3} \quad \text{en } (2, 3)$$

2. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$, siendo $f(x, y) = y^3 + xy - 12 = 0$. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + x$, y $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\dfrac{y}{3y^2 + x}$.

3. Hallar dy/dx, siendo $e^x \operatorname{sen} y + e^y \operatorname{sen} x = 1$.

Haciendo $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + e^y \operatorname{sen} x - 1$. Tenemos $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\dfrac{e^x \operatorname{sen} y + e^y \cos x}{e^x \cos y + e^y \operatorname{sen} x}$.

4. Hallar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, siendo $F(x, y, z) = x^2 + 3xy - 2y^2 + 3xz + z^2 = 0$.

Tomando z como una función de x e y definida por la relación y derivando parcialmente con respecto a x y de nuevo con respecto a y, tenemos

(i) $$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = (2x + 3y + 3z) + (3x + 2z)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{y}$$

(ii) $$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = (3x - 4y) + (3x + 2z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

De (i), $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\dfrac{2x + 3y + 3z}{3x + 2z}$; de (ii), $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\dfrac{3x - 4y}{3x + 2z}$.

5. Hallar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, siendo $\operatorname{sen} xy + \operatorname{sen} yz + \operatorname{sen} zx = 1$.

Sea $F(x, y, z) = \operatorname{sen} xy + \operatorname{sen} yz + \operatorname{sen} zx - 1$; tendremos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y \cos xy + z \cos zx, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x \cos xy + z \cos yz, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = y \cos yz + x \cos zx$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{y \cos xy + z \cos zx}{y \cos yz + x \cos zx}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{x \cos xy + z \cos yz}{y \cos yz + x \cos zx}$$

6. Si u y v se definen como funciones de x e y por las ecuaciones

$$f(x, y, u, v) = x + y^2 + 2uv = 0, \quad g(x, y, u, v) = x^2 - xy + y^2 + u^2 + v^2 = 0,$$

hallar (i) $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$ y (ii) $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial y$.

(i) Derivando f y g parcialmente con respecto a x, tenemos

$$1 + 2v\frac{\partial u}{\partial x} + 2u\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad 2x - y + 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Despejando $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v + u(y - 2x)}{2(u^2 - v^2)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v(2x - y) - u}{2(u^2 - v^2)}$$

(ii) Derivando f y g parcialmente con respecto a y, tenemos

$$2y + 2v\frac{\partial u}{\partial y} + 2u\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad -x + 2y + 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Luego $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u(x - 2y) + 2vy}{2(u^2 - v^2)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v(2y - x) - 2uy}{2(u^2 - v^2)}$$

7. Siendo $u^2 - v^2 + 2x + 3y = 0$. y $uv + x - y = 0$, hallar (a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$, y (b) $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial v}$.

(a) Aquí x e y se consideran como variables independientes.

Derivando las ecuaciones dadas parcialmente con respecto a x:

$$2u\frac{\partial u}{\partial x} - 2v\frac{\partial v}{\partial x} + 2 = 0 \quad \text{y} \quad v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x} + 1 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{u + v}{u^2 + v^2}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{v - u}{u^2 + v^2}$.

Derivando, las ecuaciones dadas, parcialmente con respecto a y:

$$2u\frac{\partial u}{\partial y} - 2v\frac{\partial v}{\partial y} + 3 = 0 \quad \text{y} \quad v\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial y} - 1 = 0$$

Resolviendo el sistema, obtenemos $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{2v - 3u}{2(u^2 + v^2)}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{2u + 3v}{2(u^2 + v^2)}$.

(*b*) Aquí u y v se consideran como variables independientes.

Derivando las ecuaciones dadas, parcialmente, con respecto a u:

$$2u + 2\frac{\partial x}{\partial u} + 3\frac{\partial y}{\partial u} = 0 \text{ y } v + \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u} = 0. \quad \text{Luego} \quad \frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{2u+3v}{5} \text{ y } \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2(v-u)}{5}.$$

Derivando las ecuaciones dadas, parcialmente, con respecto a v:

$$-2v + 2\frac{\partial x}{\partial v} + 3\frac{\partial y}{\partial v} = 0 \text{ y } u + \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} = 0. \quad \text{Luego} \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{2v-3u}{5} \text{ y } \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2(u+v)}{5}.$$

Problemas propuestos

8. Hallar dy/dx, siendo:

(*a*) $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = 1$ (*b*) $xy - e^x \operatorname{sen} y = 0$ (*c*) $\ln(x^2 + y^2) - \operatorname{arc\,tag} y/x = 0$

Sol. (*a*) $\dfrac{3x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - 2xy + 3y^2}$ (*b*) $\dfrac{e^x \operatorname{sen} y - y}{x - e^x \cos y}$ (*c*) $\dfrac{2x + y}{x - 2y}$

9. Hallar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, siendo:

(*a*) $3x^2 + 4y^2 - 5z^2 = 60$ *Sol.* $\partial z/\partial x = \dfrac{3x}{5z}$, $\partial z/\partial y = \dfrac{4y}{5z}$

(*b*) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 4yz + 8zx = 20$ *Sol.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x+y+4z}{4x+2y+z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x+y+2z}{4x+2y+z}$

(*c*) $x + 3y + 2z = \ln z$ *Sol.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{z}{1-2z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{3z}{1-2z}$

(*d*) $z = e^x \cos(y+z)$ *Sol.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{z}{1 + e^x \operatorname{sen}(y+z)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-e^x \operatorname{sen}(y+z)}{1 + e^x \operatorname{sen}(y+z)}$

(*e*) $\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(y+z) + \operatorname{sen}(z+x) = 1$

Sol. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\cos(x+y) + \cos(z+x)}{\cos(y+z) + \cos(z+x)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\cos(x+y) + \cos(y+z)}{\cos(y+z) + \cos(z+x)}$

10. Hallar las primeras y segundas derivadas parciales de z, siendo: $x^2 + 2yz + 2zx = 1$.

Sol. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x+z}{x+y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{z}{x+y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{x-y+2z}{(x+y)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{x+2z}{(x+y)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2z}{(x+y)^2}$

11. Si $F(x,y,z) = 0$ demostrar que $\dfrac{\partial x}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} = -1$.

12. Si $z = f(x,y)$ y $g(x,y) = 0$, demostrar que $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial g}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x}}{\dfrac{\partial g}{\partial y}} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial g}{\partial y}} J\left(\dfrac{f,g}{x,y}\right)$.

13. Si $f(x,y) = 0$, y $g(z,x) = 0$, demostrar que $\dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial g}{\partial z}$.

14. Hallar las primeras derivadas parciales de u y v con respecto a x e y, y las primeras derivadas parciales de x e y con respecto a u y v, siendo $2u - v + x^2 + xy = 0$, $u + 2v + xy - y^2 = 0$.

Sol. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{1}{5}(4x + 3y)$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{5}(2x - y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{5}(2y - 3x)$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{4y - x}{5}$

$\dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{4y - x}{2(x^2 - 2xy - y^2)}$, $\dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{y - 2x}{2(x^2 - 2xy - y^2)}$, $\dfrac{\partial x}{\partial v} = \dfrac{3x - 2y}{2(x^2 - 2xy - y^2)}$, $\dfrac{\partial y}{\partial v} = \dfrac{-4x - 3y}{2(x^2 - 2xy - y^2)}$

15. Si $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 + z^2$, $w = x^3 + y^3 + z^3$, demostrar que

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{yz}{(x-y)(x-z)}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{x+z}{2(x-y)(y-z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial w} = \frac{1}{3(x-z)(y-z)}$$

Capítulo 59

Curvas y superficies en el espacio

TANGENTE Y PLANO NORMAL A UNA CURVA. Una curva en el espacio, se expresa en forma paramétrica mediante las ecuaciones

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t) \qquad (1)$$

La ecuación de la *tangente* a la curva en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ (determinado por $t = t_0$) es

$$\frac{x - x_0}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y - y_0}{\frac{dy}{dt}} = \frac{z - z_0}{\frac{dz}{dt}} \qquad (2)$$

y la ecuación del *plano normal* (pasa por P_0 y es perpendicular a la tangente) es

$$\frac{dx}{dt}(x - x_0) + \frac{dy}{dt}(y - y_0) + \frac{dz}{dt}(z - z_0) = 0 \qquad (3)$$

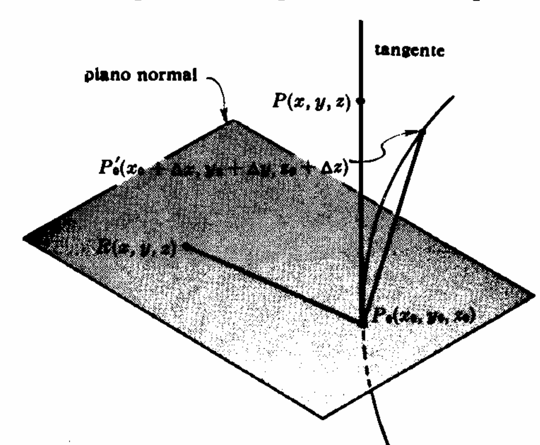


Fig. 59-1

En (*2*) y (*3*), las derivadas están particularizadas en el punto P_0.

(Ver Problemas 1-2.)

PLANO TANGENTE Y NORMAL A UNA SUPERFICIE. La ecuación del *plano tangente* a la superficie $F(x, y, z) = 0$ en uno de sus puntos $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0 \qquad (4)$$

y la ecuación de la normal

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad (5)$$

Las derivadas parciales están particularizadas en el punto P_0. (Fig. 59-2.)

(Ver Problemas 3-9.)

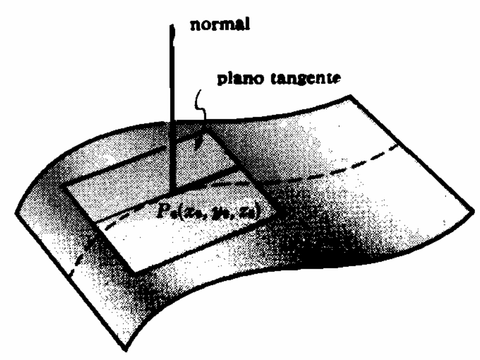


Fig. 59-2

UNA CURVA EN EL ESPACIO también se puede definir por las ecuaciones

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0 \qquad (6)$$

Las ecuaciones de la tangente a la curva en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}} \qquad (7)$$

y la ecuación del plano normal es

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}(x - x_0) + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}(z - z_0) = 0 \qquad (8)$$

En (7) y (8), las derivadas parciales están particularizadas en el punto P_0.

(Ver Problemas 10-11.)

Problemas resueltos

1. Deducir las ecuaciones (2) y (3) de la tangente y del plano normal a la superficie $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ determinado por el valor del parámetro $t = t_0$ (ver Fig. 59-1).

Sea $P'_0(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ otro punto de la curva correspondiente al valor $t = t_0 + \Delta t$. Cuando $P'_0 \to P_0$ a lo largo de la curva, la cuerda $P_0P'_0$ tiende a la tangente en P_0 como posición límite.

Las componentes de la cuerda $P_0P'_0$ son $[\Delta x, \Delta y, \Delta z]$. Dividiendo cada una de ellas por el incremento del parámetro resulta, $\left[\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right]$. Ahora bien, cuando $P'_0 \to P_0$, $\Delta t \to 0$ y $\left[\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right] \to \left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right]$, que serán las componentes de un vector diferencial sobre la tangente en P_0. Por consiguiente, llamando $P(x, y, z)$ un punto genérico de la tangente, $[x - x_0, y - y_0, z - z_0]$ serán las componentes del vector P_0P. En resumen, la ecuación de la tangente pedida será:

$$\frac{x - x_0}{dx/dt} = \frac{y - y_0}{dy/dt} = \frac{z - z_0}{dz/dt}$$

Sea $R(x, y, z)$ un punto genérico del plano normal en P_0; como P_0R y P_0P son perpendiculares, la ecuación del plano normal en el punto P_0 es:

$$(x - x_0)\frac{dx}{dt} + (y - y_0)\frac{dy}{dt} + (z - z_0)\frac{dz}{dt} = 0$$

2. Hallar las ecuaciones de la tangente y del plano normal a:

(*a*) la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ en el punto $t = 1$,

(*b*) la curva $x = t - 2$, $y = 3t^2 + 1$, $z = 2t^3$ en el punto donde corta al plano yz.

(*a*) En el punto $t = 1$ o sea $(1, 1, 1)$, $dx/dt = 1$, $dy/dt = 2t = 2$, y $dz/dt = 3t^2 = 3$. Aplicando (2), la ecuación de la tangente es $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ y, aplicando (3), la ecuación del plano normal es $(x - 1) + 2(y - 1) + 3(z - 1) = x + 2y + 3z - 6 = 0$.

(*b*) La curva dada corta el plano yz en el punto en el que $x = t - 2 = 0$, es decir, en el punto $t = 2$, o sea $(0, 13, 16)$. En este punto, $dx/dt = 1$, $dy/dt = 6t = 12$, y $dz/dt = 6t^2 = 24$. La ecuación de la tangente es $\frac{x}{1} = \frac{y-13}{12} = \frac{z-16}{24}$ y la ecuación del plano normal es $x + 12(y - 13) + 24(z - 16) = x + 12y + 24z - 540 = 0$.

3. Deducir las ecuaciones *(4)* y *(5)* del plano tangente y de la normal a la superficie $F(x, y, z) = 0$ en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. (Ver Fig. 59-2).

Sean $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, las ecuaciones paramétricas de una curva de la superficie $F(x, y, z) = 0$ que pasa por el punto P_0. En este punto tendremos:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} = 0$$

en donde las derivadas están particularizadas en dicho punto P_0.

Esta relación expresa que la recta que pasa por P_0 de componentes (i) $\left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right]$ es perpendicular a la recta que, pasando también por P_0, tiene de componentes (ii) $\left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right]$. Las componentes (i) pertenecen a la tangente a la curva situada en el plano tangente a la superficie, y las componentes (ii) son las de la normal a la superficie en el punto P_0. La ecuación de esta normal es

$$\frac{x - x_0}{\partial F/\partial x} = \frac{y - y_0}{\partial F/\partial y} = \frac{z - z_0}{\partial F/\partial z}$$

y la ecuación del plano tangente en P_0 es

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

En los Problemas 4-5, hallar las ecuaciones del plano tangente y de la normal a las superficies dadas en los puntos indicados.

4. $z = 3x^2 + 2y^2 - 11$; (2, 1, 3).

Ponemos $F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 - z - 11 = 0$. En (2, 1, 3): $\frac{\partial F}{\partial x} = 6x = 12$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 4y = 4$, y $\frac{\partial F}{\partial z} = -1$.

La ecuación del plano tangente es $12(x - 2) + 4(y - 1) - (z - 3) = 0$, o sea $12x + 4y - z = 25$.

La ecuación de la normal es $\frac{x-2}{12} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{-1}$.

5. $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 3xy - 10yz + 4x - 5z - 22 = 0$; $(1, -2, 1)$.

En $(1, -2, 1)$: $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 3y + 4 = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 6y + 3x - 10z = -19$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -8z - 10y - 5 = 7$.

La ecuación del plano tangente es $0(x - 1) - 19(y + 2) + 7(z - 1) = 0$, o sea $19y - 7z + 45 = 0$.

La ecuación de la normal es $\frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{-19} = \frac{z-1}{7}$, o sea $x = 1$, $7y + 19z - 5 = 0$.

6. Demostrar que la ecuación del plano tangente a la superficie $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 1$.

En P_0: $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x_0}{a^2}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2y_0}{b^2}$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{2z_0}{c^2}$.

La ecuación del plano tangente es $\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) - \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) - \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$.

que se reduce a $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1$, ya que P_0 pertenece a la superficie.

7. Demostrar que las superficies

$F(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 4 = 0$ y $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y + 2z + 10 = 0$ son tangentes en el punto (2, 1, 1).

Tendremos que demostrar que las dos superficies tienen el mismo plano tangente en el punto dado.

En (2, 1, 1): $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x = 4$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 8y = 8$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -8z = -8$ y

$\frac{\partial G}{\partial x} = 2x - 6 = -2$, $\frac{\partial G}{\partial y} = 2y - 6 = -4$, $\frac{\partial G}{\partial z} = 2z + 2 = 4$.

Como las componentes [4, 8, —8] y [—2, —4, 4] de las normales a las dos superficies son proporcionales, ambas tienen el mismo plano tangente,

$$1(x - 2) + 2(y - 1) - 2(z - 1) = 0 \quad \text{ó} \quad x + 2y - 2z = 2$$

8. Demostrar que las superficies $F(x, y, z) = xy + yz - 4zx = 0$ y $G(x, y, z) = 3z^2 - 5x + y = 0$ se cortan ortogonalmente en el punto (1, 2, 1).

Hemos de demostrar que los planos tangentes a las superficies, en dicho punto, son perpendiculares, o bien, que las normales a las superficies, en ese punto, son perpendiculares

En (1, 2, 1): $\dfrac{\partial F}{\partial x} = y - 4z = -2$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = x + z = 2$, y $\dfrac{\partial F}{\partial z} = y - 4x = -2$. Las componentes de la normal a $F(x, y, z) = 0$ son $[l_1, m_1, n_1] = [1, -1, 1]$.

En (1, 2, 1): $\dfrac{\partial G}{\partial x} = -5$, $\dfrac{\partial G}{\partial y} = 1$, y $\dfrac{\partial G}{\partial z} = 6z = 6$. Las componentes de la normal a $G(x, y, z) = 0$ son $[l_2, m_2, n_2] = [-5, 1, 6]$.

Como $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 1(-5) + (-1)1 + 1(6) = 0$, dichas rectas son perpendiculares.

9. Demostrar que las superficies $F(x, y, z) = 3x^2 + 4y^2 + 8z^2 - 36 = 0$ y $G(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 6 = 0$ se cortan en ángulo recto.

En un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ común a las dos superficies:

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = 6x_0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 8y_0$, $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 16z_0$, y $[3x_0, 4y_0, 8z_0]$ son las componentes de la normal a la superficie en P_0.

Análogamente, $[x_0\ 2y_0, -4z_0]$ son las componentes de la normal a $G(x, y, z) = 0$ en P_0.

$$\text{Como } 3x_0(x_0) + 4y_0(2y_0) + 8z_0(-4z_0) = 3x_0^2 + 8y_0^2 - 32z_0^2$$
$$= 6(x_0^2 + 2y_0^2 - 4z_0^2) - (3x_0^2 + 4y_0^2 + 8z_0^2) = 6(6) - 36 = 0,$$

dichas direcciones son perpendiculares.

10. Deducir las ecuaciones (*7*) y (*8*) de la tangente y del plano normal a la curva alabeada C: $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ en uno de sus puntos $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

En P_0 las direcciones $\left[\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}\right]$ y $\left[\dfrac{\partial G}{\partial x}, \dfrac{\partial G}{\partial y}, \dfrac{\partial G}{\partial z}\right]$ son, respectivamente, perpendiculares a los planos tangentes a las superficies $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$. Como la dirección

$$\left[\begin{vmatrix} \partial F/\partial y & \partial F/\partial z \\ \partial G/\partial y & \partial G/\partial z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \partial F/\partial z & \partial F/\partial x \\ \partial G/\partial z & \partial G/\partial x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \partial F/\partial x & \partial F/\partial y \\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y \end{vmatrix}\right]$$

es perpendicular a dichas direcciones, será la de la tangente a C en P_0. Por tanto, la ecuación de la tangente es

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \partial F/\partial y & \partial F/\partial z \\ \partial G/\partial y & \partial G/\partial z \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \partial F/\partial z & \partial F/\partial x \\ \partial G/\partial z & \partial G/\partial x \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \partial F/\partial x & \partial F/\partial y \\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y \end{vmatrix}}$$

y la ecuación del plano normal es

$$\begin{vmatrix} \partial F/\partial y & \partial F/\partial z \\ \partial G/\partial y & \partial G/\partial z \end{vmatrix}(x - x_0) + \begin{vmatrix} \partial F/\partial z & \partial F/\partial x \\ \partial G/\partial z & \partial G/\partial x \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} \partial F/\partial x & \partial F/\partial y \\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y \end{vmatrix}(z - z_0) = 0$$

11. Hallar las ecuaciones de la tangente y del plano normal a la curva $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, $x + y + z = 6$ en el punto (1, 2, 3).

Sea $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$ y $G(x, y, z) = x + y + z - 6 = 0$. En (1, 2, 3):

$$\begin{vmatrix} \partial F/\partial y & \partial F/\partial z \\ \partial G/\partial y & \partial G/\partial z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\begin{vmatrix} \partial F/\partial z & \partial F/\partial x \\ \partial G/\partial z & \partial G/\partial x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad \begin{vmatrix} \partial F/\partial x & \partial F/\partial y \\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Como $[1, -2, 1]$ son componentes de la tangente, su ecuación es $\dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y - 2}{-2} = \dfrac{z - 3}{1}$ y la ecuación del plano normal es $(x - 1) - 2(y - 2) + (z - 3) = x - 2y + z = 0$.

Problemas propuestos

12. Hallar las ecuaciones de la tangente y del plano normal a las curvas dadas en el punto indicado:

(*a*) $x = 2t,\ y = t^2,\ z = t^3;\ \ t = 1$ *Sol.* $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3};\ \ 2x + 2y + 3z - 9 = 0$

(*b*) $x = te^t,\ y = e^t,\ z = t;\ \ t = 0$ *Sol.* $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1};\ \ x + y + z - 1 = 0$

(*c*) $x = t\cos t,\ y = t \operatorname{sen} t,\ z = t;\ \ t = 0$ *Sol.* $x = z,\ y = 0;\ \ x + z = 0$

13. Demostrar que las curvas (i) $x = 2 - t,\ y = -1/t,\ z = 2t^2$ y (ii) $x = 1 + \theta,\ y = \operatorname{sen}\theta - 1,\ z = 2\cos\theta$ se cortan en ángulo recto en $P(1, -1, 2)$. Obtener las ecuaciones de la tangente y del plano normal a cada curva en P.

Sol. (i) $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{4};\ \ x - y - 4z + 6 = 0$ (ii) $x - y = 2,\ z = 2;\ \ x + y = 0$

14. Demostrar que las tangentes a la hélice $x = a\cos t,\ y = a \operatorname{sen} t,\ z = bt$ cortan al plano xy formando el mismo ángulo.

15. Demostrar que la longitud de la curva (1) desde el punto $t = t_0$ hasta el $t = t_1$ viene dada por

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

Calcular la longitud de la hélice del Problema 14 desde $t = 0$ a $t = t_1$. *Sol.* $\sqrt{a^2 + b^2}\, t_1$.

16. Hallar las ecuaciones de la tangente y del plano normal a las curvas dadas en el punto indicado:

(*a*) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 5,\ \ 3x - 2y - z = 0;\ \ (1, 1, 1)$

(*b*) $9x^2 + 4y^2 - 36z = 0,\ \ 3x + y + z - z^2 - 1 = 0;\ \ (2, -3, 2)$ (*c*) $4z^2 = xy,\ x^2 + y^2 = 8z;\ \ (2, 2, 1)$

Sol. (*a*) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{7} = \dfrac{z-1}{-8};\ \ 2x + 7y - 8z - 1 = 0$

(*b*) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{z-2}{1},\ y + 3 = 0;\ \ x + z - 4 = 0$ (*c*) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{-1},\ z - 1 = 0;\ \ x - y = 0$

17. Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la normal a las superficies dadas en el punto indicado:

(*a*) $x^2 + y^2 + z^2 = 14;\ \ (1, -2, 3)$ *Sol.* $x - 2y + 3z = 14;\ \ \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-3}{3}$

(*b*) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2;\ \ (x_1, y_1, z_1)$ *Sol.* $x_1x + y_1y + z_1z = r^2;\ \ \dfrac{x - x_1}{x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_1}$

(*c*) $x^2 + 2z^2 = 3y^2;\ \ (2, -2, -2)$ *Sol.* $x + 3y - 2z = 0;\ \ \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z+2}{-2}$

(*d*) $2x^2 + 2xy + y^2 + z + 1 = 0;\ \ (1, -2, -3)$ *Sol.* $z - 2y = 1;\ \ x - 1 = 0,\ \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$

(*e*) $z = xy;\ \ (3, -4, -12)$ *Sol.* $4x - 3y + z = 12;\ \ \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y+4}{-3} = \dfrac{z+12}{1}$

18. (*a*) Demostrar que la suma de los segmentos interceptados sobre los ejes coordenados por el plano tangente a la superficie $x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2} = a^{1/2}$ en uno de sus puntos es igual a a.

(*b*) Demostrar que la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los segmentos interceptados sobre los ejes coordenados por el plano tangente a la superficie $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ en uno de sus puntos es a.

19. Demostrar que las superficies dadas son tangentes en los puntos indicados:

(*a*) $x^2 + y^2 + z^2 = 18,\ xy = 9;\ (3, 3, 0)$.

(*b*) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 6z + 24 = 0,\ x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9;\ (2, 1, 1)$.

20. Demostrar que las superficies dadas son perpendiculares en los puntos indicados:

(*a*) $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 8,\ 4x^2 - y^2 + 2z^2 = 14;\ (2, 2, 1)$.

(*b*) $x^2 + y^2 + z^2 = 50,\ x^2 + y^2 - 10z + 25 = 0;\ (3, 4, 5)$.

21. Demostrar que cada una de las superficies (i) $14x^2 + 11y^2 + 8z^2 = 66$, (ii) $3z^2 - 5x + y = 0$, (iii) $xy + yz - 4zx = 0$ es perpendicular a las otras dos en el punto $(1, 2, 1)$.

Capítulo 60

Derivadas según una dirección
Máximos y mínimos

DERIVADAS SEGUN UNA DIRECCION. Sea la superficie $z = f(x, y)$ y $P(x, y, z)$ un punto de la misma. Trazando por este punto (Fig. 60-1) planos paralelos a los coordenados xOz e yOz, cortarán a la superficie según las curvas PR y PS, y al plano xOy según las rectas $P'M$ y $P'N$.

Las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ particularizadas en el punto P, o bien en $P'(x, y)$, representan la variación de $z = P'P$ cuando permanecen constantes y y x respectivamente, es decir, la variación de z según las direcciones de los ejes x e y, o sea, las pendientes de las curvas PR y PS en el punto P.

Consideremos, ahora, un plano que pase por P y sea perpendicular al plano xOy formando un ángulo θ con el eje x. Si PQ y $P'L$ son las intersecciones de este plano con la superficie, la ***derivada según la dirección*** θ de $f(x, y)$ en P (o en P') viene dada por

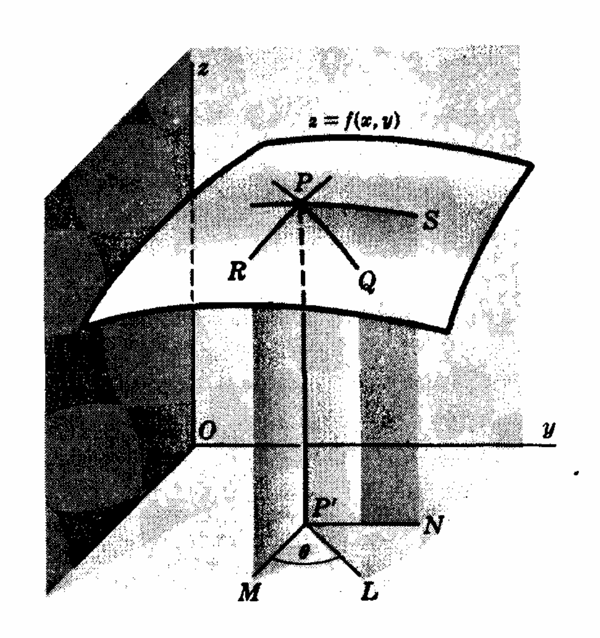


Fig. 60-1

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\theta \qquad (1)$$

La derivada según la dirección representa la variación de $z = P'P$ en la dirección de $P'L$, esto es, la pendiente de la curva PQ en P.

La derivada según una dirección en un punto P es una función de θ. Si existe una dirección según la cual la derivada en P tiene un máximo relativo, este valor recibe el nombre de *gradiente* de la función $f(x, y)$ en P. El gradiente, pues, es la pendiente de la tangente más inclinada que se puede trazar a la superficie en el punto P.

(Ver Problemas 1-8.)

Dada la función $w = F(x, y, z)$, la derivada en un punto $P(x, y, z)$ según la dirección (α, β, γ), viene dada por

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma \qquad (2)$$

(Ver Problema 9.)

MAXIMOS Y MINIMOS. Supongamos que $z = f(x, y)$ tiene un máximo (o un mínimo) en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Cualquier plano que pase por P_0 y sea perpendicular al plano xOy, corta a la superficie según una curva que tendrá un máximo (o un mínimo) en el punto P_0, es decir, la derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\theta$, de $z = f(x, y)$ debe ser igual a 0 en P_0 cualquiera que sea el valor de θ. Por tanto, en P_0, $\partial f/\partial x = 0$ y $\partial f/\partial y = 0$.

Los puntos en los cuales $z = f(x, y)$ tiene un máximo (o un mínimo) son aquellos (x_0, y_0) en los que se verifiquen simultáneamente las ecuaciones $\partial f/\partial x = 0$ y $\partial f/\partial y = 0$. Veamos los distintos casos que se pueden presentar:

Supongamos que $z = f(x, y)$ tengan primera y segunda derivadas parciales en una cierta región en torno al punto (x_0, y_0, z_0) en el que $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ son nulas. Si $\Delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) < 0$ en P_0, $z = f(x, y)$ tiene

$$\text{un mínimo relativo en } P_0 \text{ si } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$$

y

$$\text{un máximo relativo en } P_0 \text{ si } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$$

Si $\Delta > 0$, no habrá en P_0 ni máximo ni mínimo; si $\Delta = 0$ la naturaleza del punto crítico P_0 es indeterminada.

(Ver Problemas 10-15.)

Problemas resueltos

1. En la Fig. 60-1, sea $P''(x + \Delta x, y + \Delta y)$ un segundo punto de $P'L$, y representemos por Δs la distancia $P'P''$. Suponiendo que las primeras derivadas parciales de $z = f(x, y)$ sean continuas, según el Problema 20 del Capítulo 57, tendremos

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

donde ϵ_1 y $\epsilon_2 \to 0$ cuando Δx y $\Delta y \to 0$. El valor medio de la variación de z entre los puntos P' y P'' es

$$\frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s} + \epsilon_1\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s} + \epsilon_2\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\theta + \epsilon_1\cos\theta + \epsilon_2\operatorname{sen}\theta$$

siendo θ el ángulo que la recta $P'P''$ forma con el eje x. Ahora bien, como $P'' \to P'$ a lo largo de $P'L$, la variación instantánea de z, es decir, la derivada direccional en P', es

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\theta$$

2. Hallar la derivada de $z = x^2 - 6y^2$ en el punto $P'(7,2)$ según la dirección (*a*) $\theta = 45°$, (*b*) $\theta = 135°$.

La derivada en un punto $P'(x, y)$ según la dirección θ es

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\theta = 2x\cos\theta - 12y\operatorname{sen}\theta$$

(*a*) En $P'(7,2)$ en la dirección $\theta = 45°$: $dz/ds = 2\cdot 7(\frac{1}{2}\sqrt{2}) - 12\cdot 2(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -5\sqrt{2}$.

(*b*) En $P'(7,2)$ en la dirección $\theta = 135°$: $dz/ds = 2\cdot 7(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) - 12\cdot 2(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -19\sqrt{2}$.

3. Calcular la derivada de $z = ye^x$ en el punto $P'(0, 3)$ en la dirección (*a*) $\theta = 30°$, (*b*) $\theta = 120°$.

$$\frac{dz}{ds} = ye^x\cos\theta + e^x\operatorname{sen}\theta$$

(*a*) En el punto (0, 3) en la dirección $\theta = 30°$: $dz/ds = 3\cdot 1(\frac{1}{2}\sqrt{3}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3\sqrt{3} + 1)$.

(*b*) En el punto (0, 3) en la dirección $\theta = 120°$: $dz/ds = 3\cdot 1(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{3})$.

4. La temperatura T de un disco circular en uno de sus puntos (x, y) viene dada por $T = \dfrac{64}{x^2 + y^2 + 2}$, siendo el origen de coordenadas el centro del disco. Hallar, en el punto(1, 2), la variación de T con respecto a s según la dirección $\theta = \pi/3$.

$$\frac{dT}{ds} = -\frac{64(2x)}{(x^2 + y^2 + 2)^2}\cos\theta - \frac{64(2y)}{(x^2 + y^2 + 2)^2}\operatorname{sen}\theta$$

En el punto (1, 2) en la dirección $\theta = \pi/3$: $\dfrac{dT}{ds} = -\dfrac{128}{49}\left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{256}{49}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{64}{49}(1 + 2\sqrt{3})$.

5. El potencial eléctrico V en un punto (x, y) viene dado por $V = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$. Hallar la variación de V con respecto a s en el punto (3, 4) según la dirección del punto (2, 6).

$$\frac{dV}{ds} = \frac{x}{x^2 + y^2}\cos\theta + \frac{y}{x^2 + y^2}\operatorname{sen}\theta$$

Como θ es un ángulo del segundo cuadrante $\operatorname{tag}\theta = \frac{6-4}{2-3} = -2$, $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, y $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Por tanto, en (3, 4) en la dirección indicada, $\frac{dV}{ds} = \frac{3}{25}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{4}{25}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{5}}{25}$.

6. Calcular el gradiente de la superficie del Problema 2 en el punto indicado.

En el punto (7, 2) en la dirección θ, $dz/ds = 14\cos\theta - 24\operatorname{sen}\theta$.

Para hallar el valor de θ para el cual $\frac{dz}{ds}$ es máxima, tenemos $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dz}{ds}\right) = -14\operatorname{sen}\theta - 24\cos\theta = 0$.

Por tanto, $\operatorname{tag}\theta = -24/14 = -12/7$ y θ es un ángulo del segundo o del cuarto cuadrante. Si es del segundo cuadrante, $\operatorname{sen}\theta = 12/\sqrt{193}$ y $\cos\theta = -7/\sqrt{193}$. Si fuera del cuarto, $\operatorname{sen}\theta = -12/\sqrt{193}$ y $\cos\theta = 7/\sqrt{193}$.

Como $\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{dz}{ds}\right) = \frac{d}{d\theta}(-14\operatorname{sen}\theta - 24\cos\theta) = -14\cos\theta + 24\operatorname{sen}\theta$ es negativo para un ángulo del cuarto cuadrante, el gradiente es $\frac{dz}{ds} = 14\left(\frac{7}{\sqrt{193}}\right) - 24\left(-\frac{12}{\sqrt{193}}\right) = 2\sqrt{193}$ y la dirección es $\theta = 300°\ 15'$.

7. Hallar el gradiente de la superficie del Problema 3 en el punto indicado.

En el punto (0, 3) en la dirección θ, $dz/ds = 3\cos\theta + \operatorname{sen}\theta$.

Para hallar el valor de θ para el cual $\frac{dz}{ds}$ es máxima, tenemos $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dz}{ds}\right) = -3\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 0$.

Luego $\operatorname{tag}\theta = 1/3$ y θ es un ángulo del primero o tercer cuadrante.

Como $\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{dz}{ds}\right) = \frac{d}{d\theta}(-3\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) = -3\cos\theta - \operatorname{sen}\theta$ es negativo para un ángulo del primer cuadrante, el gradiente es $\frac{dz}{ds} = 3\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \frac{1}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$ y la dirección es $\theta = 18°\ 26'$

8. En el Problema 5, demostrar que la variación del potencial V con respecto a s es máxima a lo largo de rectas que pasan por el origen.

En un punto (x_1, y_1) en la dirección θ, $\frac{dV}{ds} = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}\cos\theta + \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}\operatorname{sen}\theta$.

Cuando $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dV}{ds}\right) = -\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}\operatorname{sen}\theta + \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}\cos\theta = 0$, $\operatorname{tag}\theta = \frac{y_1/(x_1^2 + y_1^2)}{x_1/(x_1^2 + y_1^2)} = \frac{y_1}{x_1}$.

Por tanto, θ es el ángulo de inclinación de la recta que une el origen con el punto (x_1, y_1).

9. Hallar la derivada de $F(x, y, z) = xy + 2xz - y^2 + z^2$ en el punto (1, —2, 1) a lo largo de la curva $x = t$, $y = t - 3$, $z = t^2$ en la dirección creciente de z.

Las componentes de la tangente a la curva en (1, —2, 1) son [1, 1, 2] y los cosenos directores son $[1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}]$. La derivada en esa dirección es

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma = 0\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} + 5\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} + 4\cdot\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{13\sqrt{6}}{6}$$

10. Hallar los máximos y mínimos de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25$.

Las condiciones $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4 = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 6 = 0$ se satisfacen cuando $x = 2$, $y = -3$.

Como $f(x, y) = (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) + 25 - 4 - 9 = (x - 2)^2 + (y + 3)^2 + 12$, es evidente que $f(2, -3) = 12$ es un mínimo de la función.

Geométricamente, (2, —3, 12) es el mínimo de la superficie $z = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25$.

11. Hallar los máximos y mínimos de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$.

Las condiciones $\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 + y) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 3(y^2 + x) = 0$ se satisfacen cuando $x = 0$, $y = 0$ y cuando $x = -1$, $y = -1$.

En (0, 0): $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3$, y $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y = 0$. Luego $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 9 > 0$, y en (0, 0) no hay máximo ni mínimo.

En (—1, —1): $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6$. Luego $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -27 < 0$, y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$. Por tanto, $f(-1, -1) = 1$ es el máximo de la función.

12. Dividir 120 en tres partes de manera que la suma de los productos tomados de dos en dos sea máxima.

Sean x, y y $120 - (x + y)$ las tres partes.

Tendremos que hallar el máximo de $S = xy + (x + y)(120 - x - y)$.

$\frac{\partial S}{\partial x} = y + (120 - x - y) - (x + y) = 120 - 2x - y$, $\frac{\partial S}{\partial y} = x + (120 - x - y) - (x + y) = 120 - x - 2y$.

Cuando $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial y} = 0$, tenemos $2x + y = 120$ y $x + 2y = 120$.

Luego $x = 40$, $y = 40$, $120 - (x + y) = 40$ son las tres partes, y $S = 3 \cdot 40^2 = 4\,800$.

Para la solución 1, 1, 118, $S = 237$; evidentemente, $S = 4\,800$ es el valor máximo.

13. Determinar el punto del plano $2x - y + 2z = 16$ más próximo al origen.

Sea (x, y, z) el punto buscado; el cuadrado de su distancia al origen es $D = x^2 + y^2 + z^2$. Como $2x - y + 2z = 16$, $y = 2x + 2z - 16$ será $D = x^2 + (2x + 2z - 16)^2 + z^2$.

Las condiciones $\partial D/\partial x = 2x + 4(2x + 2z - 16) = 0$ y $\partial D/\partial z = 4(2x + 2z - 16) + 2z = 0$ son equivalentes a $5x + 4z = 32$, $4x + 5z = 32$ y $x = z = 32/9$. Como sabemos que existe un punto para el cual D es mínimo (32/9, —16/9, 32/9) es el punto buscado.

14. Demostrar que el paralelepípedo de área total S constante de volumen V máximo es un cubo.

Sean las dimensiones x, y y z. Será $V = xyz$ y $S = 2(xy + yz + zx)$.

De la segunda ecuación se despeja z y se sustituye en la primera, con lo cual, resulta V en función de x e y. Todavía se puede resolver más fácilmente, si se considera a z como una función de x e y. Tendremos

$$\frac{\partial V}{\partial x} = yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = 0 = 2\left(y + z + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = 0 = 2\left(x + z + x\frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

De las dos últimas, $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y + z}{x + y}$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x + z}{x + y}$.

Luego las condiciones $\frac{\partial V}{\partial x} = yz - \frac{xy(y + z)}{x + y} = 0$ y $\frac{\partial V}{\partial y} = xz - \frac{xy(x + z)}{x + y} = 0$ se reducen a $y^2(z - x) = 0$ y $x^2(z - y) = 0$. Por tanto, $x = y = z$, como queríamos demostrar.

15. Calcular el volumen V del paralelepípedo recto de mayor volumen que se puede inscribir en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Sea $P(x, y, z)$ un vértice, en el primer octante. Tendremos $V = 8xyz$.

Consideremos a z como una función, de las variables independientes x e y, dada por la ecuación del elipsoide. Las condiciones necesarias para un máximo son:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 8\left(yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 8\left(xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \qquad (1)$$

De la ecuación del elipsoide obtenemos $\frac{2x}{a^2} + \frac{2z}{c^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ y $\frac{2y}{b^2} + \frac{2z}{c^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Eliminando $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ entre estas relaciones y (*1*) obtenemos

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 8\left(yz - \frac{c^2x^2y}{a^2z}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 8\left(xz - \frac{c^2xy^2}{b^2z}\right) = 0$$

y finalmente
$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{y^2}{b^2} \qquad (2)$$

Combinando (*2*) con la ecuación del elipsoide llegamos a $x = a\sqrt{3}/3$, $y = b\sqrt{3}/3$, y $z = c\sqrt{3}/3$. Luego $V = 8xyz = (8\sqrt{3}/9)abc$ unidades de volumen.

Problemas propuestos

16. Hallar las derivadas de las funciones siguientes en los puntos dados y en las direcciones indicadas: (*a*) $z = x^2 + xy + y^2$, $(3, 1)$, $\theta = \pi/3$. (*b*) $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $(2, 1)$, $\theta = \text{arc tag } 2/3$. (*c*) $z = y + x\cos xy$, $(0, 0)$, $\theta = \pi/3$. (*d*) $z = 2x^2 + 3xy - y^2$, $(1, -1)$, en la dirección del punto $(2, 1)$. *Sol.* (*a*) $\frac{1}{2}(7 + 5\sqrt{3})$, (*b*) $21\sqrt{13}/13$, (*c*) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$, (*d*) $11\sqrt{5}/5$.

17. Determinar el gradiente de las funciones del Problema 16 en los puntos dados.
Sol. (*a*) $\sqrt{74}$, (*b*) $3\sqrt{10}$, (*c*) $\sqrt{2}$, (*d*) $\sqrt{26}$.

18. Demostrar que el gradiente de $V = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ del Problema 8 es constante a lo largo de un círculo $x^2 + y^2 = r^2$.

19. Dada la superficie $z = 8 - 4x^2 - 2y^2$, hallar (*a*) la dirección de la máxima pendiente en el punto $(1, 1, 2)$ y (*b*) la dirección de la tangente a la curva de nivel z = constante. Obsérvese que ambas direcciones son perpendiculares.
Sol. (*a*) arc tag $\frac{1}{2}$, tercer cuadrante; (*b*) arc tag -2.

20. Demostrar que la suma de los cuadrados de las derivadas de $z = f(x, y)$ en uno cualquiera de sus puntos y en dos direcciones perpendiculares, es igual al cuadrado del gradiente.

21. Sean las funciones $z = f(x, y)$ y $w = g(x, y)$ de forma que $\partial z/\partial x = \partial w/\partial y$ y $\partial z/\partial y = -\partial w/\partial x$. Si θ_1 y θ_2 son dos direcciones perpendiculares, demostrar que, en un punto cualquiera $P(x, y)$, $\partial z/\partial s_1 = \partial w/\partial s_2$ y $\partial z/\partial s_2 = -\partial w/\partial s_1$.

22. Hallar la derivada de las funciones siguientes en los puntos dados y en las direcciones indicadas: (*a*) xy^2z, $(2, 1, 3)$, $[1, -2, 2]$. (*b*) $x^2 + y^2 + z^2$, $(1, 1, 1)$, en la dirección del punto $(2, 3, 4)$. (*c*) $x^2 + y^2 - 2xz$, $(1, 3, 2)$, a lo largo de $x^2 + y^2 - 2xz = 6$, $3x^2 - y^2 + 3z = 0$ en la dirección creciente de z.
Sol. (*a*) $-17/3$ (*b*) $6\sqrt{14}/7$ (*c*) 0

23. Hallar los máximos y mínimos de las funciones:

(*a*) $z = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$ — *Sol.* Máx. $= 2$ para $x = 1$, $y = 2$
(*b*) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ — *Sol.* Mín. $= -1$ para $x = 1$, $y = 1$
(*c*) $z = x^2 + 2xy + 2y^2$ — *Sol.* Mín. $= 0$ para $x = 0$, $y = 0$
(*d*) $z = (x - y)(1 - xy)$ — *Sol.* No tiene máx. ni mín.
(*e*) $z = 2x^2 + y^2 + 6xy + 10x - 6y + 5$ — *Sol.* No tiene máx. ni mín.
(*f*) $z = 3x - 3y - 2x^3 - xy^2 + 2x^2y + y^3$ — *Sol.* Mín. $= -\sqrt{6}$ para $x = -\sqrt{6}/6$, $y = \sqrt{6}/3$; máx. $= \sqrt{6}$ para $x = \sqrt{6}/6$, $y = -\sqrt{6}/3$
(*g*) $z = xy(2x + 4y + 1)$ — *Sol.* Máx. $= 1/216$ para $x = -1/6$, $y = -1/12$

24. Determinar tres números positivos x, y, z tales que:

(*a*) $x + y + z = 18$ y xyz sea máximo.
(*b*) $xyz = 27$ y $x + y + z$ sea mínimo.
(*c*) $x + y + z = 20$ y xyz^2 sea máximo.
(*d*) $x + y + z = 12$ y xy^2z^3 sea máximo.

Sol. (*a*) $x = y = z = 6$, (*b*) $x = y = z = 3$, (*c*) $x = y = 5$, $z = 10$, (*d*) $x = 2$, $y = 4$, $z = 6$

25. Calcular el mínimo valor del cuadrado de la distancia del origen al plano $Ax + By + Cz + D = 0$.
Sol. $D^2/(A^2 + B^2 + C^2)$

26. (*a*) Hallar el máximo volumen de una caja paralelepipédica sin tapa superior cuya área total es de 108 metros cuadrados.
(*b*) Hallar la mínima área total de una caja paralelepipédica sin tapa superior de 500 metros cúbicos de volumen.
Sol. (*a*) 108 m³, (*b*) 300 m².

27. Determinar el punto de $z = xy - 1$ más próximo al origen. *Sol.* $(0, 0, -1)$.

28. Hallar la ecuación del plano que pase por el punto $(1, 1, 2)$ y determine, en el primer octante, un volumen mínimo.
Sol. $2x + 2y + z = 6$.

29. Determinar los valores de p y q de tal forma que la suma S de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos $(0, 2)$, $(1, 3)$, y $(2, 5)$ a la recta $y = px + q$ sea mínima.
Ind. $S = (q - 2)^2 + (p + q - 3)^2 + (2p + q - 5)^2$. *Sol.* $p = 3/2$, $q = 11/6$.

Capítulo 61

Vectores en el espacio

EL ESTUDIO DE LA GEOMETRIA ANALITICA PLANA mediante el cálculo vectorial es, normalmente, complejo debido a que los problemas que en ella se presentan se pueden resolver teniendo en cuenta el concepto de pendiente. Por el contrario, el estudio de la geometría analítica en el espacio se facilita enormemente introduciendo el concepto y álgebra vectorial.

Tres vectores **a**, **b**, **c** con el mismo origen no situados en un mismo plano ni paralelos dos a dos, forman un *triedro a derechas* si el sentido de **c** coincide con el de avance de un sacacorchos cuyo movimiento de rotación sea de **a** a **b** (Fig. 61-1). También se verifica que el sentido de **b** corresponde al de avance cuando la rotación sea de **c** a **a** y el de **a**, con el de avance cuando la rotación tiene lugar de **b** a **c**.

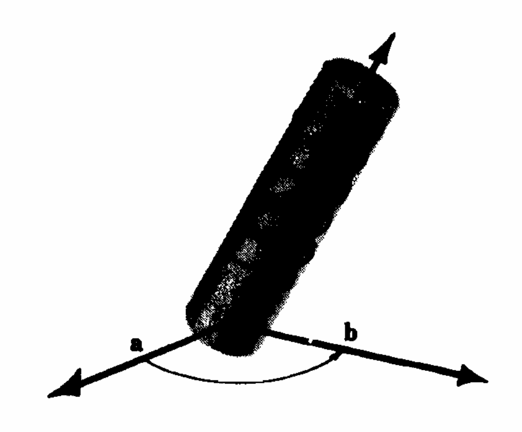


Fig. 61-1

Supongamos que los ejes de coordenadas forman un triedro trirrectángulo a derechas (Fig. 61-2), y sean **i**, **j**, **k** los vectores unitarios según los semiejes positivos x, y, y z, respectivamente. Teniendo en cuenta lo dicho en el Capítulo 18, un vector libre cualquiera **a** se puede expresar en la forma

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

y si $P(x, y, z)$ es un punto cualquiera del espacio, el vector de posición **r** de P es

$$\mathbf{r} = \mathbf{OP} = \mathbf{OB} + \mathbf{BP} = \mathbf{OA} + \mathbf{AB} + \mathbf{BP} \qquad (1)$$
$$= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

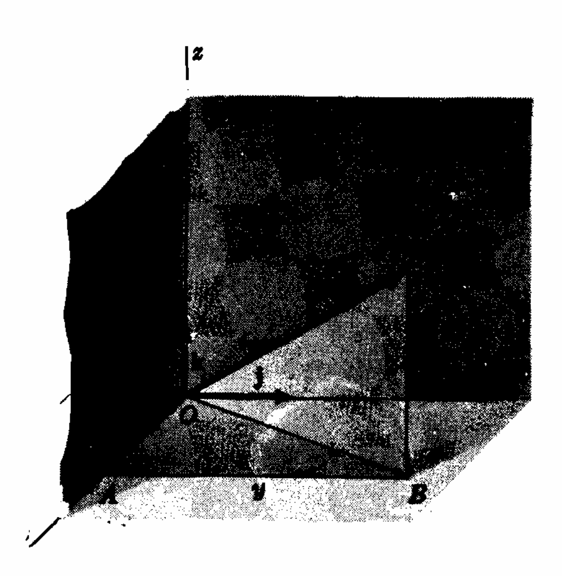


Fig. 61-2

Toda el álgebra expuesta en el Capítulo 18 es válida en este capítulo con la diferencia de que, ahora, hemos de tener en cuenta una dimensión más. Así, pues, si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, tendremos

$k\mathbf{a} = ka_1\mathbf{i} + ka_2\mathbf{j} + ka_3\mathbf{k}$ siendo k un escalar cualquiera

$\mathbf{a} = \mathbf{b}$ si y sólo si $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$

$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_1 \pm b_1)\mathbf{i} + (a_2 \pm b_2)\mathbf{j} + (a_3 \pm b_3)\mathbf{k}$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta$, siendo θ el menor ángulo de los formados por **a** y **b**

$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$; $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$

$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ si $\mathbf{a} = 0$, o $\mathbf{b} = 0$, o si **a** y **b** son perpendiculares.

De (*1*), obtenemos

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (2a)$$

para la distancia del punto $P(x, y, z)$ al origen. También si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos cualesquiera (ver Fig. 61-3)

$$\mathbf{P_1P_2} = \mathbf{P_1B} + \mathbf{BP_2} = \mathbf{P_1A} + \mathbf{AB} + \mathbf{BP_2}$$
$$= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

y

$$|\mathbf{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2} \qquad (2b)$$

es la fórmula que nos da la distancia entre dos puntos. (Ver Problemas 1-3.)

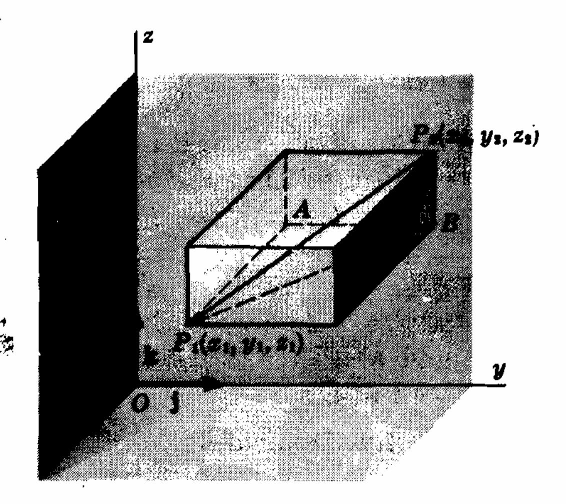


Fig. 61-3

COSENOS DIRECTORES DE UN VECTOR. Sean α, β, γ, los ángulos que un vector $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ forma, respectivamente, con los semiejes positivos x, y y z, como se representa en la Fig. 61-4. De

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{i}|\,|\mathbf{a}|\cos\alpha = |\mathbf{a}|\cos\alpha$$
$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\beta, \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\gamma$$

tenemos

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{i}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \qquad \cos\beta = \frac{\mathbf{j}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}$$

Estos son los *cosenos directores* de **a**. Como

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{|\mathbf{a}|^2} = 1$$

el vector $\mathbf{u} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$ es un vector unitario paralelo a **a**.

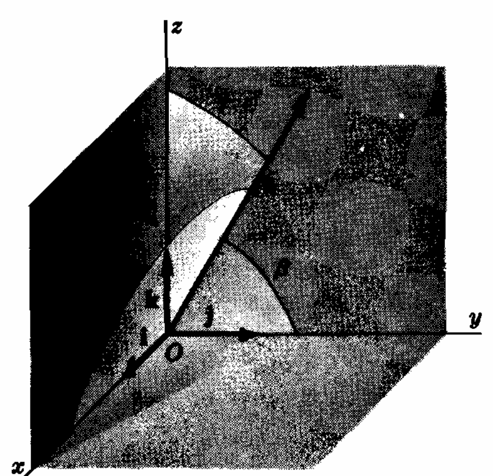


Fig. 61-4

VECTOR PERPENDICULAR A OTROS DOS. Sean

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$

dos vectores no paralelos con el origen común P. Es fácil de demostrar que el vector

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

es perpendicular a **a** y **b** y, por tanto, al plano que forman.

En los Problemas 5 y 6 se demuestra que

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \operatorname{sen}\theta$$
$$= \text{el área del paralelogramo que tiene a } \mathbf{a} \text{ y } \mathbf{b} \text{ como lados no paralelos.} \qquad (4)$$

En el caso de que los vectores **a** y **b** sean paralelos, $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$ y, según (*3*), se deduce que $\mathbf{c} = 0$, es decir, **c** es un vector nulo. Un vector nulo, por definición, tiene de módulo 0 y dirección y sentido sin especificar.

PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES. Sean

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$

dos vectores con el mismo origen P y $\mathbf{n}$ el vector unitario normal al plano formado por **a** y **b**, con un sentido tal que **a**, **b** y **n** forman un triedro a derechas de origen P, como se representa en la Fig. 61-5. *El producto vectorial* de **a** y **b** es, por definición,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{n} \qquad (5)$$

siendo θ el menor de los ángulos formados por **a** y **b**. Por tanto, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es un vector perpendicular a **a** y **b**.

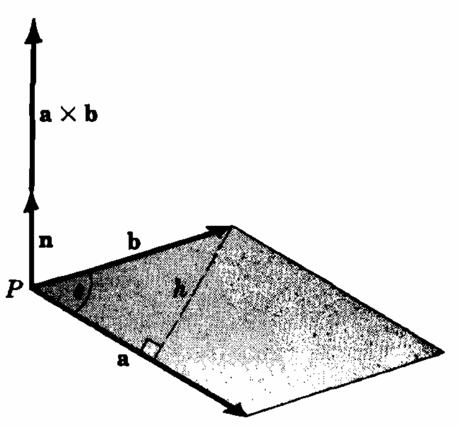


Fig. 61-5

Como se ve en el Problema 6,

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \operatorname{sen}\theta$$

representa el área del paralelogramo que tiene a **a** y **b** por lados no paralelos.

Si **a** y **b** son paralelos, $\theta = 0$ o π, y $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$. Por tanto,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \qquad (6)$$

Si en (5) se invierte el orden de **a** y **b**, **n** se debe sustituir por —**n**; luego,

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \qquad (7)$$

Como se han elegido los ejes coordenados de forma que determinen un triedro a derechas, se deduce

$$\begin{matrix} \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \end{matrix} \qquad (8)$$

Aplicando la propiedad distributiva (ver Problema 8):

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \qquad (9)$$

Multiplicando (9) por —1 y aplicando (7) se obtiene:

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{b} \qquad (9')$$

De donde

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times (\mathbf{c}+\mathbf{d}) = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{a} \times \mathbf{d} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{d} \qquad (10)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (11)$$

(Ver Problemas 9-10.)

TRIPLE PRODUCTO ESCALAR. Sea θ (Fig. 61-6) el menor de los ángulos formados por los vectores **b** y **c** y ϕ el correspondiente de los formados por **a** y $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$. El triple producto escalar es, por definición,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot |\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}| \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{n} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}| \operatorname{sen}\theta \cos\phi \\ &= (|\mathbf{a}| \cos\phi)(|\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}| \operatorname{sen}\theta) = hA \\ &= \text{volumen del paralelepípedo} \end{aligned}$$

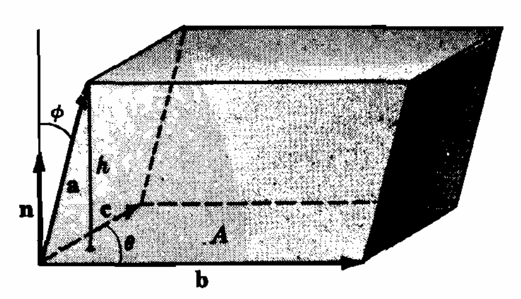


Fig. 61-6

Se demuestra (ver Problema 11) que

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} \qquad (12)$$

$$\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

Análogamente, tenemos

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) \qquad (13)$$

y

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = -\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = -\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) = -\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b}) \qquad (14)$$

De la interpretación del producto $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ como un volumen, se deduce que si **a**, **b**, **c** son tres vectores coplanarios, $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 0$ y recíprocamente.

Los paréntesis, en las expresiones $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ y $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ no son necesarios. Por ejemplo, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ solo se puede interpretar bien por el producto $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, o bien por $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\times\mathbf{c}$. Ahora bien, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ es un escalar y $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ carece de sentido.

(Ver Problema 12.)

TRIPLE PRODUCTO VECTORIAL. En el Problema 13, se demuestra que

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} \qquad (15)$$

Análogamente,

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a} \qquad (16)$$

Por tanto, excepto para el caso en que **b** sea perpendicular a **a** y **c**

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \neq (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$$

aquí es necesario utilizar paréntesis.

ECUACION DE LA RECTA. Una recta del espacio que pase por un punto dado $P_0(x_0, y_0, z_0)$ se define como el lugar geométrico de todos los puntos $P(x, y, z)$ tales que P_0P es paralelo a una dirección dada $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$. Sean $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}$ los vectores de posición de los puntos de P_0 y P, respectivamente. Tendremos

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = k\mathbf{a} \qquad (k, \text{ un escalar variable}) \qquad (17)$$

es la ecuación vectorial de la recta PP_0. Ver Fig. 61-7.

Poniendo (17) en la forma

$$(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k} = k(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}),$$

e igualando componentes

$$x - x_0 = ka_1, \quad y - y_0 = ka_2, \quad z - z_0 = ka_3$$

eliminando k, llegamos a

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \qquad (18)$$

que es la ecuación de la recta en coordenadas cartesianas rectangulares. Los números $[a_1, a_2, a_3]$ son las *componentes* de la recta y $\left[\frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}\right]$ son sus *cosenos directores*.

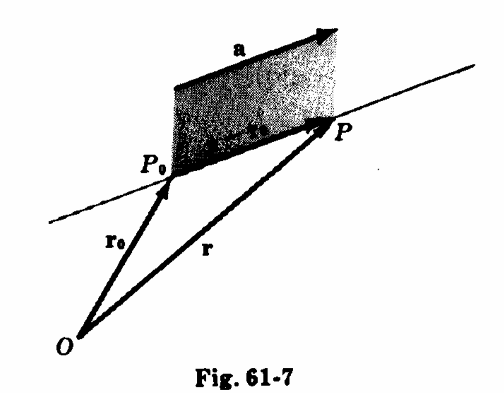


Fig. 61-7

Si una cualquiera de las componentes a_1, a_2, a_3 es cero, el numerador correspondiente en (*18*) también es nulo. Por ejemplo, si $a_1 = 0$, $a_2, a_3 \neq 0$, la recta viene dada por

$$x - x_0 = 0, \qquad \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

ECUACION DEL PLANO. Un plano del espacio que pase por un punto dado $P_0(x_0, y_0, z_0)$ se define como el lugar geométrico de todas las rectas que pasando por P_0 son perpendiculares a una dirección dada $\mathbf{a} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$. Sea $P(x, y, z)$ otro punto cualquiera del plano. En estas condiciones, $r - r_0 = \mathbf{P_0 P}$ es perpendicular a $\mathbf{a}$, como se representa en la Fig. 61-8, y la ecuación del plano será

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{a} = 0 \qquad (19)$$

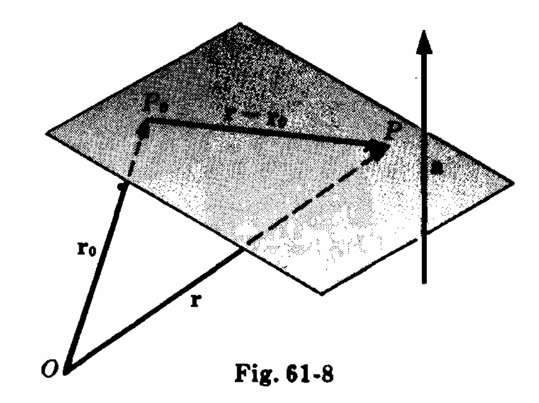


Fig. 61-8

En coordenadas rectangulares, tendremos

$$\{(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}\} \cdot (A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}) = 0$$

o

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

o

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (20)$$

siendo $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

Recíprocamente, sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto de la superficie

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Sustituyendo

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

Restando,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)$$
$$= (A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}) \cdot \{(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}\} = 0$$

el vector constante $A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ es normal a la superficie, por lo cual dicha superficie es un plano.

Problemas resueltos

1. Hallar la distancia del punto $P_1(1, 2, 3)$ al: (*a*) origen, (*b*) eje x, (*c*) eje z, (*d*) plano xy, (*e*) punto $P_2(3, -1, 5)$.

(*a*) $\mathbf{r} = \mathbf{OP_1} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; $|\mathbf{r}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

(*b*) $\mathbf{AP_1} = \mathbf{AB} + \mathbf{BP_1} = 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; $|\mathbf{AP_1}| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

(*c*) $\mathbf{DP_1} = \mathbf{DE} + \mathbf{EP_1} = 2\mathbf{j} + \mathbf{i}$; $|\mathbf{DP_1}| = \sqrt{5}$

(*d*) $\mathbf{BP_1} = 3\mathbf{k}$; $|\mathbf{BP_1}| = 3$

(*e*) $\mathbf{P_1 P_2} = (3 - 1)\mathbf{i} + (-1 - 2)\mathbf{j} + (5 - 3)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

$|\mathbf{P_1 P_2}| = \sqrt{4 + 9 + 4} = \sqrt{17}$

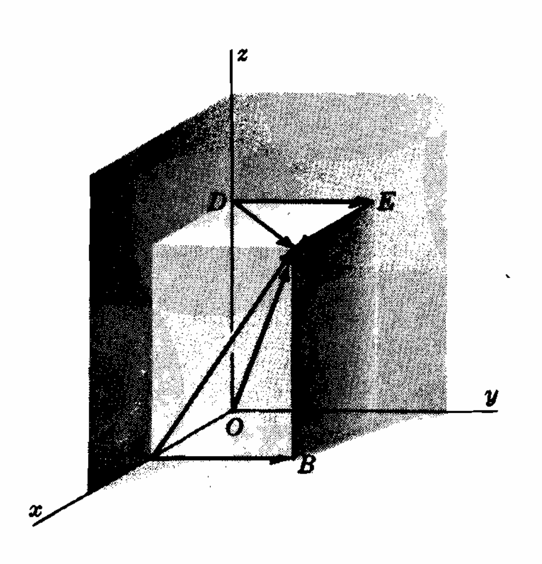


Fig. 61-9

2. Hallar el ángulo θ formado por los vectores que unen O con $P_1(1, 2, 3)$ y $P_2(2, -3, -1)$.

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{OP_1} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}_2 = \mathbf{OP_2} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1|\,|\mathbf{r}_2|} = \frac{1(2) + 2(-3) + 3(-1)}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = -\frac{1}{2}, \quad \theta = 120°$$

3. Hallar el ángulo $\alpha = \angle BAC$ del triángulo ABC cuyos vértices son $A(1, 0, 1)$, $B(2, -1, 1)$, $C(-2, 1, 0)$.

$$\mathbf{a} = \mathbf{AC} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{AB} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{-3-1}{\sqrt{22}} = -0{,}85280, \quad \alpha = 148°31'$$

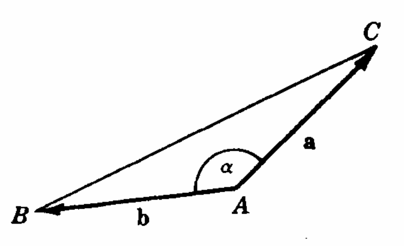


Fig. 61-10

4. Hallar los cosenos directores de $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

Los cosenos directores son

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{i}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{3}{13}, \quad \cos\beta = \frac{\mathbf{j}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{12}{13}, \quad \cos\gamma = \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{4}{13}$$

5. Si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ son dos vectores trazados desde un punto P y si

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

demostrar que $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \operatorname{sen}\theta$, siendo θ el menor de los ángulos formados por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

Tenemos $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$ y

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \left\{\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}\right\}^2} = \frac{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{|\mathbf{c}|}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

Luego, $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \operatorname{sen}\mathbf{n}$ como queríamos demostrar.

6. Hallar el área del paralelogramo cuyos lados no paralelos son $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

De la Fig. 61-11, $h = |\mathbf{b}| \operatorname{sen}\theta$ y el área es $h\,|\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \operatorname{sen}\theta$.

7. Sean $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$, respectivamente, las componentes de $\mathbf{a}$ paralela y perpendicular a $\mathbf{b}$, ver Fig. 61-12. Demostrar que

$$\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \text{ y } \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} = 0$$

Si θ es el ángulo formado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, será $|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}| \cos\theta$ y $|\mathbf{a}_2| = |\mathbf{a}| \operatorname{sen}\theta$. Como $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}$ son coplanarios

$$\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}_2|\,|\mathbf{b}| \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{n} = |\mathbf{a}| \operatorname{sen}\theta\,|\mathbf{b}|\,\mathbf{n}$$
$$= |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Como $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{b}$ son paralelos, $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} = 0$

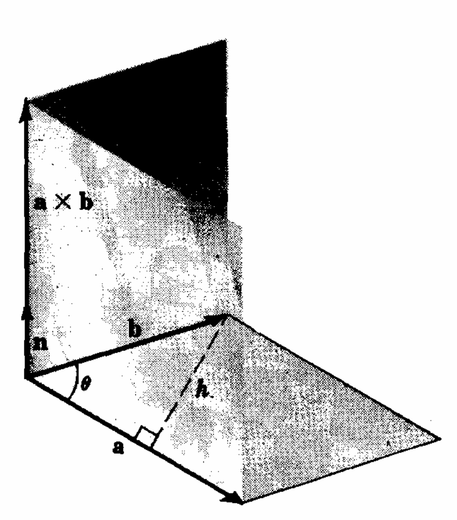


Fig. 61-11

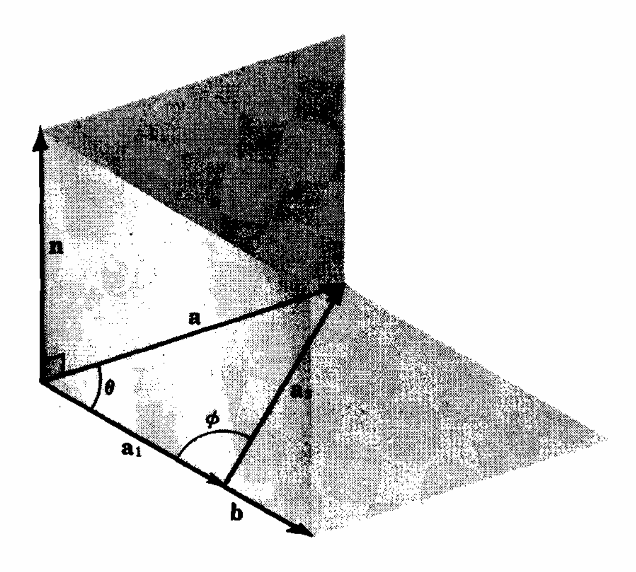


Fig. 61-12

8. Demostrar que $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

En la Fig. 61-13, el origen P de los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ está en el plano del papel, mientras que sus extremos están situados por delante de este plano. Los vectores $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{b}_1$ son, respectivamente, las componentes perpendiculares a $\mathbf{c}$ de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Por tanto, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1$, $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{c}$, $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{c}$ y $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) \times \mathbf{c}$, están en el plano del papel.

En los triángulos PRS y PMQ,

$$\frac{RS}{PR} = \frac{|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{c}|}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{c}|} = \frac{|\mathbf{b}_1|\,|\mathbf{c}|}{|\mathbf{a}_1|\,|\mathbf{c}|} = \frac{|\mathbf{b}_1|}{|\mathbf{a}_1|} = \frac{MQ}{PM};$$

con lo que PRS y PMQ son semejantes. Como PR es perpendicular a PM y RS lo es a MQ, PS es perpendicular a PQ y a $\mathbf{PS} = \mathbf{PQ} \times \mathbf{c}$. Así pues,

$$\mathbf{PS} = \mathbf{PQ} \times \mathbf{c} = \mathbf{PR} + \mathbf{RS}$$

o bien $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) \times \mathbf{c} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{c} + \mathbf{b}_1 \times \mathbf{c}$

sustituyendo $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{b}_1$ por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, respectivamente (ver Problema 7), resulta lo que se trataba de demostrar.

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$$

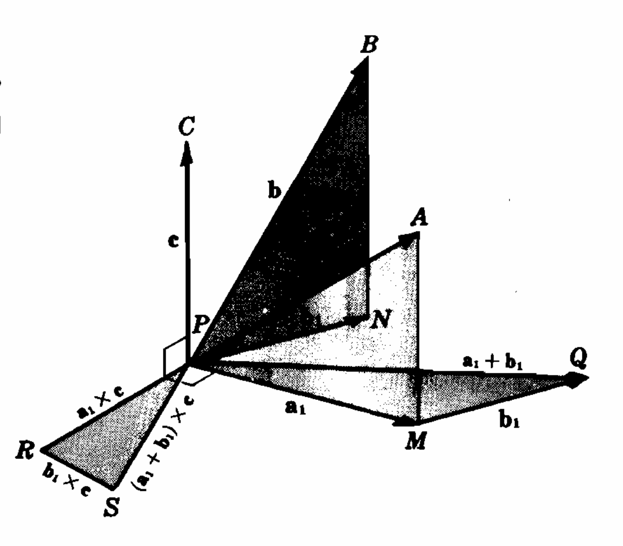


Fig. 61-13

9. Siendo $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, demostrar que

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Aplicando la propiedad distributiva

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &= a_1\mathbf{i} \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + a_2\mathbf{j} \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + a_3\mathbf{k} \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &= (a_1b_2\mathbf{k} - a_1b_3\mathbf{j}) + (-a_2b_1\mathbf{k} + a_2b_3\mathbf{i}) + (a_3b_1\mathbf{j} - a_3b_2\mathbf{i}) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

10. Deducir el teorema de los senos de la trigonometría plana.

Consideremos el triángulo ABC cuyos lados son $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ de módulos a, b, c, respectivamente, y cuyos ángulos interiores son α, β, λ.

Tendremos

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$$

Como $\quad \mathbf{a} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} = 0 \quad$ o $\quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$

y $\quad \mathbf{b} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} = 0 \quad$ o $\quad \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$

Sea $\quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$

$$|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \operatorname{sen}\gamma = |\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}| \operatorname{sen}\alpha = |\mathbf{c}|\,|\mathbf{a}| \operatorname{sen}\beta$$

$$ab \operatorname{sen}\gamma = bc \operatorname{sen}\alpha = ca \operatorname{sen}\beta$$

y

$$\frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}$$

11. Si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, y $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$, demostrar que

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\cdot[(b_2c_3 - b_3c_2)\mathbf{i} + (b_3c_1 - b_1c_3)\mathbf{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\mathbf{k}] \\
&= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

12. Demostrar que $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = 0$.

Por (*12*), $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{c} = 0$.

13. Si **a**, **b**, **c** son los vectores del Problema 11, demostrar que $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\times[(b_2c_3 - b_3c_2)\mathbf{i} + (b_3c_1 - b_1c_3)\mathbf{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\mathbf{k}] \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2c_3 - b_3c_2 & b_3c_1 - b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{i}(a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3) \\
&\qquad + \mathbf{j}(a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1) \\
&\qquad\quad + \mathbf{k}(a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2) \\
&= \left\{\begin{array}{l} \mathbf{i}b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\ + \ \mathbf{j}b_2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\ + \ \mathbf{k}b_3(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \end{array}\right. - \left\{\begin{array}{l} \mathbf{i}c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ + \ \mathbf{j}c_2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ + \ \mathbf{k}c_3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \end{array}\right. \\
&= (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - (c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \\
&= \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

14. La mínima distancia d entre dos rectas del espacio que se cruzan, l_1 y l_2, es la distancia de un punto cualquiera de l_1 al plano que, pasando por l_2 es paralelo a l_1; es decir, si P_1 es un punto de l_1 y P_2 de l_2, d es la proyección, prescindiendo del signo, de $\mathbf{P_1P_2}$ sobre una perpendicular común a l_1 y l_2.

Supongamos que l_1 pasa por el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y tiene la dirección de $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, y que l_2 pasa por $P_2(x_2, y_2, z_2)$ y tiene la dirección $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$.

Como $\mathbf{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$ y el vector $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ es perpendicular a l_1 y l_2, tendremos

$$d = \left|\frac{\mathbf{P_1P_2}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}\right| = \left|\frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}\right|$$

15. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P_0(1, 2, 3)$ y es paralela a $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. ¿Cuál de los puntos $A(3, 1, -1)$, $B(1/2, 9/4, 4)$, $C(2, 0, 1)$ está situado sobre dicha recta?

De (*17*), la ecuación vectorial es

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) - (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = k(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k})$$

o sea

(i) $$(x - 1)\mathbf{i} + (y - 2)\mathbf{j} + (z - 3)\mathbf{k} = k(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k})$$

la ecuación en coordenadas rectangulares es

(ii) $$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-4}$$

Aplicando (ii), se ve fácilmente que A y B pertenecen a la recta, y C, no.

En la ecuación vectorial (i), para ver si un punto pertenece a una recta, basta dar un valor a k e identificar componentes. El punto A pertenece a la recta porque

$$(3 - 1)\mathbf{i} + (1 - 2)\mathbf{j} + (-1 - 3)\mathbf{k} = k(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k})$$

para $k = 1$. Análogamente B pertenece a la recta, ya que

$$-\tfrac{1}{2}\mathbf{i} + \tfrac{1}{4}\mathbf{j} + \mathbf{k} = k(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k})$$

para $k = -\frac{1}{4}$. El punto C no pertenece a la recta porque

$$\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k} = k(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k})$$

no se verifica ningún valor de k.

16. Hallar la ecuación del plano

(*a*) que pasa por $P_0(1, 2, 3)$ y es paralelo a $3x - 2y + 4z - 5 = 0$.
(*b*) que pasa por $P_0(1, 2, 3)$ y $P_1(3, -2, 1)$, y es perpendicular al plano $3x - 2y + 4z - 5 = 0$.
(*c*) que pasa por $P_0(1, 2, 3)$, $P_1(3, -2, 1)$ y $P_2(5, 0, -4)$.

Sea $P(x, y, z)$ un punto genérico del plano buscado.

(*a*) El vector $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ es normal al plano dado y al que se quiere hallar. La ecuación vectorial de este último es

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{a} = 0$$

y en coordenadas rectangulares es

$$3(x - 1) - 2(y - 2) + 4(z - 3) = 0$$

o sea $$3x - 2y + 4z - 11 = 0$$

(*b*) El vector $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ son paralelos al plano pedido; por tanto, $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a}$ es normal a dicho plano. Su ecuación vectorial es

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a}] = 0$$

La ecuación en coordenadas rectangulares es

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = [(x - 1)\mathbf{i} + (y - 2)\mathbf{j} + (z - 3)\mathbf{k}] \cdot [-20\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 8\mathbf{k}]$$

$$= -20(x - 1) - 14(y - 2) + 8(z - 3) = 0$$

o sea $$20x + 14y - 8z - 24 = 0$$

(*c*) El vector $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0 = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ son paralelos al plano pedido, por lo cual $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0)$ es normal a dicho plano. Su ecuación vectorial es

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0)] = 0$$

y la ecuación en coordenadas rectangulares es

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & -2 \\ 4 & -2 & -7 \end{vmatrix} = [(x - 1)\mathbf{i} + (y - 2)\mathbf{j} + (z - 3)\mathbf{k}] \cdot [24\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 12\mathbf{k}]$$

$$= 24(x - 1) + 6(y - 2) + 12(z - 3) = 0$$

o sea $$4x + y + 2z - 12 = 0$$

17. Hallar la distancia d del punto $P_0(1, 2, 3)$ al plano π de ecuación $3x - 2y + 5z - 10 = 0$.

Un vector normal al plano es $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$. Tomemos el punto $P_1(2, 3, 2)$, del plano π. La distancia d, prescindiendo del signo, es la proyección de $\mathbf{P_0 P_1}$ sobre $\mathbf{a}$. Por tanto,

$$d = \left| \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \right| = \left| \frac{(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k})}{\sqrt{38}} \right| = \frac{2}{19}\sqrt{38}$$

Problemas propuestos

18. Hallar el módulo de los vectores

(*a*) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
(*b*) $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$.
(*c*) $\mathbf{c}$, que une $P_1(3, 4, 5)$ con $P_2(1, -2, 3)$. *Sol.* (*a*) $\sqrt{14}$, (*b*) $\sqrt{115}$, (*c*) $2\sqrt{11}$

19. Dados los vectores del Problema 18:

(*a*) Demostrar que **a** y **b** son perpendiculares.
(*b*) Hallar el menor de los ángulos formados por **a** y **c**. Idem de **b** y **c**.
(*c*) Hallar los ángulos que **b** forma con los ejes coordenados.
Sol. (*b*) 165°14′, 85°10′; (*c*) 73°45′, 117°47′, 32°56′.

20. Demostrar que: $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$; $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$.

21. Hallar el vector unitario en las direcciones de los vectores **a** y **b** del Problema 18.

22. Hallar los ángulos interiores β y γ del triángulo del Problema 3.
Sol. $\beta = 22°12'$, $\gamma = 90°16'$

23. Dado el cubo de arista unidad de la figura, hallar:

(*a*) el ángulo formado por su diagonal y una arista,
(*b*) el ángulo formado por su diagonal y la de una cara.
Sol. (*a*) 54°44′, (*b*) 35°16′ <

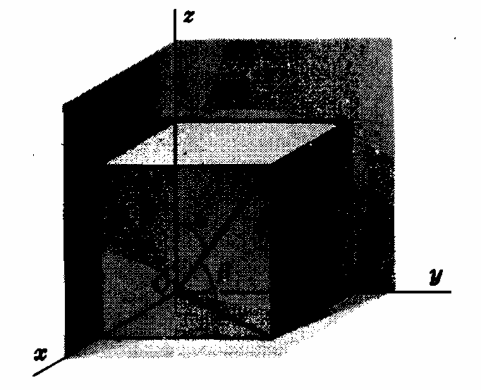
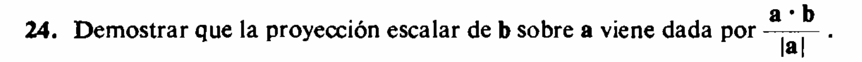


Fig. 61-14


24. Demostrar que la proyección escalar de **b** sobre **a** viene dada por $\dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$.

25. Demostrar que el vector **c** de la ecuación (3) es perpendicular a los **a** y **b**.

26. Siendo $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, calcular

(*a*) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
(*b*) [illegible]
(*c*) $\mathbf{c} \times \mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$
(*d*) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
(*e*) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$
(*f*) [illegible]
(*g*) [illegible]
(*h*) $\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -11\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$

27. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son $A(1, 2, 3)$, $B(2, -1, 1)$, $C(-2, 1, -1)$.
Ind. $|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}|$ = doble área. *Sol.* $5\sqrt{3}$.

28. Hallar el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son OA, OB, OC siendo $A(1, 2, 3)$, $B(1, 1, 2)$, $C(2, 1, 1)$.
Sol. 2.

29. Siendo $\mathbf{u} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{v} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, $\mathbf{w} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$, demostrar que

(*a*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{b}$

(*b*) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} = 0$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{v} = 0$, $\mathbf{c} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = 0$

(*c*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\}^2$

30. Demostrar que $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \{(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} + \mathbf{a})\} = 2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

31. Hallar el menor ángulo de intersección de los planos $5x - 14y + 2z - 8 = 0$ y $10x - 11y + 2z + 15 = 0$.
Ind. Hallar el ángulo formado por sus normales. *Sol.* 22°25′

32. Hallar la ecuación vectorial de la recta de intersección de los planos $x + y - z - 5 = 0$ y $4x - y - z + 2 = 0$.
Sol. $(x - 1)\mathbf{i} + (y - 5)\mathbf{j} + (z - 1)\mathbf{k} = k(-2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$, siendo $P_0(1, 5, 1)$ un punto de la recta.

33. Hallar la mínima distancia entre la recta que pasa por $A(2, -1, -1)$ y $B(6, -8, 0)$ y la que pasa por $C(2, 1, 2)$ y $D(0, 2, -1)$. *Sol.* $\sqrt{6}/6$

34. Definir una recta que pase por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ como el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ tales que $\mathbf{P_0P}$ y $\mathbf{OP_0}$ sean perpendiculares. Demostrar que su ecuación vectorial es de la forma $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{r}_0 = 0$.

35. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P_0(2, -3, 5)$ y

(*a*) es perpendicular a $7x - 4y + 2z - 8 = 0$.

(*b*) es paralela a la recta $x - y + 2z + 4 = 0$, $2x + 3y + 6z - 12 = 0$.

(*c*) pasa por $P_1(3, 6, -2)$.

Sol. (*a*) $\dfrac{x - 2}{7} = \dfrac{y + 3}{-4} = \dfrac{z - 5}{2}$ (*b*) $\dfrac{x - 2}{12} = \dfrac{y + 3}{2} = \dfrac{z - 5}{-5}$, (*c*) $\dfrac{x - 2}{1} = \dfrac{y + 3}{9} = \dfrac{z - 5}{-7}$

36. Hallar la ecuación del plano

(*a*) que pasa por $P_0(1, 2, 3)$ y es paralelo a $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

(*b*) que pasa por $P_0(2, -3, 2)$ y por la recta $6x + 4y + 3z + 5 = 0$, $2x + y + z - 2 = 0$.

(*c*) que pasa por $P_0(2, -1, -1)$ y $P_1(1, 2, 3)$ y es perpendicular a $2x + 3y - 5z - 6 = 0$.

Sol. (*a*) $4x + y + 9z - 33 = 0$, (*b*) $16x + 7y + 8z - 27 = 0$, (*c*) $9x - y + 3z - 16 = 0$.

37. Siendo $r_0 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $r_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, y $r_2 = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ tres vectores de posición, demostrar que $\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_0 = 0$. ¿Qué se puede decir de los extremos de estos vectores?
Sol. Son colineales.

38. Si P_0, P_1, P_2 son tres puntos no colineales y $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ son sus vectores de posición, calcular la posición de $\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_0$ con respecto al plano $P_0P_1P_2$. *Sol.* Normal.

39. Demostrar que: (*a*) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.
(*b*) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$.

40. Demostrar que: (*a*) Las mediatrices de un triángulo se cortan en un punto.
(*b*) Las alturas de un triángulo se cortan en un punto.

41. Sean $A(1, 2, 3)$, $B(2, -1, 5)$ y $C(4, 1, 3)$ tres vértices del paralelogramo $ABCD$. Hallar: (*a*) las coordenadas de D, (*b*) el área de $ABCD$, (*c*) el área de la proyección ortogonal de $ABCD$ sobre cada uno de los planos coordenados.
Sol. (*a*) $D(3, 4, 1)$, (*b*) $2\sqrt{26}$, (*c*) 8, 6, 2.

42. Demostrar que el área de un paralelogramo en el espacio es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las áreas de las proyecciones del paralelogramo sobre los planos coordenados.

Capítulo 62

Derivación e integración vectorial

DERIVACION. Sean

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{i}f_1(t) + \mathbf{j}f_2(t) + \mathbf{k}f_3(t) = \mathbf{i}f_1 + \mathbf{j}f_2 + \mathbf{k}f_3 \\ \mathbf{s} &= \mathbf{i}g_1(t) + \mathbf{j}g_2(t) + \mathbf{k}g_3(t) = \mathbf{i}g_1 + \mathbf{j}g_2 + \mathbf{k}g_3 \\ \mathbf{u} &= \mathbf{i}h_1(t) + \mathbf{j}h_2(t) + \mathbf{k}h_3(t) = \mathbf{i}h_1 + \mathbf{j}h_2 + \mathbf{k}h_3 \end{aligned}$$

vectores cuyas componentes son funciones de una sola variable escalar t cuyas primeras y segundas derivadas son funciones continuas.

Se puede demostrar, como se hizo en el Capítulo 18 para los vectores en el plano, que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{s} + \mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt} \tag{1}$$

Teniendo en cuenta las reglas de derivación de determinantes cuyos elementos son funciones de una sola variable,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{s}) &= \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1' & g_2' & g_3' \end{vmatrix} \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{s} + \mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{s}}{dt} \end{aligned} \tag{2}$$

y

$$\frac{d}{dt}\{\mathbf{r}\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{u})\} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{u}) + \mathbf{r}\cdot\left(\frac{d\mathbf{s}}{dt}\times\mathbf{u}\right) + \mathbf{r}\cdot\left(\mathbf{s}\times\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right) \tag{3}$$

Estas fórmulas también se pueden establecer desarrollando los productos indicados antes de derivar.

De (*2*) se deduce

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{\mathbf{r}\times(\mathbf{s}\times\mathbf{u})\} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times(\mathbf{s}\times\mathbf{u}) + \mathbf{r}\times\frac{d}{dt}(\mathbf{s}\times\mathbf{u}) \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times(\mathbf{s}\times\mathbf{u}) + \mathbf{r}\times\left(\frac{d\mathbf{s}}{dt}\times\mathbf{u}\right) + \mathbf{r}\times\left(\mathbf{s}\times\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

CURVAS EN EL ESPACIO. Consideremos la curva

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t) \tag{5}$$

siendo las primeras y segundas derivadas de $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, funciones continuas. Sea el vector de posición de un punto genérico $P(x, y, z)$ de la curva

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Como se vio en el Capítulo 18, $\mathbf{t} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ es el vector tangente unitario a la curva. Llamando $\mathbf{R}$ al vector de posición de un punto (X, Y, Z) de la tangente en P, la ecuación vectorial de esta recta es (ver Capítulo 61)

$$\mathbf{R} - \mathbf{r} = k\mathbf{t} \qquad (k, \text{ un escalar variable}) \tag{6}$$

y la ecuación en coordenadas rectangulares

$$\frac{X - x}{\dfrac{dx}{ds}} = \frac{Y - y}{\dfrac{dy}{ds}} = \frac{Z - z}{\dfrac{dz}{ds}}$$

siendo $\left[\dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}, \dfrac{dz}{ds}\right]$ sus cosenos directores. En la ecuación correspondiente, (*2*) del Capítulo 59, los cosenos directores eran $\left[\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right]$

La ecuación vectorial del plano normal a la curva en el punto P viene dada por

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} = 0 \tag{7}$$

siendo **R** el vector de posición de un punto genérico del plano.

También, como se vio en el Capítulo 18, $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$ es un vector perpendicular a **t**. Llamando **n** al vector unitario con la dirección y sentido de $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$, tendremos

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = |K|\,\mathbf{n}$$

siendo $|K|$ el módulo de la curvatura en P. El vector unitario

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|K|}\frac{d\mathbf{t}}{ds} \tag{8}$$

se denomina *normal principal* a la curva en P.

El vector unitario **b** en P, definido por

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \tag{9}$$

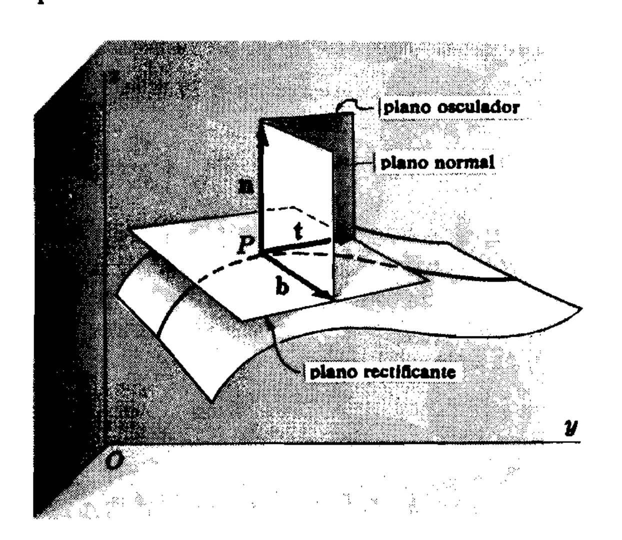


Fig. 62-1

recibe el nombre de *binormal* en P. Los tres vectores **t**, **n**, **b** forman en P un triedro trirrectángulo a derechas que constituye un sistema de coordenadas muy utilizado en el estudio de una curva en las proximidades de uno de sus puntos. (Ver Problemas 1-2.)

En un punto genérico P de una curva en el espacio los vectores **t**, **n**, **b** determinan tres planos mutuamente perpendiculares:

(i) el *plano osculador*, formado por **t** y **n**, de ecuación

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{b} = 0$$

(ii) el *plano normal*, formado por **n** y **b**, de ecuación

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} = 0$$

(iii) el *plano rectificante*, formado por **t** y **b**, de ecuación

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = 0$$

En cada una de las ecuaciones, **R** es el vector de posición de un punto genérico de cada uno de los planos.

SUPERFICIES. La ecuación de una superficie es $F(x, y, z) = 0$ (ver Capítulo 59). Expresando x, y, z en función de dos variables independientes o parámetros u y v se obtienen las ecuaciones paramétricas, por ejemplo,

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v) \tag{10}$$

Si se sustituye u por una constante u_0 las ecuaciones (10) se transforman en

$$x = f_1(u_0, v), \quad y = f_2(u_0, v), \quad z = f_3(u_0, v) \tag{11}$$

que representan una curva particular de (curva u) la superficie. Análogamente, sustituyendo v por el valor constante v_0, las ecuaciones (10) se transforman en

$$x = f_1(u, v_0), \quad y = f_2(u, v_0), \quad z = f_3(u, v_0) \tag{12}$$

que representan otra curva particular de (curva v) la superficie. Ambas curvas se cortan en un punto de la superficie que se deduce al sustituir, simultáneamente, $u = u_0$, $v = v_0$ en (10).

El vector de posición de un punto genérico P de la superficie viene dado por

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{i}f_1(u, v) + \mathbf{j}f_2(u, v) + \mathbf{k}f_3(u, v) \tag{13}$$

Sean (*11*) y (*12*) las ecuaciones de las curvas u y v que pasan por P. En estas condiciones

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial v}f_1(u_0, v) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial v}f_2(u_0, v) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial v}f_3(u_0, v)$$

es un vector tangente a la curva u en P y

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial u}f_1(u, v_0) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial u}f_2(u, v_0) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial u}f_3(u, v_0)$$

es un vector tangente a la curva v en dicho punto. Las dos tangentes determinan un plano que es, por consiguiente, el plano tangente a la superficie en el punto P. Es evidente que una normal a este plano viene dada por

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \tag{14}$$

El vector *normal unitario* a la superficie en P es

$$\mathbf{n} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|} \tag{15}$$

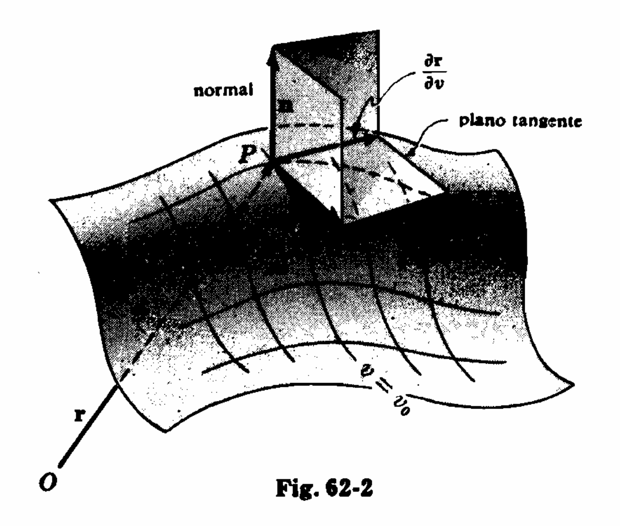


Fig. 62-2

Llamando **R** al vector de posición de un punto genérico de la normal a la superficie en P, resulta la ecuación vectorial de esta recta

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) = k\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) \tag{16}$$

Asimismo, llamando **R** al vector de posición de un punto genérico del plano tangente a la superficie en el punto P, resulta la ecuación vectorial de dicho plano de la forma

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) = 0 \tag{17}$$

[Ver problema 7]

OPERADOR ∇. En el Capítulo 60 hemos visto que la derivada de la función $z = f(x, y)$ en un punto cualquiera (x, y) en una dirección que forme un ángulo θ con el semieje x positivo, viene dada por

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\theta$$

El segundo miembro se puede expresar en la forma siguiente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\theta = \left(\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot(\mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\operatorname{sen}\theta) \tag{18}$$

Ahora bien, $\mathbf{a} = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\operatorname{sen}\theta$ es un vector unitario cuya dirección forma un ángulo θ con el semieje x positivo. El otro factor, expresado en la forma

$$\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\right)f$$

sugiere la definición de un operador diferencial vectorial, ∇ (nabla), dado por

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} \tag{19}$$

En análisis vectorial la expresión $\nabla f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}$ recibe el nombre de *gradiente* de f y se escribe abreviadamente *grad f*. De (18) se deduce que la componente de ∇f en la dirección de un vector *unitario* $\mathbf{a}$ es la derivada de f en la dirección de dicho vector $\mathbf{a}$.

Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ el vector de posición de $P(x, y)$. Como

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\left(\mathbf{i}\frac{dx}{ds} + \mathbf{j}\frac{dy}{ds}\right)$$

$$= \nabla f\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

y

$$\left|\frac{df}{ds}\right| = |\nabla f|\cos\phi$$

siendo ϕ el ángulo formado por los vectores ∇f y $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$, se desprende que $\frac{df}{ds}$ es máximo para $\cos\phi = 1$, es decir, cuando ∇f y $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ tienen la misma dirección. Por tanto, la derivada direccional máxima en P es $|\nabla f|$, y su dirección es la de ∇f. (Ver Problema 4.)

Dada la función $w = F(x, y, z)$,

$$\nabla F = \mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial z}$$

y la derivada de $F(x, y, z)$ en un punto arbitrario según la dirección $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ es

$$\frac{dF}{ds} = \nabla F\cdot\mathbf{a} \tag{20}$$

Como en el caso de dos variables, $|\nabla F|$ es la derivada direccional máxima de $F(x, y, z)$ en el punto $P(x, y, z)$ y su dirección es la de ∇F. (Ver Problema 5.)

Consideremos, ahora, la superficie $F(x, y, z) = 0$. La ecuación del plano tangente a la superficie en uno de sus puntos $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es

$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y} + (z - z_0)\frac{\partial F}{\partial z}$$
$$= [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}]\cdot\left[\mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial z}\right] = 0 \tag{21}$$

en donde las derivadas parciales están particularizadas en P_0. El primer factor es un vector arbitrario que pasa por P_0 y está contenido en el plano tangente; el segundo factor, ∇F en P_0, es normal al plano tangente, es decir, normal a la superficie en P_0. (Ver Problemas 6-7.)

DIVERGENCIA Y ROTACIONAL. La *divergencia* de un vector $\mathbf{F} = \mathbf{i}f_1\ (x, y, z) + \mathbf{j}f_2(x, y, z) + \mathbf{k}f_3\ (x, y, z)$, se define por

$$\operatorname{div} \mathbf{F} \;=\; \nabla \cdot \mathbf{F} \;=\; \frac{\partial}{\partial x} f_1 + \frac{\partial}{\partial y} f_2 + \frac{\partial}{\partial z} f_3 \qquad (22)$$

El rotacional del vector **F** se define por

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} \;=\; \nabla \times \mathbf{F} \;=\; \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \qquad (23)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y} f_3 - \frac{\partial}{\partial z} f_2\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z} f_1 - \frac{\partial}{\partial x} f_3\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} f_2 - \frac{\partial}{\partial y} f_1\right)\mathbf{k}$$

(Ver Problema 8.)

INTEGRACION. El estudio de la integración vectorial lo limitaremos aquí a los conceptos de integral de un vector y de integral curvilínea. Como ejemplo del primer concepto, sea

$$\mathbf{F}(u) = \mathbf{i}\cos u + \mathbf{j}\operatorname{sen} u + au\,\mathbf{k}$$

un vector función de una variable escalar u. En estas condiciones

$$\mathbf{F}'(u) \;=\; -\mathbf{i}\operatorname{sen} u + \mathbf{j}\cos u + a\,\mathbf{k}$$

y

$$\begin{aligned} \int \mathbf{F}'(u)\,du &= \int (-\mathbf{i}\operatorname{sen} u + \mathbf{j}\cos u + a\,\mathbf{k})\,du \\ &= \mathbf{i}\int -\operatorname{sen} u\,du + \mathbf{j}\int \cos u\,du + \mathbf{k}\int a\,du \\ &= \mathbf{i}\cos u + \mathbf{j}\operatorname{sen} u + au\,\mathbf{k} + \mathbf{c} \\ &= \mathbf{F}(u) + \mathbf{c} \end{aligned}$$

siendo **c** un vector constante arbitrario independiente de u. También,

$$\int_{u=a}^{u=b} \mathbf{F}'(u)\,du \;=\; \Big[\mathbf{F}(u) + \mathbf{c}\Big]_{u=a}^{u=b} \;=\; \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a)$$

(Ver Problemas 9-10.)

INTEGRAL CURVILINEA. Consideremos dos puntos del espacio, P_0 y P_1, unidos por un arco C que puede ser un segmento rectilíneo, una porción de una sola curva $x = g_1(t)$, $y = g_2(t)$, $z = g_3(t)$, o bien estar formado por varios subarcos de curvas distintas. En cualquier caso se supone que el arco C es continuo en todos sus puntos y que no se corta consigo mismo. Consideremos, además, una función vectorial

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}f_1(x, y, z) + \mathbf{j}f_2(x, y, z) + \mathbf{k}f_3(x, y, z)$$

que en la región del espacio próximo a C y en particular en todos los puntos de C define un vector conocido (en módulo, dirección y sentido). Representemos por

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \qquad (24)$$

el vector de posición de un punto genérico $P(x, y, z)$ de C. La integral

$$\int_{C\ P_0}^{P_1} \left(\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) ds \;=\; \int_{C\ P_0}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad (25)$$

se denomina integral curvilínea, es decir, la integral a lo largo de la trayectoria C dada.

Supongamos que $\mathbf{F}$ es un vector representativo de una fuerza dada. El trabajo realizado al desplazar una partícula a lo largo de un camino elemental $d\mathbf{r}$ viene dado (ver Problema 9, Capítulo 18) por

$$|\mathbf{F}|\ |d\mathbf{r}| \cos\theta \ = \ \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

y el trabajo necesario para desplazar la partícula desde P_0 a P_1, a lo largo del arco C es

$$\int_{C\ P_0}^{P_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

De (*24*),

$$d\mathbf{r} \ = \ \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz$$

y (*25*) toma la forma

$$\int_{C\ P_0}^{P_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \ = \ \int_{C\ P_0}^{P_1} (f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz) \qquad (26)$$

(Ver Problema 11.)

Problemas resueltos

1. Una partícula se mueve sobre la curva $x = 4\cos t$, $y = 4\,\text{sen}\,t$, $z = 6t$. Hallar el módulo de la velocidad y de la aceleración en el tiempo $t = 0$ y $t = \frac{1}{2}\pi$.

Sea $P(x, y, z)$ un punto de la curva y

$$\mathbf{r} \ = \ x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \ = \ 4\mathbf{i}\cos t + 4\mathbf{j}\,\text{sen}\,t + 6\mathbf{k}\,t$$

su vector de posición. Tendremos

$$\mathbf{v} \ = \ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \ = \ -4\mathbf{i}\,\text{sen}\,t + 4\mathbf{j}\cos t + 6\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} \ = \ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \ = \ -4\mathbf{i}\cos t - 4\mathbf{j}\,\text{sen}\,t$$

Para $t = 0$: $\mathbf{v} = 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$; $|\mathbf{v}| = \sqrt{16+36} = 2\sqrt{13}$
$\mathbf{a} = -4\mathbf{i}$; $|\mathbf{a}| = 4$

Para $t = \frac{1}{2}\pi$: $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{k}$; $|\mathbf{v}| = \sqrt{16+36} = 2\sqrt{13}$
$\mathbf{a} = -4\mathbf{j}$; $|\mathbf{a}| = 4$

2. En el punto $(1, 1, 1)$ para $t = 1$ de la curva alabeada $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, calcular

(*a*) las ecuaciones de la tangente y del plano normal,

(*b*) el vector tangente unitario, la normal principal y la binormal,

(*c*) las ecuaciones de la normal principal y de la binormal.

$$\mathbf{r} \ = \ t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \ = \ \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

$$\frac{ds}{dt} \ = \ \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| \ = \ \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$\mathbf{t} \ = \ \frac{d\mathbf{r}}{ds} \ = \ \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} \ = \ \frac{\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}$$

Para $t = 1$: $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{t} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$.

(*a*) Si **R** es el vector de posición de un punto genérico (X, Y, Z) de la tangente, su ecuación es

$$\mathbf{R} - \mathbf{r} = k\mathbf{t}$$

o
$$(X-1)\mathbf{i} + (Y-1)\mathbf{j} + (Z-1)\mathbf{k} = \frac{k}{\sqrt{14}}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})$$

y en coordenadas rectangulares

$$\frac{X-1}{1} = \frac{Y-1}{2} = \frac{Z-1}{3}$$

Si **R** es el vector de posición de un punto genérico (X, Y, Z) del plano normal, su ecuación vectorial es

$$(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot\mathbf{t} = 0$$

o
$$[(X-1)\mathbf{i} + (Y-1)\mathbf{j} + (Z-1)\mathbf{k}]\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}) = 0$$

y en coordenadas rectangulares

$$(X-1) + 2(Y-1) + 3(Z-1) = X + 2Y + 3Z - 6 = 0$$

[Ver Problema 2(*a*), Capítulo 59.]

(*b*)
$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{(-4t-18t^3)\mathbf{i} + (2-18t^4)\mathbf{j} + (6t+12t^3)\mathbf{k}}{(1+4t^2+9t^4)^2}$$

Para $t = 1$: $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds} = \dfrac{-11\mathbf{i}-8\mathbf{j}+9\mathbf{k}}{98}$; $\left|\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}\right| = \dfrac{1}{7}\sqrt{\dfrac{19}{14}} = |K|$. Por tanto

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|K|}\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{-11\mathbf{i}-8\mathbf{j}+9\mathbf{k}}{\sqrt{266}}$$

y
$$\mathbf{b} = \mathbf{t}\times\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{266}}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -11 & -8 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{19}}(3\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

(*c*) Si **R** es el vector de posición de un punto genérico (X, Y, Z) de la normal principal, su ecuación vectorial es

$$\mathbf{R} - \mathbf{r} = k\mathbf{n}$$

es decir,
$$(X-1)\mathbf{i} + (Y-1)\mathbf{j} + (Z-1)\mathbf{k} = k\frac{-11\mathbf{i}-8\mathbf{j}+9\mathbf{k}}{\sqrt{266}}$$

y en coordenadas rectangulares

$$\frac{X-1}{-11} = \frac{Y-1}{-8} = \frac{Z-1}{9}$$

Si **R** es el vector de posición de un punto genérico (X, Y, Z) de la binormal, su ecuación es

$$\mathbf{R} - \mathbf{r} = k\cdot\mathbf{b}$$

es decir,
$$(X-1)\mathbf{i} + (Y-1)\mathbf{j} + (Z-1)\mathbf{k} = k\frac{3\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{19}}$$

y en coordenadas rectangulares,

$$\frac{X-1}{3} = \frac{Y-1}{-3} = \frac{Z-1}{1}$$

9. Hallar la ecuación del plano tangente y de la normal a la superficie $x = 2(u+v)$, $y = 3(u-v)$, $z = uv$ en el punto $P(u = 2, v = 1)$.

$$\mathbf{r} = 2(u+v)\mathbf{i} + 3(u-v)\mathbf{j} + uv\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + v\mathbf{k}, \qquad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + u\mathbf{k}$$

En P: $\mathbf{r} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = 9\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$$

Las ecuaciones vectorial y en coordenadas rectangulares de la normal son

$$\mathbf{R} - \mathbf{r} \;=\; k\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

o $$(X-6)\mathbf{i} + (Y-3)\mathbf{j} + (Z-2)\mathbf{k} \;=\; k(9\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 12\mathbf{k})$$

y $$\frac{X-6}{9} + \frac{Y-3}{-2} \;=\; \frac{Z-2}{-12}$$

Las ecuaciones vectorial y en coordenadas rectangulares del plano tangente son

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) \;=\; 0$$

es decir, $$[(X-6)\mathbf{i} + (Y-3)\mathbf{j} + (Z-2)\mathbf{k}] \cdot [9\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 12\mathbf{k}] \;=\; 0$$

y $$9X - 2Y - 12Z - 24 \;=\; 0$$

4. (*a*) Hallar la derivada de $f(x, y) = x^2 - 6y^2$ en el punto (7, 2) en la dirección $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

(*b*) Hallar el máximo valor de la derivada direccional en el punto (7, 2).

(*a*) $$\nabla f \;=\; \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\right)(x^2 - 6y^2) \;=\; \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 6y^2) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 6y^2)$$
$$= \; 2x\mathbf{i} - 12y\mathbf{j}$$

y $$\mathbf{a} \;=\; \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\operatorname{sen}\theta \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

En (7, 2): $\nabla f \;=\; 14\mathbf{i} - 24\mathbf{j}$ y

$$\nabla f \cdot \mathbf{a} \;=\; (14\mathbf{i} - 24\mathbf{j})\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right) \;=\; 7\sqrt{2} - 12\sqrt{2} \;=\; -5\sqrt{2}$$

es la derivada pedida.

(*b*) En (7, 2), $\nabla f = 14\mathbf{i} - 24\mathbf{j}$ y $|\nabla f| = \sqrt{14^2 + 24^2} = 2\sqrt{193}$ es la máxima derivada direccional, ya que

$$\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \;=\; \frac{7}{\sqrt{193}}\mathbf{i} - \frac{12}{\sqrt{193}}\mathbf{j} \;=\; \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\operatorname{sen}\theta$$

la dirección es $\theta = 300°15'$. (Ver Problemas 2 y 6, Capítulo 60.)

5. (*a*) Hallar la derivada de $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 4z^2$ en $P(1, 1, -1)$ en la dirección $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

(*b*) Hallar el máximo valor de la derivada direccional en P.

$$\nabla F \;=\; \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(x^2 - 2y^2 + 4z^2) \;=\; 2x\mathbf{i} - 4y\mathbf{j} + 8z\mathbf{k}$$

En (1, 1, −1), $\nabla F = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$.

(*a*) $\nabla F \cdot \mathbf{a} = (2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) = 8$

(*b*) En P, $|\nabla F| = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$. La dirección es $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$.

6. Dada la superficie $F(x, y, z) = x^3 + 3xyz + 2y^3 - z^3 - 5 = 0$ y uno de sus puntos $P_0(1, 1, 1)$, hallar

(*a*) un vector unitario normal a la superficie en P_0,

(*b*) la ecuación de la normal en P_0,

(*c*) la ecuación del plano tangente en P_0.

$$\nabla F \;=\; (3x^2 + 3yz)\mathbf{i} + (3xz + 6y^2)\mathbf{j} + (3xy - 3z^2)\mathbf{k}$$

En $P_0(1, 1, 1)$, $\nabla F = 6\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$.

(*a*) $\dfrac{\nabla F}{|\nabla F|} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} + \dfrac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$ es un vector unitario normal en P_0; otro es $-\dfrac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} - \dfrac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$.

(*b*) La ecuación de la normal es $\dfrac{X-1}{2} = \dfrac{Y-1}{3}$, $Z = 1$.

(*c*) La ecuación del plano tangente es $2(X-1) + 3(Y-1) = 2X + 3Y - 5 = 0$.

7. Hallar el ángulo de intersección de las superficies

$$F_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \quad \text{y} \quad F_2 = x^2 + 2y^2 - z - 8 = 0$$

en el punto (2, 1, —2).

$$\nabla F_1 = \nabla(x^2 + y^2 + z^2 - 9) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$
$$\nabla F_2 = \nabla(x^2 + 2y^2 - z - 8) = 2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

En (2, 1, —2) $\nabla F_1 = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ y $\nabla F_2 = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Como $\nabla F_1 \cdot \nabla F_2 = |\nabla F_1|\,|\nabla F_2| \cos\theta$, siendo θ el ángulo pedido, tendremos,

$$(4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \cdot (4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}) = |4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}|\,|4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}| \cos\theta$$

de donde $\cos\theta = \frac{14}{99}\sqrt{33} = 0{,}81236$, y $\theta = 35°40'$.

8. Siendo $\mathbf{B} = xy^2\mathbf{i} + 2x^2yz\mathbf{j} - 3yz^2\mathbf{k}$, hallar (*a*) div **B**, (*b*) rot **B**.

(*a*)
$$\text{div}\,\mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (xy^2\mathbf{i} + 2x^2yz\mathbf{j} - 3yz^2\mathbf{k})$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2x^2yz) + \frac{\partial}{\partial z}(-3yz^2)$$
$$= y^2 + 2x^2z - 6yz$$

(*b*)
$$\text{rot}\,\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & 2x^2yz & -3yz^2 \end{vmatrix}$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-3yz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2x^2yz)\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(xy^2) - \frac{\partial}{\partial x}(-3yz^2)\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x^2yz) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2)\right]\mathbf{k}$$
$$= -(3z^2 + 2x^2y)\mathbf{i} + (4xyz - 2xy)\mathbf{k}$$

9. Siendo $\mathbf{F}(u) = u\mathbf{i} + (u^2 - 2u)\mathbf{j} + (3u^2 + u^3)\mathbf{k}$, calcular (*a*) $\int \mathbf{F}(u)\,du$ y (*b*) $\int_0^1 \mathbf{F}(u)\,du$.

(*a*)
$$\int \mathbf{F}(u)\,du = \int [u\mathbf{i} + (u^2 - 2u)\mathbf{j} + (3u^2 + u^3)\mathbf{k}]\,du$$
$$= \mathbf{i}\int u\,du + \mathbf{j}\int (u^2 - 2u)\,du + \mathbf{k}\int (3u^2 + u^3)\,du$$
$$= \frac{u^2}{2}\mathbf{i} + \left(\frac{u^3}{3} - u^2\right)\mathbf{j} + \left(u^3 + \frac{u^4}{4}\right)\mathbf{k} + \mathbf{c}$$

siendo $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$ con c_1, c_2, c_3 escalares arbitrarios.

(*b*)
$$\int_0^1 \mathbf{F}(u)\,du = \left[\frac{u^2}{2}\mathbf{i} + \left(\frac{u^3}{3} - u^2\right)\mathbf{j} + \left(u^3 + \frac{u^4}{4}\right)\mathbf{k}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{5}{4}\mathbf{k}$$

10. La aceleración de una partícula en el tiempo $t \geq 0$ viene dada por $\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = e^t\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Si para $t = 0$, el desplazamiento es $\mathbf{r} = 0$ y la velocidad es $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, hallar **r** y **v** en el instante t.

$$\mathbf{v} = \int \mathbf{a}\,dt = \mathbf{i}\int e^t\,dt + \mathbf{j}\int e^{2t}\,dt + \mathbf{k}\int dt$$
$$= e^t\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}e^{2t}\mathbf{j} + t\mathbf{k} + \mathbf{c}_1$$

Para $t = 0$: $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{c}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{c}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{j}$. De donde

$$\mathbf{v} = e^t\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}(e^{2t} + 1)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{r} = \int \mathbf{v}\,dt = e^t\mathbf{i} + (\tfrac{1}{4}e^{2t} + \tfrac{1}{2}t)\mathbf{j} + \tfrac{1}{2}t^2\mathbf{k} + \mathbf{c}_2$$

Para $t = 0$: $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \frac{1}{4}\mathbf{j} + \mathbf{c}_2 = 0$ y $\mathbf{c}_2 = -\mathbf{i} - \frac{1}{4}\mathbf{j}$. Por tanto,

$$\mathbf{r} = (e^t - 1)\mathbf{i} + (\tfrac{1}{4}e^{2t} + \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4})\mathbf{j} + \tfrac{1}{2}t^2\mathbf{k}$$

11. Hallar el trabajo realizado por una fuerza $\mathbf{F} = (x + yz)\mathbf{i} + (y + xz)\mathbf{j} + (z + xy)\mathbf{k}$ para desplazar una partícula desde el origen a $C(1, 1, 1)$

(*a*) a lo largo de la recta OC

(*b*) a lo largo de la curva $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$

(*c*) a lo largo de las rectas O a $A(1, 0, 0)$, A a $B(1, 1, 0)$, B a C.

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= [(x + yz)\mathbf{i} + (y + xz)\mathbf{j} + (z + xy)\mathbf{k}] \cdot [\mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz] \\ &= (x + yz)\,dx + (y + xz)\,dy + (z + xy)\,dz\end{aligned}$$

(*a*) Para la recta OC, $x = y = z$ y $dx = dy = dz$.

La integral a calcular es

$$W = \int_{C\,(0,0,0)}^{(1,1,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 3 \int_0^1 (x + x^2)\,dx = \left[\left(\frac{3}{2}x^2 + x^3\right)\right]_0^1 = \frac{5}{2}$$

(*b*) A lo largo de la curva: $x = t$, $dx = dt$; $y = t^2$, $dy = 2t\,dt$; $z = t^3$, $dz = 3t^2\,dt$. En O, $t = 0$; y en C, $t = 1$.

$$\begin{aligned}W &= \int_0^1 (t + t^5)\,dt + (t^2 + t^4)2t\,dt + (t^3 + t^3)3t^2\,dt \\ &= \int_0^1 (t + 2t^3 + 9t^5)\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{3}{2}t^6\right]_0^1 = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

(*c*) De O a A: $y = z = 0$, $dy = dz = 0$ y x varía de 0 a 1.

De A a B: $x = 1$, $z = 0$, $dx = dz = 0$ e y varía de 0 a 1.

De B a C: $x = y = 1$, $dx = dy = 0$ y z varía de 0 a 1.

Ahora bien, para la distancia de O a A, $W_1 = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$; para la distancia de A o B, $W_2 = \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{2}$; para la distancia de B a C, $W_3 = \int_0^1 (z + 1)dz = \frac{3}{2}$. Por tanto, $W = W_1 + W_2 + W_3 = 5/2$.

En general, el valor de la integral curvilínea depende del camino de integración. En este caso, sin embargo, no es así, es decir, el valor de la integral resulta independiente del camino de integración. Se demuestra que una integral curvilínea $\int_C (f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz)$ es independiente del camino de integración siempre que exista una función $\phi(x, y, z)$ tal, que

$$d\phi = f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz$$

Obsérvese que el integrando de este problema es

$$(x + yz)\,dx + (y + xz)\,dy + (z + xy)\,dz = d\{\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + xyz\}$$

Problemas propuestos

12. Hallar $\dfrac{d\mathbf{s}}{dt}$ y $\dfrac{d^2\mathbf{s}}{dt^2}$, siendo:

(*a*) $\mathbf{s} = (t + 1)\mathbf{i} + (t^2 + t + 1)\mathbf{j} + (t^3 + t^2 + t + 1)\mathbf{k}$

(*b*) $\mathbf{s} = \mathbf{i}e^t \cos 2t + \mathbf{j}e^t \operatorname{sen} 2t + t^2\mathbf{k}$

Sol. (*a*) $\mathbf{i} + (2t + 1)\mathbf{j} + (3t^2 + 2t + 1)\mathbf{k}$; $2\mathbf{j} + (6t + 2)\mathbf{k}$

(*b*) $e^t(\cos 2t - 2 \operatorname{sen} 2t)\mathbf{i} + e^t(\operatorname{sen} 2t + 2 \cos 2t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$

$e^t(-4 \operatorname{sen} 2t - 3 \cos 2t)\mathbf{i} + e^t(-3 \operatorname{sen} 2t + 4 \cos 2t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

13. Siendo: $\mathbf{a} = u\mathbf{i} + u^2\mathbf{j} + u^3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} \cos u + \mathbf{j} \operatorname{sen} u$, $\mathbf{c} = 3u^2\mathbf{i} - 4u\mathbf{k}$, calcular, en primer lugar, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ y hallar sus derivadas. Aplicando luego las fórmula directamente, hallar las derivadas.

14. Una partícula se mueve a lo largo de la curva $x = 3t^2$, $y = t^2 - 2t$, $z = t^3$, siendo t el tiempo. Hallar: (*a*) los módulos de la velocidad y de la aceleración en el instante $t = 1$, (*b*) las componentes de la velocidad y de la aceleración, en dicho instante $t = 1$, en la dirección del vector $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. *Sol.* (*a*) $|\mathbf{v}| = 3\sqrt{5}$, $|\mathbf{a}| = 2\sqrt{19}$; (*b*) 6, 22/3.

15. Hallar, mediante el cálculo vectorial, las ecuaciones de la tangente y del plano normal a las curvas del Problema 11, Capítulo 59.

16. Resolver el Problema 12, Capítulo 59, aplicando el cálculo vectorial.

17. Demostrar que las superficies $x = u$, $y = 5u - 3v^2$, $z = v$ y $x = u$, $y = v$, $z = \dfrac{uv}{4u - v}$ son perpendiculares en $P(1, 2, 1)$.

18. Hallar, aplicando el cálculo vectorial, las ecuaciones del plano tangente y de la normal a la superficie.

(*a*) $x = u$, $y = v$, $z = uv$ en el punto $(u, v) = (3, -4)$.

(*b*) $x = u$, $y = v$, $z = u^2 - v^2$ en el punto $(u, v) = (2, 1)$.

Sol. (*a*) $4X - 3Y + Z - 12 = 0$, $\dfrac{X - 3}{-4} = \dfrac{Y + 4}{3} = \dfrac{Z + 12}{-1}$

(*b*) $4X - 2Y - Z - 3 = 0$, $\dfrac{X - 2}{-4} = \dfrac{Y - 1}{2} = \dfrac{Z - 3}{1}$

19. (*a*) Hallar las ecuaciones de los planos osculador y rectificante a la curva del Problema 2 en el punto dado.

(*b*) Hallar las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante a $x = 2t - t^2$, $y = t^2$, $z = 2t + t^2$ en $t = 1$.

Sol. (*a*) $3X - 3Y + Z - 1 = 0$, $11X + 8Y - 9Z - 10 = 0$

(*b*) $X + 2Y - Z = 0$, $Y + 2Z - 7 = 0$, $5X - 2Y + Z - 6 = 0$.

20. Demostrar que la ecuación del plano osculador a una curva en P viene dado también por

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right) = 0$$

21. Resolver los Problemas 16 y 17, Capítulo 60, aplicando el cálculo vectorial.

22. Calcular $\displaystyle\int_a^b \mathbf{F}(u)\, du$, siendo

(*a*) $\mathbf{F}(u) = u^3\mathbf{i} + (3u^2 - 2u)\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; $a = 0$, $b = 2$

(*b*) $\mathbf{F}(u) = e^u\mathbf{i} + e^{-2u}\mathbf{j} + u\mathbf{k}$; $a = 0$, $b = 1$

Sol. (*a*) $4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, (*b*) $(e - 1)\mathbf{i} + \frac{1}{2}(1 - e^{-2})\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$.

23. La aceleración de una partícula en función del tiempo viene dada por $\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = (t + 1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (t^2 - 2)\mathbf{k}$. Si para $t = 0$, el desplazamiento es $\mathbf{r} = 0$ y la velocidad es $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$, hallar $\mathbf{v}$ y $\mathbf{r}$ en función del tiempo t.

Sol. $\mathbf{v} = (\frac{1}{2}t^2 + t + 1)\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j} + (\frac{1}{3}t^3 - 2t - 1)\mathbf{k}$, $\mathbf{r} = (\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t)\mathbf{i} + \frac{1}{12}t^4\mathbf{j} + (\frac{1}{12}t^4 - t^2 - t)\mathbf{k}$

24. En los casos siguientes, calcular el trabajo realizado por la fuerza dada $\mathbf{F}$ para mover una partícula desde $O(0, 0, 0)$ a $C(1, 1, 1)$ a lo largo de (i) la recta $x = y = z$, (ii) la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, (iii) las rectas desde O a $A(1, 0, 0)$, A a $B(1, 1, 0)$, B a C.

(*a*) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$

(*b*) $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$

(*c*) $\mathbf{F} = (x + xyz)\mathbf{i} + (y + x^2z)\mathbf{j} + (z + x^2y)\mathbf{k}$

Sol. (*a*) 3, (*b*) 3, (*c*) 9/4, 33/14, 5/2.

25. Siendo $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, demostrar que (*a*) div $\mathbf{r} = 3$, (*b*) rot $\mathbf{r} = 0$.

26. Si $f = f(x, y, z)$ tiene derivadas parciales de al menos orden dos, demostrar que

(*a*) $\nabla \times \nabla f = 0$, (*b*) $\nabla \cdot (\nabla \times f) = 0$, (*c*) $\nabla \cdot \nabla f = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f$.

Capítulo 63

Integrales doble e iterada

LA INTEGRAL SIMPLE, $\int_a^b f(x)\,dx$, de una función $y = f(x)$ continua en el intervalo finito $a \le x \le b$ del eje x, se definió en el Capítulo 33 de la forma siguiente:

(*a*) se divide el intervalo dado, $a \le x \le b$, en n subintervalos, $h_1, h_2, \ldots, h_n$, de amplitudes $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \ldots, \Delta_n x$, respectivamente, siendo λ_n el mayor de los $\Delta_k x$.

(*b*) se eligen los puntos x_1 en h_1, x_2 en $h_2, \ldots, x_n$ en h_n y se forma la suma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x$

(*c*) se hace crecer el número de subintervalos de forma que $\lambda_n \to 0$ cuando $n \to \infty$,

(*d*) $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x.$

INTEGRAL DOBLE. Consideremos una función $z = f(x, y)$ continua en una región finita R del plano xOy. Dividamos esta región (ver Fig. 63-1) en n subregiones $R_1, R_2, \ldots, R_n$, de áreas $\Delta_1 A, \Delta_2 A, \ldots, \Delta_n A$, respectivamente; en cada subregión R_k tomemos un punto $P_k(x_k, y_k)$ y formemos la suma

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta_k A = f(x_1, y_1)\,\Delta_1 A + f(x_2, y_2)\,\Delta_2 A + \cdots + f(x_n, y_n)\,\Delta_n A \qquad (1)$$

Definimos el diámetro de una subregión como la mayor de las distancias entre dos puntos cualesquiera, interiores o en la periferia, de ella y llamemos λ_n al máximo diámetro de las subregiones. Si suponemos que el número de subregiones crece de forma que $\lambda_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, se define la *integral doble* de la función $f(x, y)$ en la región R, por

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta_k A \qquad (2)$$

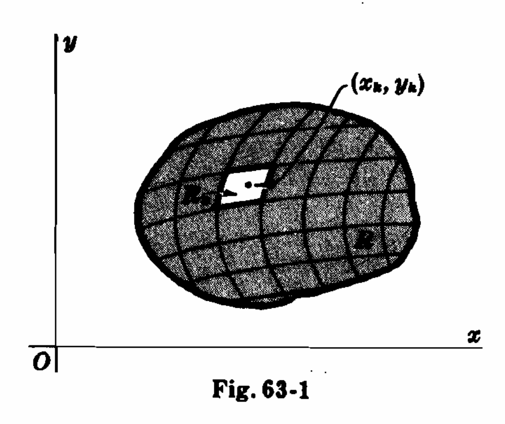


Fig. 63-1

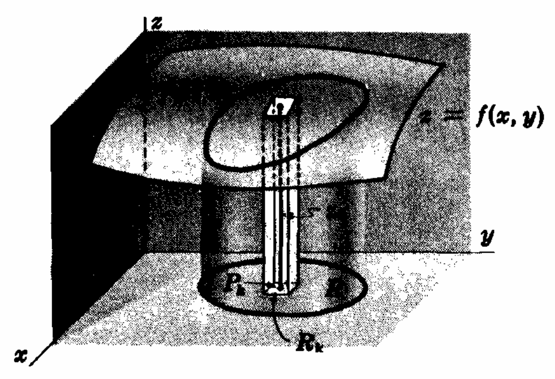


Fig. 63-2

Si $z = f(x, y)$ no se hace negativo en ningún punto de R (ver Fig. 63-2), la integral doble (*2*) se puede interpretar como un volumen. Un término cualquiera, $f(x_k, y_k)\,\Delta_k A$ de (*1*), representa el volumen de una columna vertical de bases paralelas de área $\Delta_k A$ y altura z_k, medida sobre la ver

tical levantada desde el punto elegido P_k hasta la superficie $z = f(x, y)$. También representa, aproximadamente el volumen de una columna vertical cuyas bases son, la inferior, la subregión R_k y la superior, la proyección de R_k sobre la superficie. Así, pues, (*1*) es una aproximación del volumen «limitado por la superficie» (es decir, el volumen cuya base inferior está situada en el plano xOy y la superior es la superficie generada al mover una recta paralelamente al eje z que se apoya en el contorno de R) y (*2*) es una medida de dicho volumen.

El cálculo de una integral doble, por simple que sea, a base de ir realizando sumas presenta muchas dificultades y no lo emplearemos en este libro.

INTEGRAL ITERADA. Consideremos un volumen, definido como en la sección anterior, y supongamos que el contorno de R es tal, que toda recta paralela al eje x, o al eje y, no corta a la superficie en más de dos puntos. Tracemos (ver Fig. 63-3) las tangentes $x = a$ y $x = b$ al contorno y sean K y L los puntos de tangencia, y las tangentes $y = c$ e $y = d$ siendo M y N los puntos de contacto o respectivos. Supongamos que la ecuación del arco LMK sea $y = g_1(x)$, y la correspondiente al LNK, $y = g_2(x)$.

Dividamos el intervalo $a \leq x \leq b$ en m subintervalos, $h_1, h_2, \ldots, h_m$, de longitudes, $\Delta_1 x$, $\Delta_2 x, \ldots, \Delta_m x$, y tomemos en ellos los puntos $x = \xi_1, x = \xi_2, \ldots, x = \xi_{m-1}$ (como se hizo en el Capítulo 33). Asimismo, dividamos el intervalo $c \leq y \leq d$ en n subintervalos, $k_1, k_2, \ldots, k_n$, de longitudes, $\Delta_1 y, \Delta_2 y, \ldots, \Delta_n y$, y tomemos en ellos los puntos, $y = \eta_1, y = \eta_2, \ldots, y = \eta_{n-1}$. Sean λ_m y μ_n las longitudes de los mayores intervalos $\Delta_i x$ y $\Delta_j y$ respectivamente. Trazando las series de paralelas $x = \xi_1, x = \xi_2, \ldots, x = \xi_{m-1}$ e $y = \eta_1, y = \eta_2, \ldots, y = \eta_{n-1}$, habremos dividido la región R en un conjunto de rectángulos R_{ij} de áreas $\Delta_i x \cdot \Delta_j y$ y en otro conjunto de rectángulos incompletos que ignoramos. Si en cada subintervalo h_i elegimos un punto $x = x_i$, y en cada uno de los k_j otro $y = y_j$, en cada subregión R_{ij} quedará determinado un punto $P_{ij}(x_i, y_j)$. A cada subregión R_{ij} se le puede asociar, mediante la ecuación de la superficie, un número $z_{ij} = f(x_i, y_j)$ con lo que formamos la suma

$$\sum_{\substack{i = 1,2,\ldots,m \\ j = 1,2,\ldots,n}} f(x_i, y_j)\, \Delta_i x \cdot \Delta_j y \tag{3}$$

Esta expresión (*3*) es un caso particular de la (*1*), ya que si se aumenta indefinidamente el número de rectángulos de forma que, tanto λ_m como μ_n tienden a cero, el límite de (*3*) coincide con la integral doble (*2*).

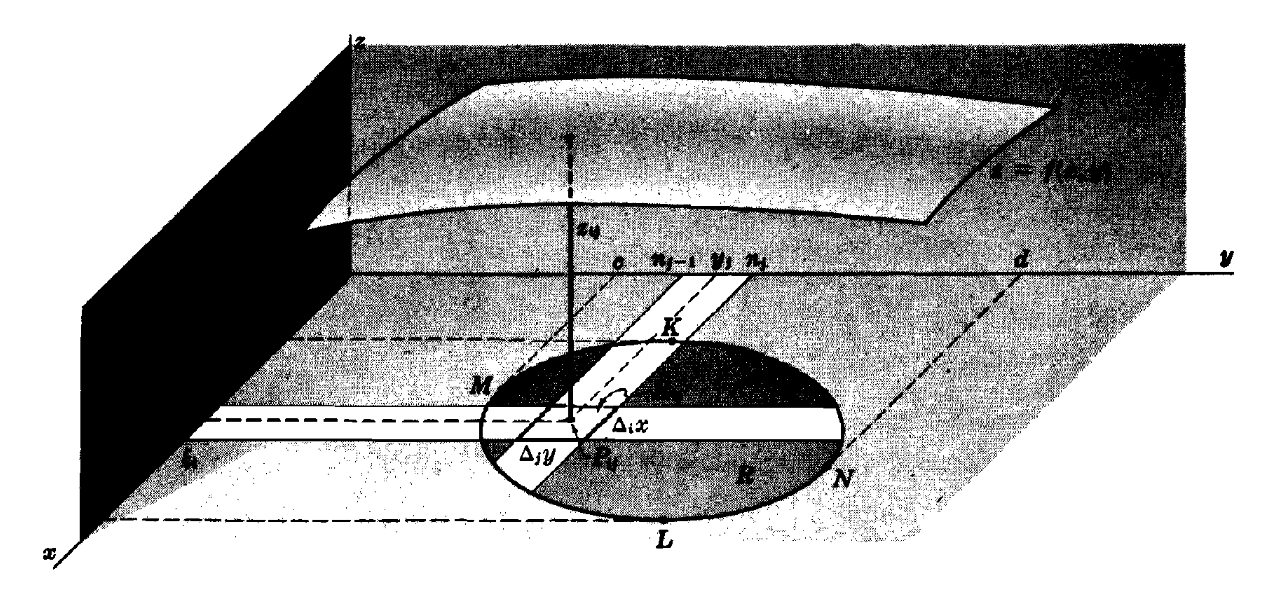


Fig. 63-3

Para hallar el límite anterior se elige uno de los intervalos, por ejemplo h_i, y se considera la suma

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\,\Delta_j y\right\}\Delta_i x\,, \qquad (i \text{ fijo})$$

que es la contribución a la suma total de todos los rectángulos en los que una de las dimensiones es igual a h_i, es decir, la contribución de todos los rectángulos situados en la iésima columna. Cuando $n \to +\infty$, $\mu_n \to 0$ y, en consecuencia,

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\,\Delta_j y\right\}\Delta_i x \;=\; \left\{\int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x_i, y)\,dy\right\}\Delta_i x \;=\; \phi(x_i)\,\Delta_i x$$

Sumando ahora las m columnas y haciendo tender a $m \to +\infty$, tendremos

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty}\sum_{i=1}^{m}\phi(x_i)\,\Delta_i x &= \int_a^b \phi(x)\,dx \\ &= \int_a^b\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx \;=\; \int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx\end{aligned} \qquad (4)$$

Aunque en lo sucesivo no emplearemos el corchete, se debe sobrentender siempre que la fórmula (*4*) indica que hay que calcular dos integrales simples definidas, en un orden determinado: primero, la integral de $f(x, y)$ con respecto a y (considerando x constante) entre los límites $y = g_1(x)$, contorno inferior de R, e $y = g_2(x)$, contorno superior de R y, a continuación, se halla la integral de este resultado con respecto a x entre los límites $x = a$, punto extremo izquierdo de R y $x = b$, punto extremo derecho de R. La integral (*4*) recibe el nombre de *integral iterada* o *integral repetida.*

Se deja como ejercicio el cálculo de la suma planteando, en primer lugar, la contribución de los rectángulos de cada columna y, después, la de los rectángulos de todas las columnas, obteniéndose la integral iterada equivalente

$$\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy \qquad (5)$$

siendo $x = h_1(y)$ y $x = h_2(y)$ las ecuaciones de los arcos MKN y MLN respectivamente.

En el Problema 1 se demuestra, por otro procedimiento, que la integral iterada (*4*) es una medida del volumen. Para el cálculo de integrales iteradas véanse los Problemas 2-6.

La mayor dificultad en el planteamiento de las integrales iteradas de los capítulos posteriores es hallar los límites de integración correspondientes a la región R. Aquí hemos considerado para el razonamiento una región muy sencilla; las regiones de los Problemas 7-9 son más complicadas.

Problemas resueltos

1. Supongamos que $z = f(x, y)$ es una función continua no negativa en la región R del plano xOy cuyo contorno está formado por los arcos de dos curvas $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$ que se cortan en los puntos K y L indicados en la Fig. 63-4. Se trata de hallar el volumen V limitado por esta superficie.

Sea $x = x_i$, siendo $a < x_i < b$, un plano que corta al contorno de R en los puntos $S[x_i, g_1(x_i)]$ y $T[x_i, g_2(x_i)]$, y a la superficie $z = f(x, y)$ según el arco UV a lo largo del cual $z = f(x_i, y)$. El área de la sección $STUV$ es

$$A(x_i) \;=\; \int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x_i, y)\,dy$$

Así, pues, el área de las secciones determinadas en el volumen por planos paralelos al yOz son funciones conocidas

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy$$

de x, distancia del plano de sección al origen. Según lo dicho en el Capítulo 36, el volumen pedido será,

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$

Esta es la integral iterada de la ecuación (4).

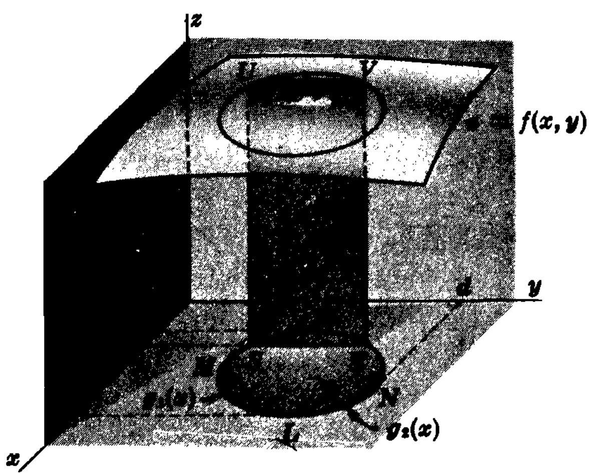


Fig. 63-4

2. $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{x} dy\,dx = \int_0^1 \Big[y\Big]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$

3. $\displaystyle\int_1^2\int_y^{3y} (x+y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + xy\right)\Big]_y^{3y} dy = \int_1^2 6y^2\,dy = 2y^3\Big]_1^2 = 14$

4. $\displaystyle\int_{-1}^2\int_{2x^2-2}^{x^2+x} x\,dy\,dx = \int_{-1}^2 (xy)\Big]_{2x^2-2}^{x^2+x} dx = \int_{-1}^2 (x^3 + x^2 - 2x^3 + 2x)\,dx = \frac{9}{4}$

5. $\displaystyle\int_0^\pi\int_0^{\cos\theta} \rho\,\text{sen}\,\theta\,d\rho\,d\theta = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}\rho^2\,\text{sen}\,\theta\right)\Big]_0^{\cos\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta$

$$= \left(-\frac{1}{6}\cos^3\theta\right)\Big]_0^\pi = \frac{1}{3}$$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_2^{4\cos\theta} \rho^3\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{4}\rho^4\right)\Big]_2^{4\cos\theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} (64\cos^4\theta - 4)\,d\theta$

$$= \left[64\left(\frac{3\theta}{8} + \frac{\text{sen}\,2\theta}{4} + \frac{\text{sen}\,4\theta}{32}\right) - 4\theta\right]_0^{\pi/2} = 10\pi$$

7. Hallar $\displaystyle\iint_R dA$ siendo R la región del primer cuadrante limitada por la parábola cúbica $y^2 = x^3$ y la recta $y = x$.

La recta y la parábola se cortan en los puntos (0, 0) y (1, 1), que son los valores extremos de x e y en la región R.

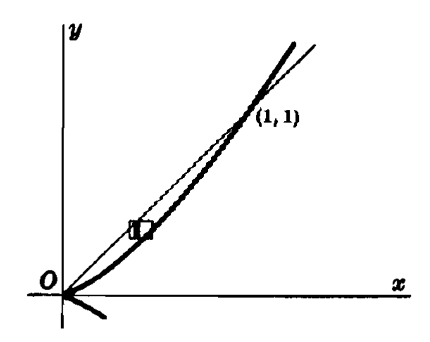


Fig. 63-5

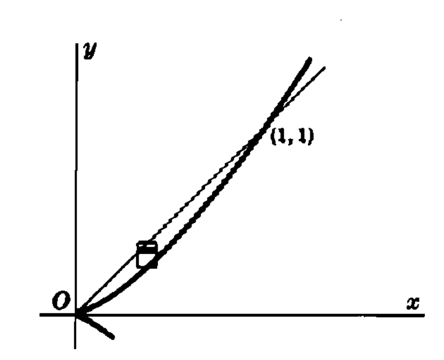


Fig. 63-6

Solución 1. Integrando primero por franjas horizontales (ver Fig. 63-5), es decir, con respecto a x, desde $x = y$ (la recta) hasta $x = y^{2/3}$ (la parábola), y después con respecto a y, desde $y = 0$ hasta $y = 1$, resulta:

$$\iint_R dA = \int_0^1 \int_y^{y^{2/3}} dx\, dy = \int_0^1 (y^{2/3} - y)\, dy = \left[\frac{3}{5}y^{5/3} - \frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = \frac{1}{10}$$

Solución 2. Integrando primero por franjas verticales (ver Fig. 63-6), es decir, con respecto a y, desde $y = x^{3/2}$ (la parábola) hasta $y = x$ (la recta), y después con respecto a x, desde $x = 0$ hasta $x = 1$, se obtiene

$$\iint_R dA = \int_0^1 \int_{x^{3/2}}^{x} dy\, dx = \int_0^1 (x - x^{3/2})\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^1 = \frac{1}{10}$$

8. Hallar $\iint_R dA$ siendo R la región comprendida entre $y = 2x$ e $y = x^2$, situada a la izquierda de $x = 1$.

Integrando primero por franjas verticales (ver Fig. 63-7), tendremos

$$\iint_R dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{2x} dy\, dx = \int_0^1 (2x - x^2)\, dx = \frac{2}{3}$$

Si integramos por franjas horizontales (ver Fig. 63-8), se necesita calcular dos integrales iteradas. Llamando R_1 a la parte de R situada por debajo de AB y R_2 la situada por encima de AB, tendremos

$$\iint_R dA = \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA = \int_0^1 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} dx\, dy + \int_1^2 \int_{y/2}^{1} dx\, dy = \frac{5}{12} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$$

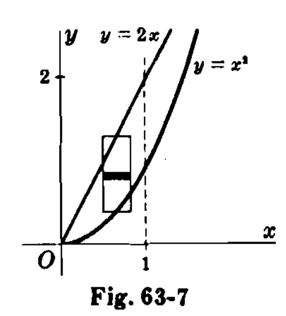


Fig. 63-7

Fig. 63-8

9. Hallar $\iint_R x^2\, dA$ siendo R la región del primer cuadrante limitada por la hipérbola $xy = 16$ y las rectas $y = x$, $y = 0$ y $x = 8$ (Fig. 63-9).

De la Fig. 63-9 se deduce la conveniencia de dividir R en dos regiones y calcular una integral iterada en cada una de ellas. Llamando R_1 a la parte de R situada por encima de la recta $y = 2$ y R_2 la situada por debajo, tendremos

$$\iint_R x^2\, dA = \iint_{R_1} x^2\, dA + \iint_{R_2} x^2\, dA = \int_2^4 \int_y^{16/y} x^2\, dx\, dy + \int_0^2 \int_y^8 x^2\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_2^4 \left(\frac{16^3}{y^3} - y^3\right) dy + \frac{1}{3}\int_0^2 (8^3 - y^3)\, dy = 448$$

Se deja como ejercicio dividir R por la recta $x = 4$ y obtener

$$\iint_R x^2\, dA = \int_0^4 \int_0^x x^2\, dy\, dx + \int_4^8 \int_0^{16/x} x^2\, dy\, dx$$

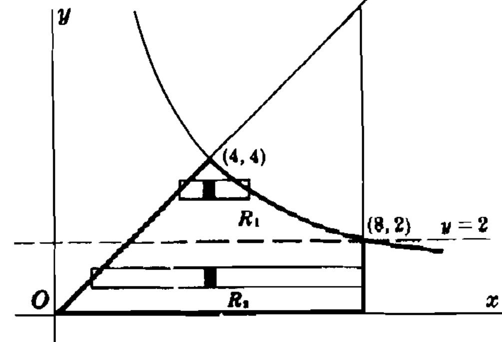


Fig. 63-9

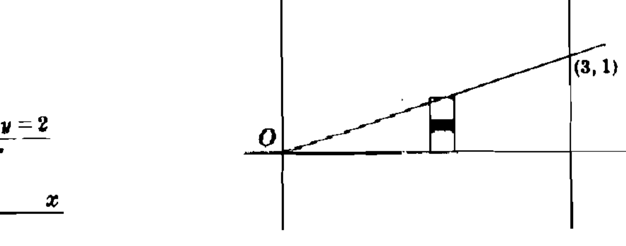


Fig. 63-10

10. Hallar $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx\, dy$ invertiendo, previamente, el orden de integración.

La integral dada no se puede hallar directamente porque $\int e^{x^2}\, dx$ no es una función elemental.

La región de integración R está limitada por las rectas $x = 3y$, $x = 3$ e $y = 0$. Para invertir el orden de integración, integramos primero con respecto a y, desde $y = 0$ hasta $y = x/3$, y después con respecto a x, desde $x = 0$ hasta $x = 3$. Así pues,

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx\, dy = \int_0^3 \int_0^{x/3} e^{x^2}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^3 e^{x^2}\, y \Big]_0^{x/3} dx = \frac{1}{3}\int_0^3 e^{x^2}\, x\, dx = \frac{1}{6}e^{x^2}\Big]_0^3 = \frac{1}{6}(e^9 - 1)$$

Problemas propuestos

11. Hallar las integrales iteradas:

(*a*) $\int_0^1 \int_1^2 dx\, dy = 1$

(*b*) $\int_1^2 \int_0^3 (x+y)\, dx\, dy = 9$

(*c*) $\int_2^4 \int_1^2 (x^2+y^2)\, dy\, dx = \frac{70}{3}$

(*d*) $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy^2\, dy\, dx = \frac{1}{40}$

(*e*) $\int_1^2 \int_0^{y^{3/2}} x/y^2\, dx\, dy = \frac{3}{4}$

(*f*) $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} (y+y^3)\, dy\, dx = \frac{7}{60}$

(*g*) $\int_0^1 \int_0^{x^2} xe^y\, dy\, dx = \frac{1}{2}e - 1$

(*h*) $\int_2^4 \int_y^{8-y} y\, dx\, dy = \frac{32}{3}$

(*i*) $\int_0^{\text{Arc tag } 3/2} \int_0^{2 \sec\theta} \rho\, d\rho\, d\theta = 3$

(*j*) $\int_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^2 \cos\theta\, d\rho\, d\theta = \frac{8}{3}$

(*k*) $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\text{tag}\,\theta \sec\theta} \rho^3 \cos^2\theta\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{20}$

(*l*) $\int_0^{2\pi} \int_0^{1-\cos\theta} \rho^3 \cos^2\theta\, d\rho\, d\theta = \frac{49}{32}\pi$

12. Hallar, mediante integrales iteradas, las siguientes integrales dobles, efectuando la integración en los dos órdenes en los casos que sean posibles.

(*a*) de x, en la región limitada por $y = x^2$ e $y = x^3$. *Sol.* 1/20

(*b*) de y, en la región de (*a*). *Sol.* 1/35

(*c*) de x^2, en la región limitada por $y = x$, $y = 2x$ y $x = 2$. *Sol.* 4

(*d*) de 1, en la región del primer cuadrante limitada por $2y = x^2$, $y = 3x$ y $x + y = 4$. *Sol.* 8/3; 46/3

(*e*) de y, en la región por encima de $y = 0$ limitada por $y^2 = 4x$ e $y^2 = 5 - x$. *Sol.* 5

(*f*) de $\dfrac{1}{\sqrt{2y - y^2}}$ en la región del primer cuadrante limitada por $x^2 = 4 - 2y$. *Sol.* 4

13. En los Problemas 11 (*a*)-(*h*), invertir el orden de integración y hallar las integrales iteradas que resultan.

Capítulo 64

Centro geométrico y momentos de inercia de areas planas

AREA PLANA MEDIANTE UNA INTEGRAL DOBLE. En el caso de que $f(x, y) = 1$, la integral definida en el Capítulo 63 adquiere la forma $\iint_R dA$, que, en unidades de volumen, es el correspondiente a un cilindro de altura unidad y, en unidades de superficie, representa el área de la región R.

(Ver Problemas 1-2.)

En coordenadas polares, $A = \iint_R dA = \int_\alpha^\beta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \rho\, d\rho\, d\theta$, donde $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, $\varrho_1(\theta)$, y $\varrho_2(\theta)$ se toman de forma que quede recorrida la región R.

(Ver Problemas 3-5.)

CENTRO GEOMETRICO. Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide de una región plana R de área $A = \iint_R dA$ satisfacen las relaciones

$$A \cdot \bar{x} = M_2 \quad \text{y} \quad A \cdot \bar{y} = M_2$$

o

$$\bar{x} \cdot \iint_R dA = \iint_R x\, dA \quad \text{y} \quad \bar{y} \cdot \iint_R dA = \iint_R y\, dA$$

(Ver Problemas 6-9.)

EL MOMENTO DE INERCIA de una región plana R con respecto a los ejes coordenados viene dado por

$$I_x = \iint_R y^2\, dA \quad \text{e} \quad I_y = \iint_R x^2\, dA$$

El momento de inercia polar (momento de inercia con respecto a una recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano del área) de una región plana R viene dada por

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_R (x^2 + y^2)\, dA$$

(Ver Problemas 10-12.)

Problemas resueltos

1. Hallar el área limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 2x + 3$.

Trazando franjas verticales (ver Fig. 64-1), tenemos

$$A = \int_{-1}^{3} \int_{x^2}^{2x+3} dy\, dx$$

$$= \int_{-1}^{3} (2x + 3 - x^2)\, dx$$

$$= 32/3 \text{ unidades de superficie}$$

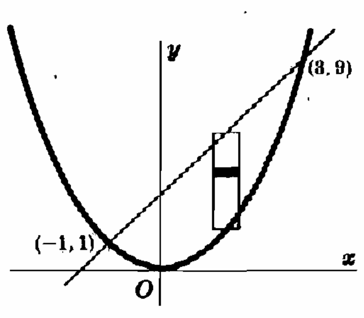


Fig. 64-1

2. Hallar el área comprendida entre las parábolas $y^2 = 4 - x$ e $y^2 = 4 - 4x$.

Integrando por franjas horizontales (ver Fig. 64-2) y teniendo en cuenta la simetría que se observa en la figura,

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^2 \int_{1-y^2/4}^{4-y^2} dx\,dy \\ &= 2\int_0^2 [(4-y^2) - (1-\tfrac{1}{4}y^2)]\,dy \\ &= 6\int_0^2 (1-\tfrac{1}{4}y^2)\,dy \\ &= 8 \text{ unidades de superficie.} \end{aligned}$$

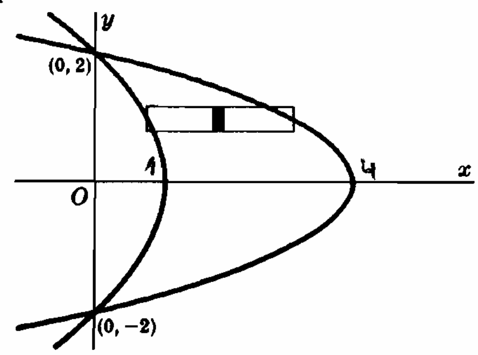
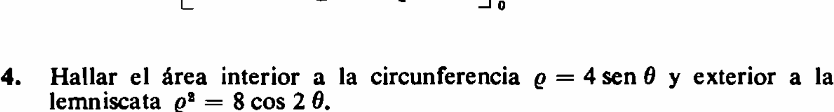


Fig. 64-2

3. Hallar el área exterior a la circunferencia $\rho = 2$, e interior a la cardioide $\rho = 2(1 + \cos\theta)$.

Dada la simetría, el área pedida es igual al doble del área barrida al variar θ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Así pues,



$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^{\pi/2}\int_2^{2(1+\cos\theta)} \rho\,d\rho\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\rho^2\Big]_2^{2(1+\cos\theta)} d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2} (2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \\ &= 4\left[2\,\text{sen}\,\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\text{sen}\,2\theta\right]_0^{\pi/2} = (\pi + 8)\,\text{unid.de sup.} \end{aligned}$$

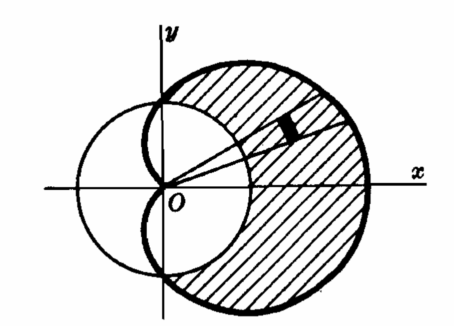


Fig. 64-3

4. Hallar el área interior a la circunferencia $\rho = 4\,\text{sen}\,\theta$ y exterior a la lemniscata $\rho^2 = 8\cos 2\theta$.

El área pedida es igual al doble de la correspondiente del primer cuadrante limitada por las dos curvas y la recta $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Obsérvese que el arco AO de la lemniscata se genera al variar θ desde $\theta = \pi/6$ hasta $\theta = \pi/4$, mientras que el arco AB de la circunferencia lo hace al variar θ desde $\theta = \pi/6$ hasta $\theta = \pi/2$. Este área conviene dividirla en dos partes, una por debajo y otra por encima de la recta $\theta = \pi/4$. Así, pues,

$$\begin{aligned} A &= 2\int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_{2\sqrt{2\cos 2\theta}}^{4\,\text{sen}\,\theta} \rho\,d\rho\,d\theta + 2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{4\,\text{sen}\,\theta} \rho\,d\rho\,d\theta \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/4} (16\,\text{sen}^2\theta - 8\cos 2\theta)\,d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 16\,\text{sen}^2\theta\,d\theta \\ &= (\tfrac{8}{3}\pi + 4\sqrt{3} - 4) \text{ unidades de superficie} \end{aligned}$$

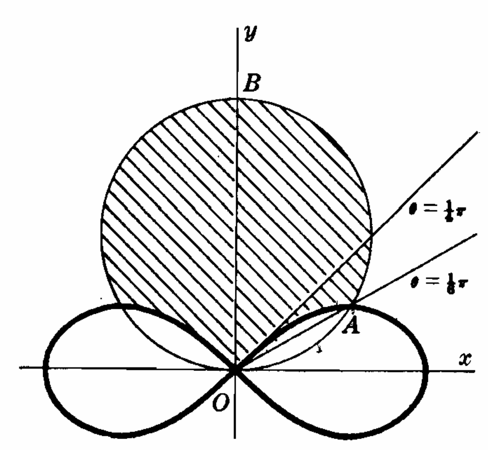
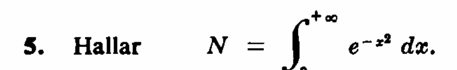
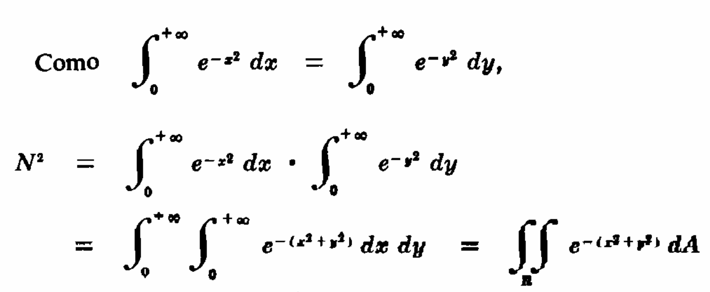


Fig. 64-4



5. Hallar $N = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.



Como $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy$,

$$\begin{aligned} N^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dA \end{aligned}$$

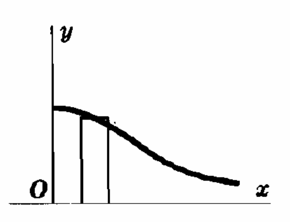


Fig. 64-5

Pasando a coordenadas polares ($x^2 + y^2 = \rho^2$, $dA = \rho\,d\rho\,d\theta$),

$$N^2 = \int_0^{\pi/2}\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\cdot\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\left\{\lim_{a\to+\infty}(-\tfrac{1}{2}e^{-\rho^2})\Big]_0^a\right\}d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

y $N = \sqrt{\pi}/2$.

6. Hallar el centro geométrico del área plana limitada por la parábola $y = 6x - x^2$ y la recta $y = x$.

$$A = \iint_R dA = \int_0^5 \int_x^{6x-x^2} dy\,dx = \int_0^5 (5x - x^2)\,dx = \frac{125}{6}$$

$$M_y = \iint_R x\,dA = \int_0^5 \int_x^{6x-x^2} x\,dy\,dx = \int_0^5 (5x^2 - x^3)\,dx = \frac{625}{12}$$

$$M_x = \iint_R y\,dA = \int_0^5 \int_x^{6x-x^2} y\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^5 \{(6x - x^2)^2 - x^2\}\,dx = \frac{625}{6}$$

Luego, $\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{5}{2}$, $\bar{y} = \frac{M_x}{A} = 5$, y las coordenadas del centro geométrico son $(\frac{5}{2}, 5)$.

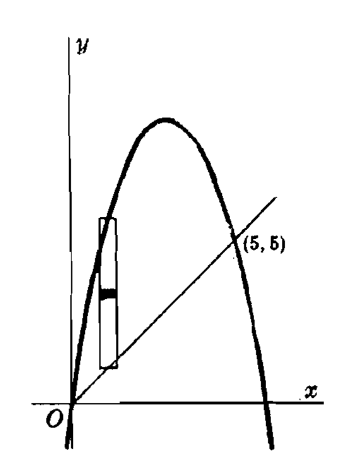


Fig. 64-6

7. Determinar el centro geométrico del área plana limitada por las parábolas $y = 2x - x^2$ e $y = 3x^2 - 6x$.

$$A = \iint_R dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} dy\,dx = \int_0^2 (8x - 4x^2)\,dx = \frac{16}{3}$$

$$M_y = \iint_R x\,dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} x\,dy\,dx = \int_0^2 (8x^2 - 4x^3)\,dx = \frac{16}{3}$$

$$M_x = \iint_R y\,dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} y\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \{(2x - x^2)^2 - (3x^2 - 6x)^2\}\,dx = -\frac{64}{15}$$

Luego, $\bar{x} = \frac{M_y}{A} = 1$, $\bar{y} = \frac{M_x}{A} = -\frac{4}{5}$, el centro geométrico es el punto $(1, -\frac{4}{5})$.

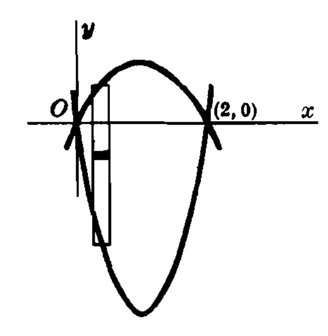


Fig. 64-7

8. Hallar el centro geométrico del área plana exterior a la circunferencia $\rho = 1$ e interior a la cardioide $\rho = 1 + \cos\theta$. (Ver Fig. 64-8.)

De la figura se deduce que $y = 0$ y que es la que corresponde a la mitad situada por encima del eje polar. Para esta última área,

$$A = \iint_R dA = \int_0^{\pi/2} \int_1^{1+\cos\theta} \rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \{(1 + \cos\theta)^2 - 1^2\}\,d\theta = \frac{\pi + 8}{8}$$

$$M_y = \iint_R x\,dA = \int_0^{\pi/2} \int_1^{1+\cos\theta} (\rho\cos\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} (3\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + \cos^4\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}\theta + \frac{3}{4}\operatorname{sen} 2\theta + 3\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta + \frac{3}{8}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{15\pi + 32}{48}$$

Fig. 64-8

Las coordenadas del centro geométrico son $\left(\frac{15\pi + 32}{6(\pi + 8)}, 0\right)$.

9. Determinar el centro geométrico del área interior a $\rho = \operatorname{sen}\theta$ y exterior a $\rho = 1 - \cos\theta$. (Ver Fig. 64-9.)

$$A = \iint_R dA = \int_0^{\pi/2} \int_{1-\cos\theta}^{\operatorname{sen}\theta} \rho\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (2\cos\theta - 1 - \cos 2\theta)\,d\theta = \frac{4 - \pi}{4}$$

$$M_y = \iint_R x\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_{1-\cos\theta}^{\operatorname{sen}\theta} (\rho\cos\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^3\theta - 1 + 3\cos\theta - 3\cos^2\theta + \cos^3\theta)\cos\theta\,d\theta$$
$$= \frac{15\pi - 44}{48}$$

$$M_x = \iint_R y\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_{1-\cos\theta}^{\operatorname{sen}\theta} (\rho\operatorname{sen}\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^3\theta - 1 + 3\cos\theta - 3\cos^2\theta + \cos^3\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$
$$= \frac{3\pi - 4}{48}$$

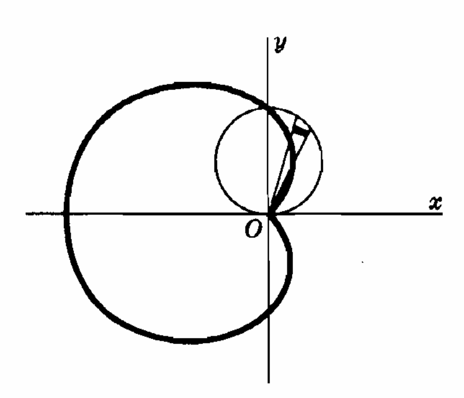


Fig. 64-9

Las coordenadas del centro geométrico son $\left(\dfrac{15\pi - 44}{12(4-\pi)}, \dfrac{3\pi - 4}{12(4-\pi)}\right)$

10. Hallar I_x, I_y e I_0 del área limitada por el lazo de $y^2 = x^2(2-x)$.

$$A = \iint_R dA = 2\int_0^2\int_0^{x\sqrt{2-x}} dy\,dx = 2\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx$$
$$= -4\int_{\sqrt{2}}^0 (2z^2 - z^4)\,dz = -4\left[\frac{2}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5\right]_{\sqrt{2}}^0 = \frac{32\sqrt{2}}{15}$$

haciendo el cambio $2 - x = z^2$.

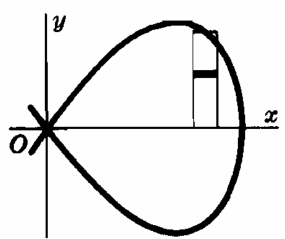


Fig. 64-10

$$I_x = \iint_R y^2\,dA = 2\int_0^2\int_0^{x\sqrt{2-x}} y^2\,dy\,dx = \frac{2}{3}\int_0^2 x^3(2-x)^{3/2}\,dx$$
$$= -\frac{4}{3}\int_{\sqrt{2}}^0 (2-z^2)^3 z^4\,dz = -\frac{4}{3}\left[\frac{8}{5}z^5 - \frac{12}{7}z^7 + \frac{2}{3}z^9 - \frac{1}{11}z^{11}\right]_{\sqrt{2}}^0 = \frac{2048\sqrt{2}}{3465} = \frac{64}{231}A$$

$$I_y = \iint_R x^2\,dA = 2\int_0^2\int_0^{x\sqrt{2-x}} x^2\,dy\,dx = 2\int_0^2 x^3\sqrt{2-x}\,dx$$
$$= -4\int_{\sqrt{2}}^0 (2-z^2)^3 z^2\,dz = -4\left[\frac{8}{3}z^3 - \frac{12}{5}z^5 + \frac{6}{7}z^7 - \frac{1}{9}z^9\right]_{\sqrt{2}}^0 = \frac{1024\sqrt{2}}{315} = \frac{32}{21}A$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{13312\sqrt{2}}{3465} = \frac{416}{231}A.$$

11. Hallar I_x, I_y e I_0 del área del primer cuadrante exterior a la circunferencia $\rho = 2a$ e interior a la circunferencia $\rho = 4a\cos\theta$.

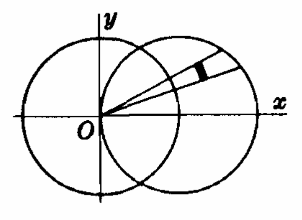


Fig. 64-11

$$A = \iint_R dA = \int_0^{\pi/3}\int_{2a}^{4a\cos\theta} \rho\,d\rho\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \{(4a\cos\theta)^2 - (2a)^2\}\,d\theta = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{3}a^2$$

$$I_x = \iint_R y^2\,dA = \int_0^{\pi/3}\int_{2a}^{4a\cos\theta} (\rho\operatorname{sen}\theta)^2\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/3} \{(4a\cos\theta)^4 - (2a)^4\}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta$$
$$= 4a^4\int_0^{\pi/3} (16\cos^4\theta - 1)\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = \frac{4\pi + 9\sqrt{3}}{6}a^4 = \frac{4\pi + 9\sqrt{3}}{2(2\pi + 3\sqrt{3})}a^2 A$$

$$I_y = \iint_R x^2\,dA = \int_0^{\pi/3}\int_{2a}^{4a\cos\theta} (\rho\cos\theta)^2\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{12\pi + 11\sqrt{3}}{2}a^4 = \frac{3(12\pi + 11\sqrt{3})}{2(2\pi + 3\sqrt{3})}a^2 A$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{20\pi + 21\sqrt{3}}{3}a^4 = \frac{20\pi + 21\sqrt{3}}{2\pi + 3\sqrt{3}}a^2 A$$

12. Hallar I_x, I_y e I_0 del área del círculo $\varrho = 2(\text{sen}\,\theta + \cos\theta)$.

Como $x^2 + y^2 = \varrho^2$,

$$I_0 = \iint_R (x^2+y^2)\,dA = \int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi}\int_0^{2(\text{sen}\,\theta + \cos\theta)} \rho^2 \cdot \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= 4\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} (\text{sen}\,\theta + \cos\theta)^4\, d\theta$$

$$= 4\left[\frac{3}{2}\theta - \cos 2\theta - \frac{1}{8}\text{sen}\,4\theta\right]_{-1/4\,\pi}^{3/4\,\pi} = 6\pi = 3A$$

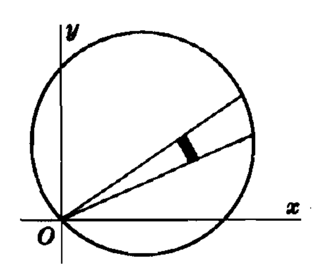


Fig. 64-12

De la Fig. 64-12, se deduce que $I_x = I_y$. Luego $I_x = I_y = \frac{1}{2}I_0 = \frac{3}{2}A$.

Problemas propuestos

13. Hallar mediante una integral doble las áreas siguientes:

(*a*) la limitada por $3x + 4y = 24$, $x = 0$, $y = 0$. *Sol.* 24 un. sup.

(*b*) la limitada por $x + y = 2$, $2y = x + 4$, $y = 0$. *Sol.* 6 un. sup.

(*c*) la limitada por $x^2 = 4y$, $8y = x^2 + 16$. *Sol.* 32/3 un. sup.

(*d*) la interior a $\varrho = 2(1 - \cos\theta)$. *Sol.* 6π un. sup.

(*e*) la limitada por $\varrho = \text{tag}\,\theta \sec\theta$ y $\theta = \pi/3$. *Sol.* $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ un. sup.

(*f*) la exterior a $\varrho = 4$ e interior a $\varrho = 8\cos\theta$. *Sol.* $8(\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3})$ un. sup.

14. Determinar el centro geométrico de las áreas siguientes:

(*a*) la del Problema 13(*a*). *Sol.* (8/3, 2)

(*b*) la del primer cuadrante del Problema 13(*c*). *Sol.* (3/2, 8/5)

(*c*) la del primer cuadrante limitada por $y^2 = 6x$, $y = 0$, $x = 6$. *Sol.* (18/5, 9/4)

(*d*) la limitada por $y^2 = 4x$, $x^2 = 5 - 2y$, $x = 0$. *Sol.* (13/40, 26/15)

(*e*) la del primer cuadrante limitada por $x^2 - 8y + 4 = 0$, $x^2 = 4y$, $x = 0$. *Sol.* (3/4, 2/5)

(*f*) la del Problema 13(*e*). *Sol.* $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, 6/5)$

(*g*) la del primer cuadrante del Problema 13(*f*). *Sol.* $\left(\dfrac{16\pi + 6\sqrt{3}}{2\pi + 3\sqrt{3}}, \dfrac{22}{2\pi + 3\sqrt{3}}\right)$

15. Demostrar que si $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta [g_2^2(\theta) - g_1^2(\theta)]\,d\theta = \int_\alpha^\beta\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \rho\, d\rho\, d\theta = \iint_R dA$, se verifica

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta)\,\rho\, d\rho\, d\theta$$

16. Hallar I_x e I_y de las áreas siguientes:

(*a*) la del Problema 13(*a*). *Sol.* $I_x = 6A$, $I_y = \frac{32}{3}A$

(*b*) la limitada por $y^2 = 8x$ y la ordenada del punto $x = 2$. *Sol.* $I_x = \frac{16}{5}A$, $I_y = \frac{12}{7}A$

(*c*) la limitada por $y = x^2$ e $y = x$. *Sol.* $I_x = \frac{3}{14}A$, $I_y = \frac{3}{10}A$

(*d*) la limitada por $y = 4x - x^2$ e $y = x$. *Sol.* $I_x = \frac{459}{70}A$, $I_y = \frac{27}{10}A$

17. Hallar I_x e I_y de un lazo de $\varrho^2 = \cos 2\theta$. *Sol.* $I_x = \left(\dfrac{\pi}{16} - \dfrac{1}{6}\right)A$, $I_y = \left(\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{1}{6}\right)A$

18. Hallar I_0 de las áreas siguientes:

(*a*) un lazo de $\varrho = \text{sen}\,2\theta$. *Sol.* $\frac{3}{8}A$

(*b*) la limitada por $\varrho = 1 + \cos\theta$. *Sol.* $\frac{35}{24}A$

Capítulo 65

Volumen limitado por una superficie

Integral doble

EL VOLUMEN LIMITADO POR UNA SUPERFICIE de ecuación $z = f(x, y)$, o bien $z = f(\varrho, \theta)$, es decir, el volumen de una columna vertical cuya base superior está en la superficie y la base inferior en el plano xOy, viene definido por la integral doble $V = \iint_R z\,dA$, siendo R la región que constituye la base inferior de la columna.

Problemas resueltos

1. Hallar el volumen en el primer octante comprendido entre los planos $z = 0$ y $z = x + y + 2$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 16$.

De la Fig. 65-1 se deduce que hemos de integrar $z = x + y + 2$ según el cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = 16$ en el plano xOy. Por consiguiente,

$$V = \iint_R z\,dA = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} (x + y + 2)\,dy\,dx = \int_0^4 (x\sqrt{16 - x^2} + 8 - \tfrac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{16 - x^2})\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}(16 - x^2)^{3/2} + 8x - \frac{x^3}{6} + x\sqrt{16 - x^2} + 16 \text{ arc sen } \frac{1}{4}x \right]_0^4 = \left(\frac{128}{3} + 8\pi \right) \text{unidades de volumen}$$

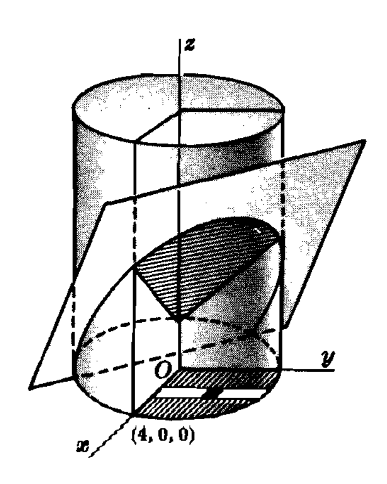


Fig. 65-1

Fig. 65-2

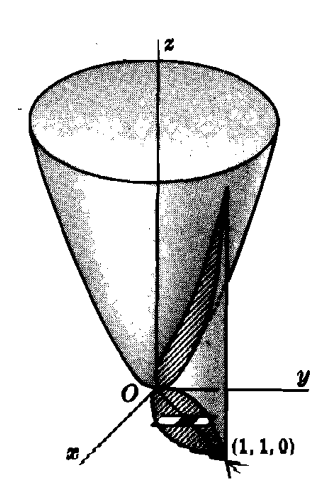


Fig. 65-3

2. Hallar el volumen limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $y + z = 4$ y $z = 0$.

De la Fig. 65-2 se deduce que hemos de integrar $z = 4 - y$ según el cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = 4$ en el plano xOy. Por consiguiente,

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y)\,dx\,dy = 2\int_{-2}^{2} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y)\,dx\,dy = 16\pi \text{ unidades de volumen}$$

3. Hallar el volumen limitado por el paraboloide $x^2 + 4y^2 = z$, el plano $z = 0$ y los cilindros $y^2 = x$ y $x^2 = y$ (ver Fig. 65-3).

El volumen pedido se obtiene por integración de $z = x^2 + 4y^2$ en la región R común a las parábolas $y^2 = x$ y $x^2 = y$ en el plano xOy. Por consiguiente,

$$V = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + 4y^2)\,dy\,dx = \int_0^1 \left(x^2y + \frac{4}{3}y^3\right)\Bigg]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \frac{3}{7} \text{ unidades de volumen}$$

4. Hallar el volumen de la porción de cilindro $4x^2 + y^2 = a^2$ comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = my$ (ver Fig. 65-4).

El volumen se obtiene integrando $z = my$ según la mitad de la elipse $4x^2 + y^2 = a^2$. Así pues,

$$V = 2\int_0^{a/2} \int_0^{\sqrt{a^2-4x^2}} my\,dy\,dx = m\int_0^{a/2} y^2\Big]_0^{\sqrt{a^2-4x^2}} dx = \frac{ma^3}{3} \text{ unidades de volumen}$$

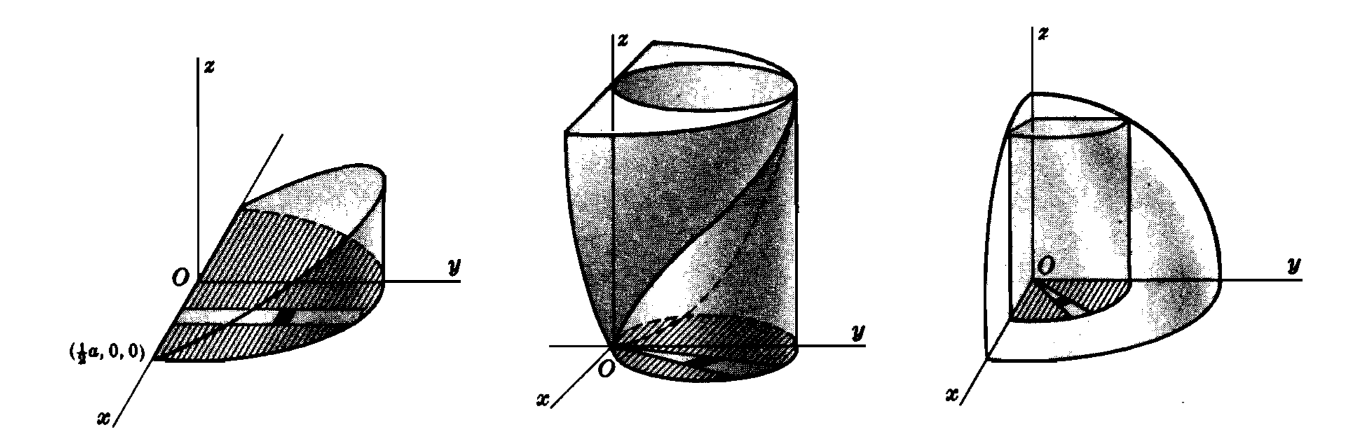


Fig. 65-4 Fig. 65-5 Fig. 65-6

5. Hallar el volumen limitado por el paraboloide $x^2 + y^2 = 4z$, el cilindro $x^2 + y^2 = 8y$ y el plano $z = 0$ (ver Fig. 65-5).

El volumen pedido se obtiene integrando $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ según el círculo $x^2 + y^2 = 8y$. En coordenadas cilíndricas, el volumen se obtiene al integrar $z = \frac{1}{4}\varrho^2$ en el círculo $\varrho = 8 \operatorname{sen} \theta$. Por tanto,

$$V = \iint_R z\,dA = \int_0^{\pi}\int_0^{8\operatorname{sen}\theta} z\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\int_0^{8\operatorname{sen}\theta} \rho^3\,d\rho\,d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^{\pi} \rho^4\Big]_0^{8\operatorname{sen}\theta} d\theta = 256\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4\theta\,d\theta = 96\pi \text{ unidades de volumen}$$

6. Hallar el volumen que se elimina cuando a una esfera de radio $2a$ se le practica un taladro de radio a de forma que el eje del orificio sea un diámetro de la esfera (ver Fig. 65-6).

De la figura se deduce que el volumen pedido es igual a ocho veces el correspondiente al del primer cuadrante limitado por el cilindro $\varrho^2 = a^2$, la esfera $\varrho^2 + z^2 = 4a^2$ y el plano $z = 0$. Este último volumen se obtiene integrando $z = \sqrt{4a^2 - \varrho^2}$ en un cuadrante del círculo $\varrho = a$. Por tanto,

$$V = 8\int_0^{\pi/2}\int_0^{a} \sqrt{4a^2 - \rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} (8a^3 - 3\sqrt{3}\,a^3)\,d\theta = \frac{4}{3}(8 - 3\sqrt{3})a^3\pi \text{ unid. de vol.}$$

Problemas propuestos

7. Hallar el volumen limitado por $9x^2 + 4y^2 + 36z = 36$ y el plano $z = 0$. *Sol.* 3π unidades de volumen.

8. Hallar el volumen limitado por $z = 3x$ y por encima del área del primer cuadrante limitada por $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$, y $x^2 + y^2 = 25$. *Sol.* 98 unidades de volumen.

9. Hallar el volumen del primer octante limitado por $x^2 + z = 9$, $3x + 4y = 24$, $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$. *Sol.* 1 485/16 unidades de volumen.

10. Hallar el volumen del primer octante limitado por $xy = 4z$, $y = x$ y $x = 4$. *Sol.* 8 un. vol.

11. Hallar el volumen del primer octante limitado por $x^2 + y^2 = 25$ y $z = y$. *Sol.* 125/3 un. vol.

12. Hallar el volumen común a los cilindros $x^2 + y^2 = 16$ y $x^2 + z^2 = 16$. *Sol.* 1 024/3 un. vol.

13. Hallar el volumen del primer octante interior a $y^2 + z^2 = 9$ y exterior a $y^2 = 3x$. *Sol.* $27\pi/16$ un. vol.

14. Hallar el volumen del primer octante limitado por $x^2 + z^2 = 16$ y $x - y = 0$. *Sol.* 64/3 un. vol.

15. Hallar el volumen delante de $x = 0$ y común a $y^2 + z^2 = 4$ e $y^2 + z^2 + 2x = 16$. *Sol.* 28π un. vol.

16. Hallar el volumen interior a $\varrho = 2$ y exterior al cono $z^2 = \varrho^2$. *Sol.* $32\pi/3$ un. vol.

17. Hallar el volumen interior a $y^2 + z^2 = 2$ y exterior a $x^2 - y^2 - z^2 = 2$. *Sol.* $8\pi(4 - \sqrt{2})/3$ un. vol.

18. Hallar el volumen común a $\varrho^2 + z^2 = a^2$ y $\varrho = a \operatorname{sen} \theta$. *Sol.* $2(3\pi - 4)a^3/9$ un. vol.

19. Hallar el volumen interior a $x^2 + y^2 = 9$, limitado inferiormente por $x^2 + y^2 + 4z = 16$ y superiormente por $z = 4$. *Sol.* $81\pi/8$ un. vol.

20. Hallar el volumen limitado por el paraboloide $4x^2 + y^2 = 4z$ y el plano $z - y = 2$. *Sol.* 9π un. vol.

21. Hallar el volumen generado al girar la cardioide $\varrho = 2(1 - \cos\theta)$ alrededor del eje polar.
Sol. $V = 2\pi \int\int y\, \varrho\, d\varrho\, d\theta = 64\pi/3$ un. vol.

22. Hallar el volumen generado al girar un pétalo de $\varrho = \operatorname{sen} 2\theta$ alrededor de su eje. *Sol.* $32\pi/105$ un. vol.

23. En una esfera de radio 2 (unidades de longitud) se practica un taladro de sección cuadrada de lado igual a 2 (unidades de longitud), siendo su eje un diámetro de la esfera. Demostrar que el volumen eliminado es $\frac{4}{3}(2\sqrt{2} + 19\pi - 54 \operatorname{arc\,tag}\sqrt{2})$ unidades de volumen.

Capítulo 66

Area de una superficie

Integral doble

EN EL CALCULO DE LA LONGITUD DE UN ARCO se efectúan las operaciones siguientes: (1) Se proyecta el arco sobre uno de los ejes coordenados determinando un cierto intervalo sobre el eje y (2) se integra la función $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, si la proyección se realiza sobre el eje x, o bien $\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$, si la proyección se realiza sobre el eje y, en el intervalo anterior.

Para calcular el área S de una porción R' de una superficie $z = f(x, y)$ se sigue un procedimiento análogo:

(1) Se proyecta R' sobre uno de los planos coordenados determinando una región R en dicho plano.

(2) Se integra, en la región R la función

$$S = \iint_R \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\; dA, \text{ si } R' \text{ se proyecta sobre } xOy$$

$$S = \iint_R \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\; dA, \text{ si } R' \text{ se proyecta sobre } yOz$$

$$S = \iint_R \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\; dA, \text{ si } R' \text{ se proyecta sobre } zOx$$

Problemas resueltos

1. Sea R' una región de área S sobre la superficie $z = f(x,y)$. Por el contorno de R' pasa un cilindro vertical (ver Fig. 66-1) que corta al plano xOy según la región R. Se divide R en n subregiones ΔA_i (de áreas ΔA_i) y sea ΔS_i el área de la proyección de ΔA_i sobre R'. Se elige un punto P_i en cada subregión ΔS_i y se traza en él, el plano tangente a la superficie, siendo ΔT_i el área de la proyección de ΔA_i sobre este plano tangente. El valor ΔT_i es una aproximación del área ΔS_i.

El ángulo formado por el plano xOy y el plano tangente en P_i es igual al ángulo γ_i formado por el eje z, $[0, 0, 1]$ y la normal, $\left[-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right] = \left[-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right]$ a la superficie en P_i. Es decir,

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}}$$

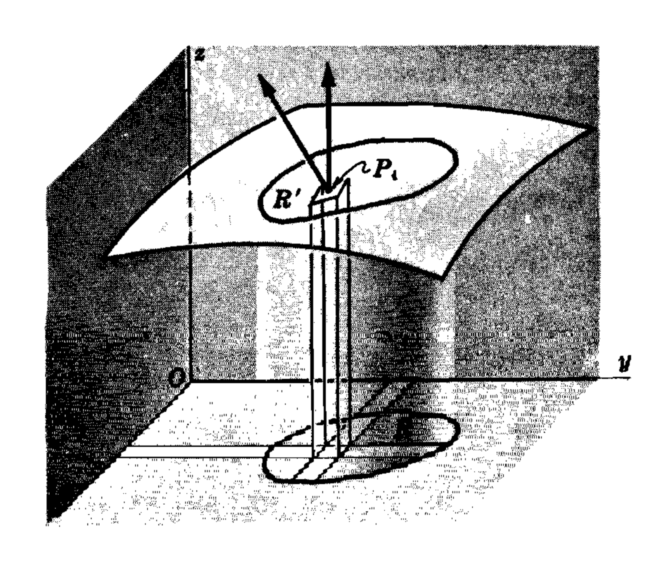


Fig. 66-1

Por tanto (ver Fig. 66-2),

$$\Delta T_i \cdot \cos \gamma_i = \Delta A_i \text{ y } \Delta T_i = \sec \gamma_i \cdot \Delta A_i$$

Luego, una aproximación de S es $\sum_{i=1}^{n} \Delta T_i = \sum_{i=1}^{n} \sec \gamma_i \cdot \Delta A_i$, y

$$S = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \sec \gamma_i \cdot \Delta A_i = \iint_R \sec \gamma \cdot dA$$

$$= \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$

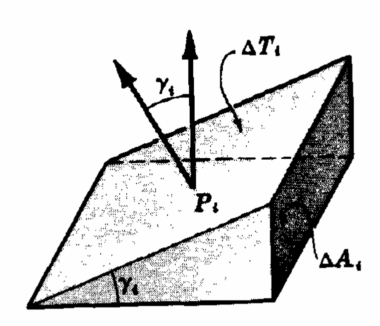


Fig. 66-2

2. Hallar el área de la porción del cono $x^2 + y^2 = 3z^2$ situada por encima del plano xOy e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 4y$.

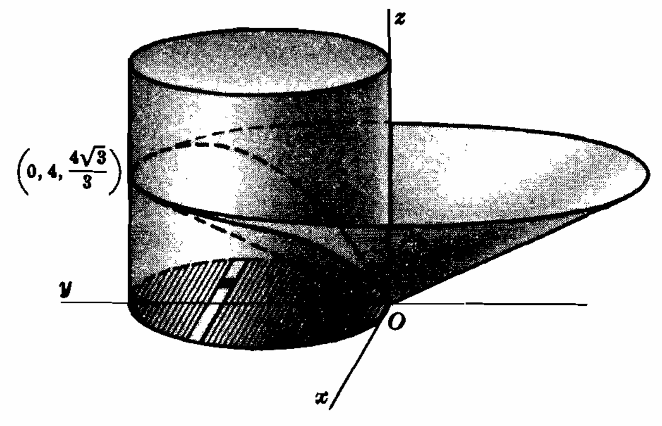


Fig. 66-3

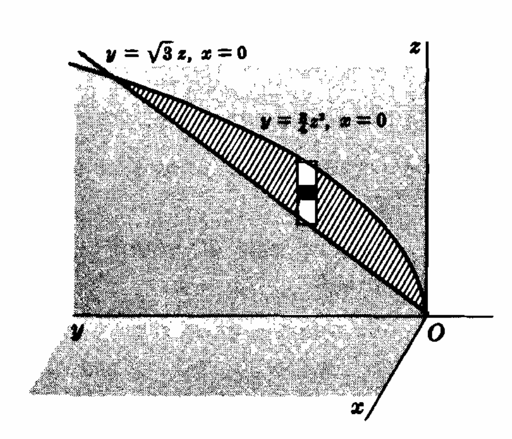


Fig. 66-4

Solución 1. La proyección del área pedida (ver Fig. 66-3) sobre el plano xOy es la región R limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 4y$. Para el cono,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3} \cdot \frac{y}{z}, \quad \text{y} \quad 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{9z^2 + x^2 + y^2}{9z^2} = \frac{12z^2}{9z^2} = \frac{4}{3}$$

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \int_0^4 \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} \frac{2}{\sqrt{3}}\, dx\, dy = 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} dx\, dy$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^4 \sqrt{4y - y^2}\, dy = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi \text{ unidades de superficie}$$

Solución 2. La proyección de la mitad del área pedida, sobre el plano yOz, es la región R limitada por la recta $y = \sqrt{3}\, z$ y la parábola $y = \frac{3}{4}z^2$; esta ecuación se obtiene eliminando x en las ecuaciones de las dos superficies. Para el cono,

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{3z}{x}, \quad \text{y} \quad 1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2 + 9z^2}{x^2} = \frac{12z^2}{x^2} = \frac{12z^2}{3z^2 - y^2}$$

Luego,

$$S = 2\int_0^4 \int_{y/\sqrt{3}}^{2\sqrt{y}/\sqrt{3}} \frac{2\sqrt{3}\, z}{\sqrt{3z^2 - y^2}}\, dz\, dy = \frac{4\sqrt{3}}{3} \int_0^4 \sqrt{3z^2 - y^2}\,\Big]_{y/\sqrt{3}}^{2\sqrt{y}/\sqrt{3}} dy = \frac{4\sqrt{3}}{3} \int_0^4 \sqrt{4y - y^2}\, dy$$

Solución 3. Empleando coordenadas cilíndricas en la *Solución 1*, hemos de integrar la función $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ $= \frac{2}{\sqrt{3}}$ a lo largo de la región R limitada por la circunferencia $\rho = 4 \operatorname{sen} \theta$. Así pues,

$$S = \iint_R \frac{2}{\sqrt{3}}\, dA = \int_0^{\pi} \int_0^{4 \operatorname{sen} \theta} \frac{2}{\sqrt{3}}\, \rho\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\pi} \rho^2 \Big]_0^{4 \operatorname{sen} \theta} d\theta$$

$$= \frac{16}{\sqrt{3}} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 \theta\, d\theta = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi \text{ unidades de superficie}$$

3. Hallar el área de la porción del cilindro $x^2 + z^2 = 16$ situada dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 16$ (Fig. 66-5).

En la figura, se representa la octava parte del área pedida, y su proyección sobre el plano xOy constituida por un cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = 16$. Para el cilindro $x^2 + z^2 = 16$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \text{y} \quad 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{x^2+z^2}{z^2} = \frac{16}{16-x^2}$$

Luego,

$$S = 8\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \frac{4}{\sqrt{16-x^2}}\,dy\,dx = 32\int_0^4 dx = 128 \text{ unidades de superficie}$$

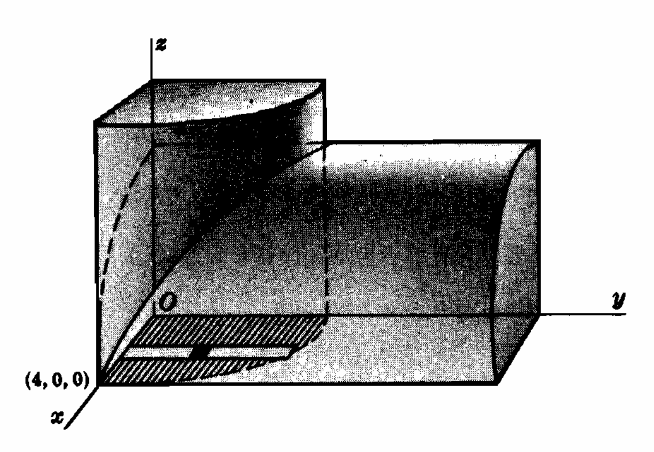


Fig. 66-5

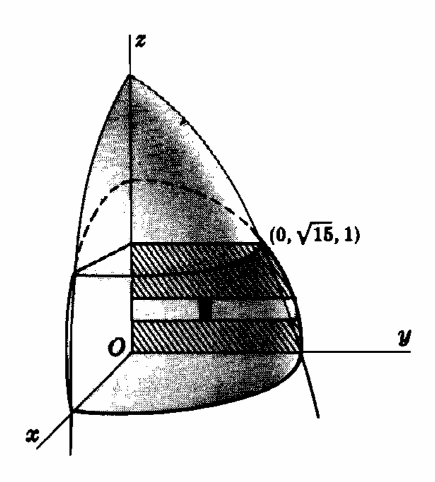


Fig. 66-6

4. Hallar el área de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ exterior al paraboloide $x^2 + y^2 + z = 16$ (Fig. 66-6).

En la figura, se representa la cuarta parte del área pedida, y su proyección sobre el plano yOz constituida por la región R limitada por la circunferencia $y^2 + z^2 = 16$, los ejes y y z y la recta $z = 1$. Para la esfera,

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{z}{x}, \quad \text{y} \quad 1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2} = \frac{16}{16-y^2-z^2}$$

Luego

$$S = 4\iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dA = 4\int_0^1 \int_0^{\sqrt{16-z^2}} \frac{4}{\sqrt{16-y^2-z^2}}\,dy\,dz$$

$$= 16\int_0^1 \left[\text{arc sen}\frac{y}{\sqrt{16-z^2}}\right]_0^{\sqrt{16-z^2}} dz = 16\int_0^1 \frac{1}{2}\pi\,dz = 8\pi \text{ unidades de superficie}$$

5. Hallar el área de la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 6y$ situada dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ (Fig. 66-7).

En la figura, se representa la cuarta parte del área pedida, su proyección sobre el plano yOz constituida por la región R limitada por los ejes z e y y la parábola $z^2 + 6y = 36$. Esta última ecuación resulta de eliminar x en las ecuaciones de las dos superficies. Para el cilindro,

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{3-y}{x}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

y

$$1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2+9-6y+y^2}{x^2} = \frac{9}{6y-y^2}$$

Luego

$$S = 4\int_0^6 \int_0^{\sqrt{36-6y}} \frac{3}{\sqrt{6y-y^2}}\,dz\,dy$$

$$= 12\int_0^6 \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{y}}\,dy = 144 \text{ unidades de superficie}$$

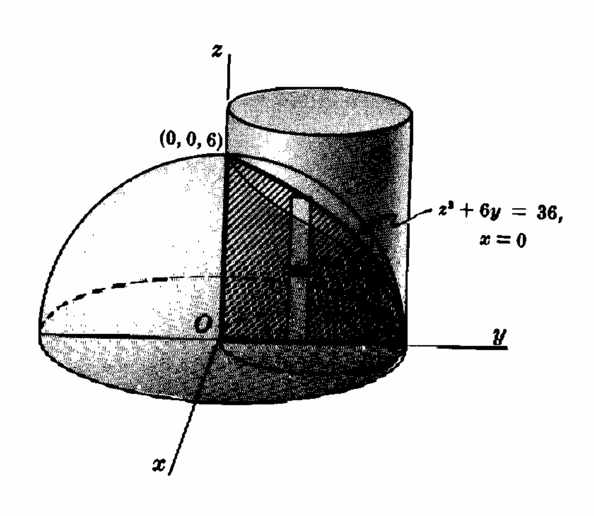


Fig. 66-7

Problemas propuestos

6. Hallar el área de la porción del cono $x^2 + y^2 = z^2$ interior al prisma vertical cuya base es el triángulo limitado por las rectas $y = x$, $x = 0$ e $y = 1$ en el plano xOy. *Sol.* $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ unidades de superficie.

7. Hallar el área de la porción del plano $x + y + z = 6$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
Sol. $4\sqrt{3}\pi$ un. sup.

8. Hallar el área de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 6y$.
Sol. $72(\pi - 2)$ un. sup.

9. Hallar el área de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ interior al paraboloide $x^2 + y^2 = z$.
Sol. 4π un. sup.

10. Hallar el área de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ entre los planos $z = 2$ y $z = 4$.
Sol. 20π un. sup.

11. Hallar el área de la porción de la esfera $z = xy$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
Sol. $2\pi(2\sqrt{2} - 1)/3$ un. sup.

12. Hallar el área de la superficie del cono $x^2 + y^2 - 9z^2 = 0$ encima del plano $z = 0$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 6y$.
Sol. $3\sqrt{10}\pi$ un. sup.

13. Hallar el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ interior al cilindro elíptico $2x^2 + y^2 = 25$.
Sol. 50π un.sup.

14. Hallar el área de la superficie de $x^2 + y^2 - az = 0$ que está situada directamente encima de la lemniscata $4\varrho^2 = a^2 \cos 2\theta$.
Sol. $S = \frac{4}{a}\iint \sqrt{4\rho^2 + a^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{a^2}{3}\left\{\frac{5}{3} - \frac{\pi}{4}\right\}$ un. sup.

15. Hallar el área de la superficie de $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está situada directamente encima de la cardioide $\varrho = 1 - \cos\theta$.
Sol. $8[\pi - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)]$ un. sup.

Capítulo 67

Integral triple

LA INTEGRAL TRIPLE $\iiint_R f(x, y, z)\, dV$ de una función de tres variables independientes extendida a una región cerrada R de puntos (x, y, z), de volumen V, en la cual la función es uniforme y continua no es más que una generalización del concepto de integral simple y doble.

En el caso de que $f(x, y, z) = 1$, la integral $\iiint_R f(x, y, z)\, dV$ representa la medida del volumen de la región R.

CALCULO DE LA INTEGRAL TRIPLE $\iiint_R f(x, y, z)\, dV$ en coordenadas rectangulares.

$$\iiint_R f(x,y,z)\, dV = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\, dx\, dy, \quad \text{etc.}$$

tomando los límites de integración de forma que cubran la región R.

CALCULO DE LA INTEGRAL TRIPLE $\iiint_R f(\varrho, \theta, z)\, dV$ en coordenadas cilíndricas.

$$\iiint_R f(\rho,\theta,z)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)} f(\rho,\theta,z)\, \rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$

tomando los límites de integración de forma que cubran la región R.

CALCULO DE LA INTEGRAL TRIPLE $\iiint_R f(\varrho, \phi, \theta)\, dV$ en coordenadas esféricas.

$$\iiint_R f(\rho,\phi,\theta)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} \int_{\rho_1(\phi,\theta)}^{\rho_2(\phi,\theta)} f(\rho,\phi,\theta)\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

tomando los límites de integración de forma que cubran la región R.

CENTRO GEOMETRICO Y MOMENTOS DE INERCIA. Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, z)$ del *centro geométrico de un volumen* satisfacen las relaciones

$$\bar{x} \iiint_R dV = \iiint_R x\, dV, \quad \bar{y} \iiint_R dV = \iiint_R y\, dV,$$

$$\bar{z} \iiint_R dV = \iiint_R z\, dV$$

Los *momentos de inercia de un volumen* con respecto a los ejes coordenados vienen dados por

$$I_x = \iiint_R (y^2 + z^2)\, dV, \quad I_y = \iiint_R (z^2 + x^2)\, dV,$$

$$I_z = \iiint_R (x^2 + y^2)\, dV$$

Problemas resueltos

1. Consideremos la función $f(x, y, z)$, continua en una región R del espacio. Cortando a R por una serie de planos paralelos, $x = \xi_i$, $y = \eta_j$ y $z = \zeta_k$, dicha región queda dividida en paralelepípedos rectos de volumen $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k$, y en cierto número de paralelepípedos incompletos que ignoramos. En cada uno de los paralelepípedos completos se elige un punto $P_{ijk}(x_i, y_j, z_k)$ al que corresponde el valor $f(x_i, y_j, z_k)$, y formamos la suma

(i) $$\sum_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n\\ k=1,\ldots,p}} f(x_i, y_j, z_k)\cdot \Delta V_{ijk} \;=\; \sum_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n\\ k=1,\ldots,p}} f(x_i, y_j, z_k)\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k$$

La integral triple de $f(x, y, z)$ extendida a la región R es, por definición, el límite de (i) cuando el número de paralelepípedos crece indefinidamente de forma que las tres dimensiones de cada uno de ellos tiendan a cero.

Para hallar este límite, se pueden sumar, en primer lugar, todos los paralelepípedos que tienen dos dimensiones iguales a $\Delta_i x$ y $\Delta_j y$ considerando i y j constantes, y calcular el límite cuando $\Delta_k z \to 0$. Así pues,

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} f(x_i, y_j, z_k)\, \Delta_k z\, \Delta_i x\, \Delta_j y \;=\; \int_{z_1}^{z_2} f(x_i, y_j, z)\, dz\, \Delta_i x\, \Delta_j y$$

Ahora bien, estas son las columnas de las subregiones de la base consideradas en el Capítulo 23; por consiguiente,

$$\lim_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty\\ p\to+\infty}} \sum_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n\\ k=1,\ldots,p}} f(x_i, y_j, z_k)\cdot \Delta V_{ijk} \;=\; \iiint_R f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy \;=\; \iiint_R f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

2. Hallar.

(a) $$\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{2-x} xyz\, dz\, dy\, dx$$
$$= \int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left\{\int_0^{2-x} xyz\, dz\right\}dy\right]dx$$
$$= \int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left\{\frac{xyz^2}{2}\Big|_{z=0}^{z=2-x}\right\}dy\right]dx \;=\; \int_0^1\left[\int_0^{1-x}\frac{xy(2-x)^2}{2}\,dy\right]dx$$
$$= \int_0^1\left[\frac{xy^2(2-x)^2}{4}\Big|_{y=0}^{y=1-x}\right]dx \;=\; \frac{1}{4}\int_0^1 (4x - 12x^2 + 13x^3 - 6x^4 + x^5)\, dx \;=\; \frac{13}{240}$$

(b) $$\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^2 z\rho^2 \operatorname{sen}\theta\, dz\, d\rho\, d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \frac{z^2}{2}\Big|_0^2 \rho^2 \operatorname{sen}\theta\, d\rho\, d\theta \;=\; 2\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho^2 \operatorname{sen}\theta\, d\rho\, d\theta$$
$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \rho^3\Big|_0^1 \operatorname{sen}\theta\, d\theta \;=\; -\frac{2}{3}\cos\theta\Big|_0^{\pi/2} \;=\; 2/3$$

(c) $$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\phi} \operatorname{sen}2\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \;=\; 2\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta \;=\; 2\int_0^{\pi} (1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2})\, d\theta \;=\; (2-\sqrt{2})\pi$$

3. Hallar la integral triple de $F(x, y, z) = z$ extendida a la región R del primer octante limitada por los planos $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$, $2y + x = 6$ y el cilindro $y^2 + z^2 = 4$ (ver Figura 67-1).

Integremos primero con respecto a z, desde $z = 0$ (plano xOy) hasta $z = \sqrt{4 - y^2}$ (cilindro); luego, lo hacemos con respecto a x, desde $x = 2 - y$ hasta $x = 6 - 2y$, y finalmente con respecto a y, desde $y = 0$ hasta $y = 2$. En estas condiciones,

$$\iiint_R z\, dV \;=\; \int_0^2\int_{2-y}^{6-2y}\int_0^{\sqrt{4-y^2}} z\, dz\, dx\, dy \;=\; \int_0^2\int_{2-y}^{6-2y} (\tfrac{1}{2}z^2)\Big]_0^{\sqrt{4-y^2}} dx\, dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^2\int_{2-y}^{6-2y} (4-y^2)\, dx\, dy \;=\; \frac{1}{2}\int_0^2 (4-y^2)x\Big]_{2-y}^{6-2y} dy \;=\; \frac{26}{3}$$

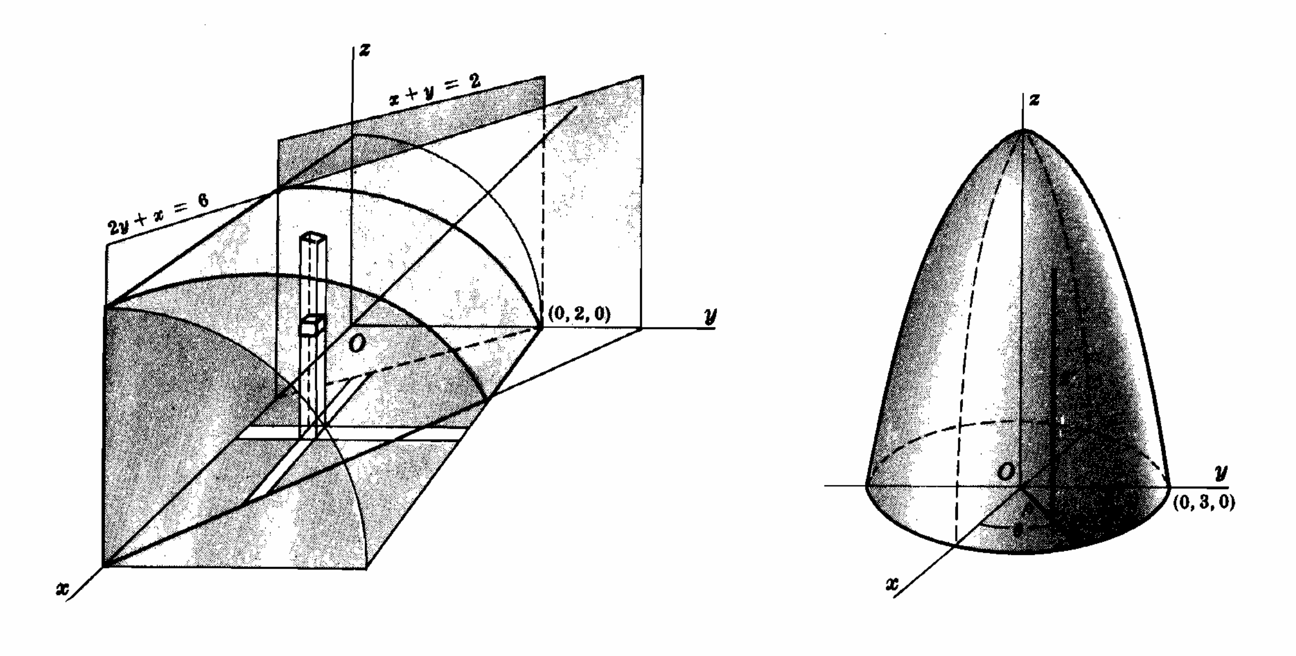


Fig. 67-1

Fig. 67-2

4. Hallar la integral triple de $f(\varrho, \theta, z) = \varrho^2$ extendida a la región R limitada por el paraboloide $\varrho^2 = 9 - z$ y el plano $z = 0$ ver Figura 67-2).

Integramos primero con respecto a z, desde $z = 0$ hasta $z = 9 - \varrho^2$, a continuación con respecto a ϱ, desde $\varrho = 0$ hasta $\varrho = 3$, y finalmente con respecto a θ, desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$. Por tanto,

$$\iiint_R \rho^2\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{9-\rho^2} \rho^2(\rho\, dz\, d\rho\, d\theta) = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \rho^3(9-\rho^2)\, d\rho\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{9}{4}\rho^4 - \tfrac{1}{6}\rho^6\right)\Big]_0^3 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{243}{4}\, d\theta = \frac{243}{2}\pi$$

5. Demostrar que las integrales (a) $4\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}}\int_{(x^2+y^2)/4}^4 dz\, dy\, dx$, (b) $4\int_0^4\int_0^{2\sqrt{z}}\int_0^{\sqrt{4z-x^2}} dy\, dx\, dz$, y (c) $4\int_0^4\int_{y^2/4}^4\int_0^{\sqrt{4z-y^2}} dx\, dz\, dy$ representan el mismo volumen.

(a) En este caso, z varía entre $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ y $z = 4$; es decir, el volumen está limitado inferiormente por el paraboloide $4z = x^2 + y^2$, y superiormente por el plano $z = 4$. Al variar y y x, se recorre un cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = 16$, $z = 0$, la proyección de la curva de intersección del paraboloide con el plano $z = 4$ sobre el plano xOy. Por tanto, la integral proporciona el volumen limitado por el paraboloide y por el plano $z = 4$.

(b) En este caso, y varía desde $y = 0$ hasta $y = \sqrt{4z - x^2}$; es decir, el volumen está limitado a la izquierda por el plano zOx, y a la derecha por el paraboloide $y^2 = 4z - x^2$. Al variar x y z se recorre la mitad del área limitada por la parábola $x^2 = 4z$, $y = 0$, la curva de intersección del paraboloide con el plano zOx y el plano $z = 4$. La región R es la de (a).

(c) El volumen está limitado por detrás por el plano yOz y por delante por el paraboloide $4z = x^2 + y^2$. Al variar z e y se recorre la mitad del área limitada por la parábola $y^2 = 4z$, $x = 0$, la curva de intersección del paraboloide y el plano yOz y por el plano $z = 4$. La región R es la de (a).

6. Hallar la integral triple de $F(\varrho, \phi, \theta) = 1/\varrho$ extendida a la región R del primer octante limitada por los conos $\phi = \frac{1}{4}\pi$ y $\phi = \text{arc tag } 2$ y la esfera $\varrho = \sqrt{6}$ (Figura 67-3).

Integramos primero con respecto a ϱ, desde $\varrho = 0$ hasta $\varrho = \sqrt{6}$; a continuación, lo hacemos con respecto a ϕ, desde $\phi = \frac{1}{4}\pi$ hasta $\phi = \text{arc tag } 2$, y finalmente con respecto a θ, desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Así pies,

$$\iiint_R \frac{1}{\rho}\, dV = \int_0^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\text{arc tag } 2}\int_0^{\sqrt{6}} \frac{1}{\rho}\rho^2 \,\text{sen}\,\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= 3\int_0^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\text{arc tag } 2} \text{sen}\,\phi\, d\phi\, d\theta = -3\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)d\theta = \frac{3\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

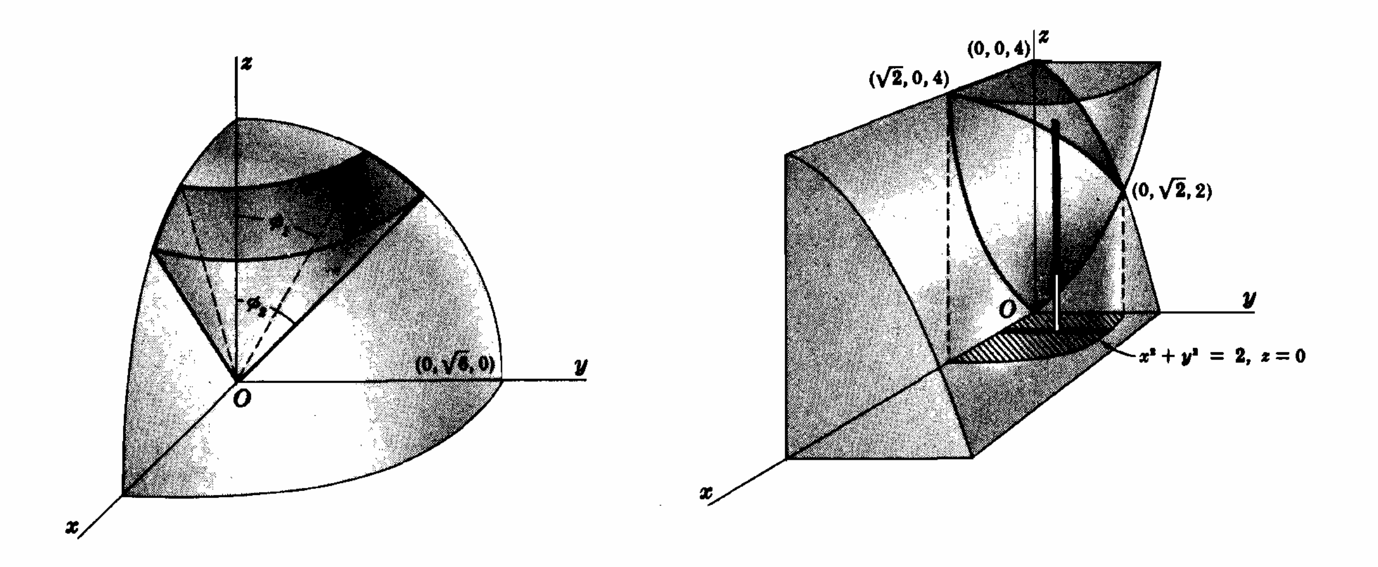


Fig. 67-3

Fig. 67-4

7. Hallar el volumen limitado por el paraboloide $z = 2x^2 + y^2$ y el cilindro $z = 4 - y^2$ (Figura 67-4).

Integremos en primer lugar con respecto a z, desde $z = 2x^2 + y^2$ hasta $z = 4 - y^2$; a continuación con respecto a y, desde $y = 0$ hasta $y = \sqrt{2 - x^2}$ (la ecuación $x^2 + y^2 = 2$ se obtiene eliminando z en las ecuaciones de las dos superficies), y finalmente con respecto a x, desde $x = 0$ hasta $x = \sqrt{2}$ (obtenido al sustituir $y = 0$ en $x^2 + y^2 = 2$) determinando así la cuarta parte del volumen pedido. Por tanto,

$$V = 4\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} dz\, dy\, dx = 4\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}} \{(4-y^2) - (2x^2+y^2)\}\, dy\, dx$$

$$= 4\int_0^{\sqrt{2}}\left(4y - 2x^2y - \frac{2y^3}{3}\right)\Big]_0^{\sqrt{2-x^2}} dx = \frac{16}{3}\int_0^{\sqrt{2}}(2-x^2)^{3/2}\, dx = 4\pi \text{ unidades de volumen}$$

8. Hallar el volumen interior al cilindro $\varrho = 4\cos\theta$ limitado superiormente por la esfera $\varrho^2 + z^2 = 16$, e inferiormente por el plano $z = 0$ (Figura 67-5).

Integremos primero con respecto a z, desde $z = 0$ hasta $z = \sqrt{16 - \varrho^2}$; a continuación lo hacemos con respecto a ϱ, desde $\varrho = 0$ hasta $\varrho = 4\cos\theta$, y finalmente con respecto a θ, desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$, obteniendo así el volumen pedido. En estas condiciones,

$$V = \int_0^{\pi}\int_0^{4\cos\theta}\int_0^{\sqrt{16-\rho^2}} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{4\cos\theta} \rho\sqrt{16-\rho^2}\, d\rho\, d\theta$$

$$= -\frac{64}{3}\int_0^{\pi}(\text{sen}^3\,\theta - 1)\, d\theta = \frac{64}{9}(3\pi - 4) \text{ unidades de volumen}$$

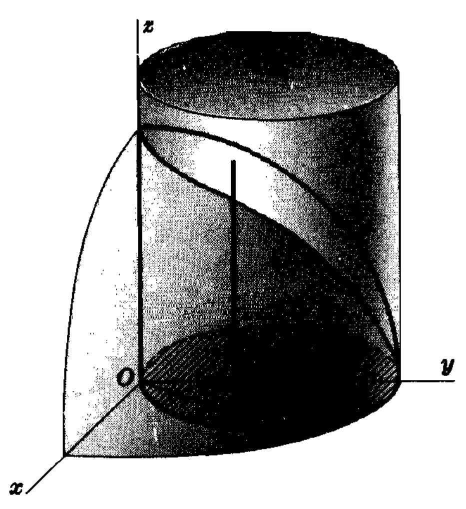


Fig. 67-5

Fig. 67-6

9. Determinar las coordenadas del centro geométrico del volumen interior al cilindro $\varrho = 2\cos\theta$ limitado superiormente por el paraboloide $z = \varrho^2$, e inferiormente por el plano $z = 0$ (Fig. 67-6).

$$V = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{\rho^2} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \rho^3\, d\rho\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \rho^4\Big]_0^{2\cos\theta} d\theta = 8\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{3}{2}\pi$$

$$M_{yz} = \iiint_R x\, dV = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{\rho^2} \rho\cos\theta \cdot \rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \rho^4 \cos\theta\, d\rho\, d\theta = \frac{64}{5}\int_0^{\pi/2} \cos^6\theta\, d\theta = 2\pi, \quad \text{y} \quad \bar{x} = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{4}{3}$$

Por simetría, $\bar{y} = 0$.

$$M_{xy} = \iiint_R z\, dV = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{\rho^2} z \cdot \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \rho^5\, d\rho\, d\theta$$

$$= \frac{32}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^6\theta\, d\theta = \frac{5}{3}\pi, \quad \text{y} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{10}{9}$$

Así pues, las coordenadas del centro geométrico (4/3, 0, 10/9),

10. Dado un cono recto circular de radio r y altura h, determinar (*a*) el centro geométrico, (*b*) el momento de inercia con respecto a su eje, (*c*) el momento de inercia con respecto a una recta cualquiera que pase por su vértice y sea perpendicular a su eje, (*d*) el momento de inercia con respecto a una recta cualquiera que pase por el centro geométrico y sea perpendicular al eje, (*e*) el momento de inercia con respecto a un diámetro de la base.

Considerando el cono como se representa en la Fig. 67-7, su ecuación es $\varrho = \frac{r}{h}z$. Por tanto,

$$V = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{r}\int_{\frac{h}{r}\rho}^{h} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{r}\left(h\rho - \frac{h}{r}\rho^2\right) d\rho\, d\theta$$

$$= \frac{2}{3}hr^2\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{3}\pi h r^2$$

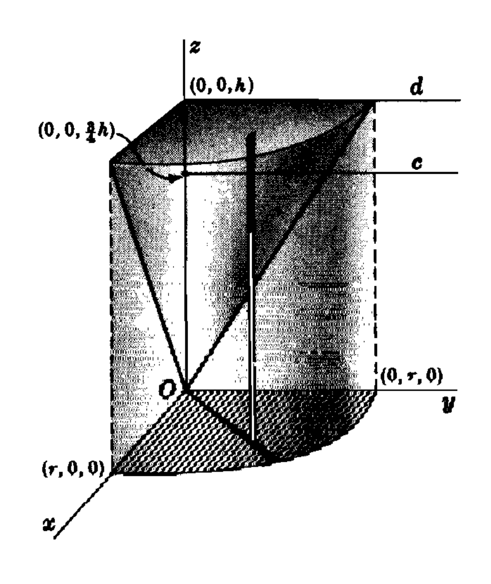


Fig. 67-7

(*a*) El centro geométrico está situado en el eje z.

$$M_{xy} = \iiint_R z\,dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^r\int_{\frac{h}{r}\rho}^{h} z\,\rho\,dz\,d\rho\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\int_0^r \left(h^2\rho - \frac{h^2}{r^2}\rho^3\right) d\rho\,d\theta = \frac{1}{2}h^2r^2\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{4}\pi h^2 r^2$$

y $\bar{z} = \dfrac{M_{xy}}{V} = \dfrac{3}{4}h$. Luego, las coordenadas del centro geométrico son $(0,0,\frac{3}{4}h)$.

(*b*) $$I_z = \iiint_R (x^2+y^2)\,dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^r\int_{\frac{h}{r}\rho}^{h} \rho^2\cdot\rho\,dz\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{10}\pi h r^4 = \frac{3}{10}r^2V$$

(*c*) Tomando la recta como eje y.

$$I_y = \iiint_R (x^2+z^2)\,dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^r\int_{\frac{h}{r}\rho}^{h} (\rho^2\cos^2\theta + z^2)\,\rho\,dz\,d\rho\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^r \left\{\left(h\rho^3 - \frac{h}{r}\rho^4\right)\cos^2\theta + \frac{1}{3}\left(h^3\rho - \frac{h^3}{r^3}\rho^4\right)\right\} d\rho\,d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\pi h r^2\left(h^2 + \frac{1}{4}r^2\right) = \frac{3}{5}\left(h^2+\frac{1}{4}r^2\right)V$$

(*d*) Sea c la recta que pasa por el centroide y es paralela al eje y. Por el teorema de Steiner,

$$I_y = I_c + V(\tfrac{3}{4}h)^2 \qquad \text{y} \qquad I_c = \tfrac{3}{5}(h^2+\tfrac{1}{4}r^2)V - \tfrac{9}{16}h^2V = \tfrac{3}{80}(h^2+4r^2)V$$

(*e*) Sea d el diámetro de la base del cono, tomado paralelo al eje y. Tendremos

$$I_d = I_c + V(\tfrac{1}{4}h)^2 = \tfrac{3}{80}(h^2+4r^2)V + \tfrac{1}{16}h^2V = \tfrac{1}{20}(2h^2+3r^2)V$$

11. Hallar el volumen limitado por el cono $\phi = \frac{1}{4}\pi$ y la esfera $\rho = 2a\cos\phi$ (Ver Figura 67-8).

$$V = 4\iiint_R dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2a\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= \frac{32a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4} \cos^3\phi\,\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta = 2a^3\int_0^{\pi/2} d\theta = \pi a^3 \text{ unidades de volumen}$$

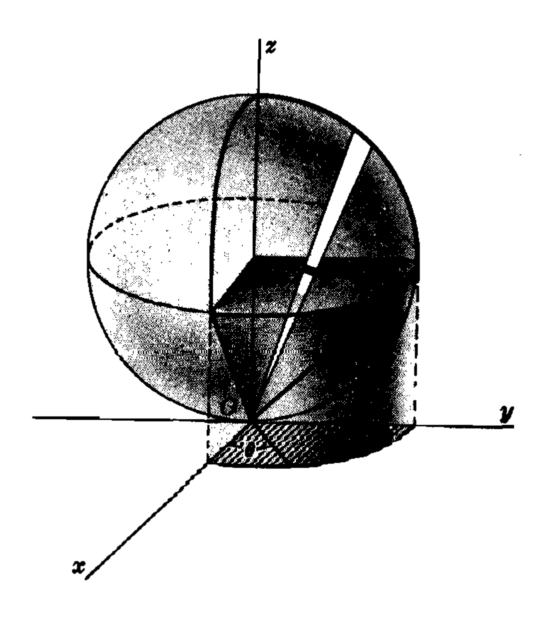


Fig. 67-8

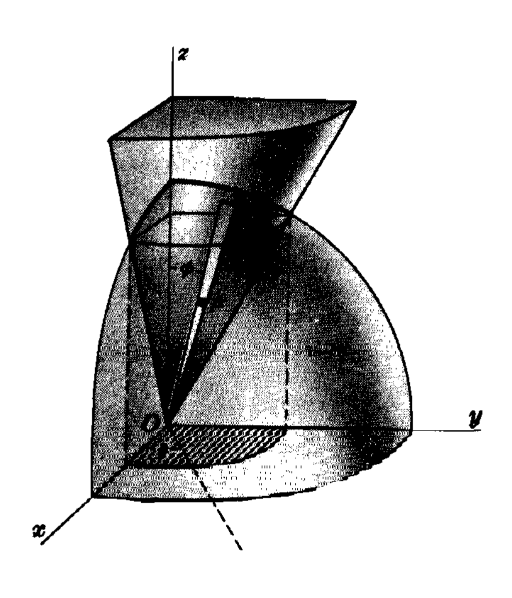


Fig. 67-9

12. Determinar el centro geométrico del volumen limitado por un cono de ángulo en el vértice igual a 60° y una esfera de radio 2 cuyo centro está en el vértice del cono. (Ver Figura 67-9.)

Tomando las superficies como se indican en la figura, $\bar{x} = \bar{y} = 0$. En coordenadas esféricas, la ecuación del cono es $\phi = \pi/6$, y la correspondiente a la esfera es $\rho = 2$.

$$V = \iiint_R dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6}\int_0^2 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \frac{32}{3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= -\frac{32}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{8\pi}{3}(2 - \sqrt{3})$$

$$M_{xy} = \iiint_R z \, dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6}\int_0^2 \rho\cos\phi \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= 8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen} 2\phi \, d\phi \, d\theta = \pi, \quad \text{y} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{3(2+\sqrt{3})}{8}.$$

13. Hallar el momento de inercia con respecto al eje z del volumen del Problema 12.

$$I_z = \iiint_R (x^2 + y^2)\, dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6}\int_0^2 \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{128}{5}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}^3\phi \, d\phi \, d\theta = \frac{128}{5}\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{8}\sqrt{3}\right)\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{8\pi}{15}(16 - 9\sqrt{3}) = \frac{5 - 2\sqrt{3}}{5}V$$

Problemas propuestos

14. Hallar las integrales triples siguientes:

(*a*) $\int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 dz\, dx\, dy = 1$

(*b*) $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \int_0^{xy} dz\, dy\, dx = 1/24$

(*c*) $\int_0^6 \int_0^{12-2y} \int_0^{4-2y/3-x/3} x\, dz\, dx\, dy = 144 = \int_0^{12} \int_0^{6-x/2} \int_0^{4-2y/3-x/3} x\, dz\, dy\, dx$

(*d*) $\int_0^{\pi/2} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-z^2}} (16-\rho^2)^{1/2} \rho\, z\, d\rho\, dz\, d\theta = \frac{256}{5}\pi$

(*e*) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^5 \rho^4 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = 2500\pi$

15. (*a*) Hallar la integral del Problema 14(*b*) cambiando el orden a $dz\, dx\, dy$.

(*b*) Hallar la integral del Problema 14(*c*) cambiando el orden a $dx\, dy\, dz$ y también a $dy\, dz\, dx$.

16. Hallar los volúmenes siguientes, por medio de una integral triple y empleando coordenadas rectangulares:

(*a*) interior a $x^2 + y^2 = 9$, encima de $z = 0$, y debajo de $x + z = 4$. *Sol.* 36π un. vol.

(*b*) limitado por planos coordenados y $6x + 4y + 3z = 12$. *Sol.* 4 un. vol.

(*c*) interior a $x^2 + y^2 = 4x$, encima de $z = 0$, y debajo de $x^2 + y^2 = 4z$. *Sol.* 6π un. vol.

17. Hallar los volúmenes siguientes, por medio de una integral triple y empleando coordenadas cilíndricas:

(*a*) Problema 5.

(*b*) Problema 16(*c*).

(*c*) inferior a $\rho^2 = 16$, encima de $z = 0$, y debajo de $2z = y$. *Sol.* 64/3 un. vol.

18. Determinar el centro geométrico de los volúmenes siguientes:

(*a*) interior a $z^2 = xy$ y encima del triángulo $y = x$, $y = 0$, $x = 4$. en el plano $z = 0$. *Sol.* $(3, 9/5, 9/8)$

(*b*) Problema 16(*b*). *Sol.* $(1/2, 3/4, 1)$

(*c*) volumen del primer octante del Problema 16(*a*). *Sol.* $\left(\dfrac{64 - 9\pi}{16(\pi - 1)}, \dfrac{23}{8(\pi - 1)}, \dfrac{73\pi - 128}{32(\pi - 1)}\right)$

(*d*) Problema 16(*c*). *Sol.* $(8/3, 0, 10/9)$

(*e*) Problema 17(*c*). *Sol.* $(0, 3\pi/4, 3\pi/16)$

19. Hallar los momentos de inercia I_x, I_y, I_z de los volúmenes siguientes:

(*a*) Problema 5. *Sol.* $I_x = I_y = \frac{32}{3}V$, $I_z = \frac{16}{3}V$

(*b*) Problema 16(*b*) *Sol.* $I_x = \frac{5}{2}V$, $I_y = 2V$, $I_z = \frac{13}{10}V$

(*c*) Problema 16(*c*) *Sol.* $I_x = \frac{55}{18}V$, $I_y = \frac{175}{18}V$, $I_z = \frac{80}{9}V$

(*d*) limitado por $z = \varrho^2$ y el plano $z = 2$. *Sol.* $I_x = I_y = \frac{7}{3}V$, $I_z = \frac{2}{3}V$

20. Demostrar que, en coordenadas cilíndricas, la integral triple de una función $f(\varrho, \theta, z)$ extendida a una región R se puede representar por

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)} f(\rho, \theta, z)\, \rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$

Ind. Considérese (ver Fig. 67-10) una subregión genérica de R limitada por dos cilindros cuyo eje sea Oz y de radios ϱ y $\varrho = \Delta\varrho$, dos planos horizontales que pasen por los puntos $(0, 0, z)$ y $(0, 0, z + \Delta z)$ y dos planos verticales que pasen por el eje Oz y formen con el plano xOz los ángulos θ y $\theta + \Delta\theta$. Tómese $\Delta v = (\varrho\Delta\theta)\,\Delta\varrho \cdot \Delta z$ como una aproximación de este volumen.

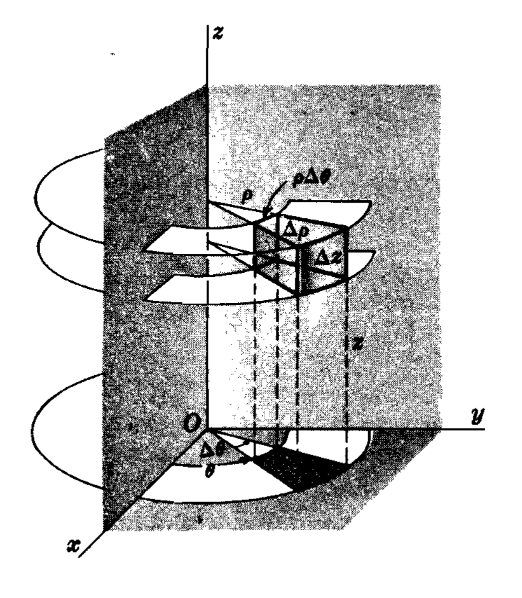


Fig. 67-10

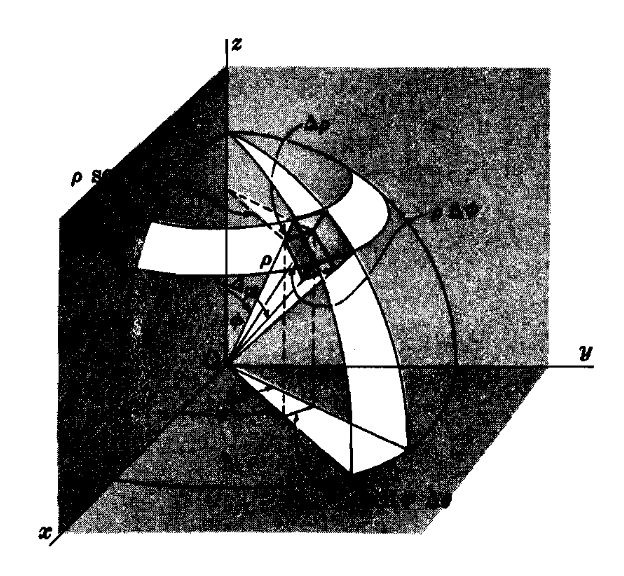


Fig. 67-11

21. Demostrar que, en coordenadas esféricas, la integral triple de una función $f(\varrho, \phi, \theta)$ extendida a una región R se puede representar por

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} \int_{\rho_1(\phi,\theta)}^{\rho_2(\phi,\theta)} f(\rho, \phi, \theta)\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

Ind. Considérese (ver Fig. 67-11) una subregión genérica de R limitada por dos esferas de centro O y radios ϱ y $\varrho + \Delta\varrho$, dos conos de vértices O, eje Oz y semiángulo en el vértice ϕ y $\phi + \Delta\phi$, y dos planos verticales que pasen por el eje Oz y formen con el plano zO y los ángulos θ y $\theta + \Delta\theta$. Tómese

$$\Delta V = (\varrho\,\Delta\phi)(\varrho \operatorname{sen}\phi\,\Delta\theta)(\Delta\varrho) = \varrho^2 \operatorname{sen}\phi\,\Delta\varrho\,\Delta\phi\,\Delta\theta$$

como una aproximación de este volumen.

Capítulo 68

Cuerpos de densidad variable

LOS CUERPOS HOMOGENEOS con los que hemos tratado en los capítulos anteriores se consideraron como figuras geométricas de densidad $\delta = 1$. La masa de un sólido homogéneo de volumen V y densidad δ viene dada por $m = \delta V$.

La masa elemental dm de un sólido no homogéneo cuya densidad varía de punto a punto viene dada por:

$\delta(x, y)\, ds$ para una línea material (por ejemplo, una varilla fina),

$\delta(x, y)\, dA$ para una superficie material (por ejemplo, una hoja de metal delgada),

$\delta(x, y, z)\, dV$ para un sólido material.

Problemas resueltos

1. Hallar la masa de una varilla semicircular sabiendo que la densidad en cada punto es proporcional a su distancia al diámetro que une sus extremos.

Tomando la varilla como se indica en la Fig. 68-1, $\delta(x, y) = ky$.

Por tanto, de $x^2 + y^2 = r^2$,

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \frac{r}{y}\, dx$$

y

$$m = \int \delta(x, y)\, ds = \int_{-r}^{r} ky \cdot \frac{r}{y}\, dx = kr \int_{-r}^{r} dx = 2kr^2 \text{ unidades}$$

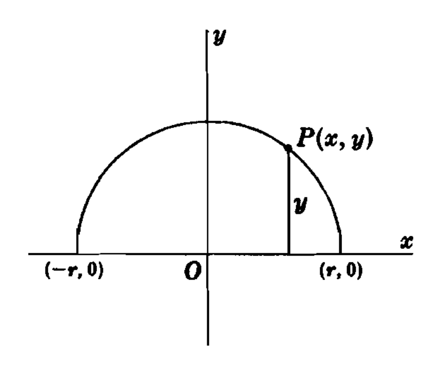


Fig. 68-1

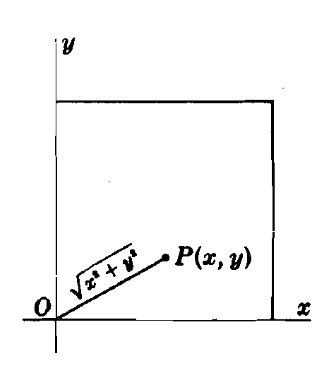


Fig. 68-2

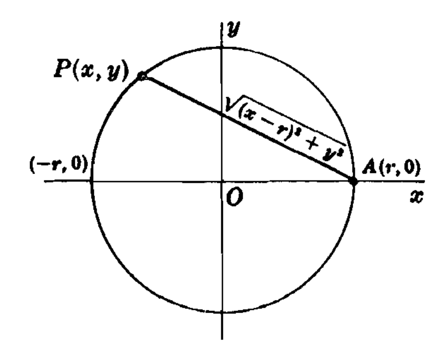


Fig. 68-3

2. Hallar la masa de una placa cuadrada de lado a sabiendo que la densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de su distancia a un vértice (Fig. 68-2).

Tomando el cuadrado como se indica en la figura, de forma que uno de sus vértices coincida con el origen, $\delta(x, y) = k(x^2 + y^2)$, y

$$m = \iint_R \delta(x, y)\, dA = \int_0^a \int_0^a k(x^2 + y^2)\, dx\, dy = k \int_0^a (\tfrac{1}{3}a^3 + ay^2)\, dy = \tfrac{2}{3}ka^4 \text{ unidades}$$

3. Hallar la masa de un plato circular de radio r sabiendo que la densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de su distancia a un punto de la circunferencia (Fig. 68-3).

Tomando el círculo como se indica en la figura, llamando $A(r, 0)$ al punto fijo elegido sobre la circunferencia $\delta(x, y) = k\{(x - r)^2 + y^2\}$, y

$$m = \iint_R \delta(x,y)\,dA = 2\int_{-r}^{r}\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} k\{(x-r)^2+y^2\}\,dy\,dx = \frac{3}{2}k\pi r^4 \text{ unidades}$$

4. Determinar el centro de masas de un plato cuyo contorno es un arco de la parábola $y^2 = 8x$ limitada por la ordenada en el punto $x = 2$, sabiendo que la densidad en cada punto es igual a su distancia a dicha ordenada. Ver Fig. 68-4.

Será, $\delta(x, y) = 2 - x$ y por simetría $\bar{y} = 0$. Para la mitad superior de la placa.

$$m = \iint_R \delta(x,y)\,dA = \int_0^4\int_{y^2/8}^{2} k(2-x)\,dx\,dy = k\int_0^4\left(2-\frac{y^2}{4}+\frac{y^4}{128}\right)dy = \frac{64}{15}k,$$

$$M_y = \iint_R \delta(x,y)\,x\,dA = \int_0^4\int_{y^2/8}^{2} k(2-x)\,x\,dx\,dy = k\int_0^4\left(\frac{4}{3}-\frac{y^4}{64}+\frac{y^6}{24\cdot 64}\right)dy = \frac{128}{35}k$$

y $\bar{x} = \dfrac{M_y}{m} = \dfrac{6}{7}$. Las coordenadas del centro de masas son $(\frac{6}{7}, 0)$

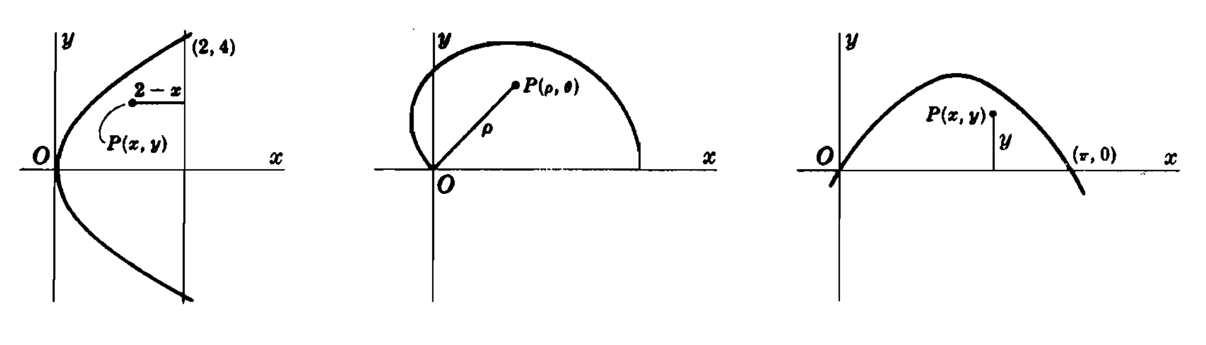


Fig. 68-4 **Fig. 68-5** **Fig. 68-6**

5. Determinar el centro de masas de un plato cuyo borde presenta la forma de media cardioide de ecuación $\rho = 2(1 + \cos\theta)$, sabiendo que la densidad en cada punto es proporcional a su distancia al polo (Fig. 68-5).

$$m = \iint_R \delta(\rho,\theta)\,dA = \int_0^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} k\rho\cdot\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{8}{3}k\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3\,d\theta = \frac{20}{3}k\pi,$$

$$M_x = \iint_R \delta(\rho,\theta)\,y\,dA = \int_0^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} k\rho\cdot\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= 4k\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^4\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta = \frac{128}{5}k,$$

$$M_y = \iint_R \delta(\rho,\theta)\,x\,dA = \int_0^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} k\rho\cdot\rho\cos\theta\cdot\rho\,d\rho\,d\theta = 14k\pi$$

Luego $\bar{x} = \dfrac{M_y}{m} = \dfrac{21}{10}$, $\bar{y} = \dfrac{M_x}{m} = \dfrac{96}{25\pi}$, y las coordenadas del centro de masas son $\left(\dfrac{21}{10}, \dfrac{96}{25\pi}\right)$.

6. Hallar el momento de inercia, con respecto al eje x, de un plato cuyo contorno es un arco de la curva $y = \mathrm{sen}\,x$ y el eje x, sabiendo que la densidad de cada punto es proporcional a su distancia al eje x (Fig. 68-6).

$$m = \iint_R \delta(x,y)\,dA = \int_0^{\pi}\int_0^{\mathrm{sen}\,x} ky\,dy\,dx = \frac{1}{2}k\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{4}k\pi$$

y

$$I_x = \iint_R \delta(x,y)\,y^2\,dA = \int_0^{\pi}\int_0^{\mathrm{sen}\,x} ky\cdot y^2\cdot dy\,dx = \frac{1}{4}k\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^4 x\,dx = \frac{3}{32}k\pi = \frac{3}{8}m$$

7. Hallar la masa de una esfera de radio r sabiendo que la densidad en cada punto es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro (Fig. 68-7).

Tomando la esfera como indica la figura, $\delta(x, y, z) = \dfrac{k}{x^2 + y^2 + z^2} = \dfrac{k}{\rho^2}$ y

$$m = \iiint_R \delta(x, y, z)\, dV = 8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^r \frac{k}{\rho^2}\cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= 8kr\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta = 8kr\int_0^{\pi/2} d\theta = 4k\pi r \text{ unidades}$$

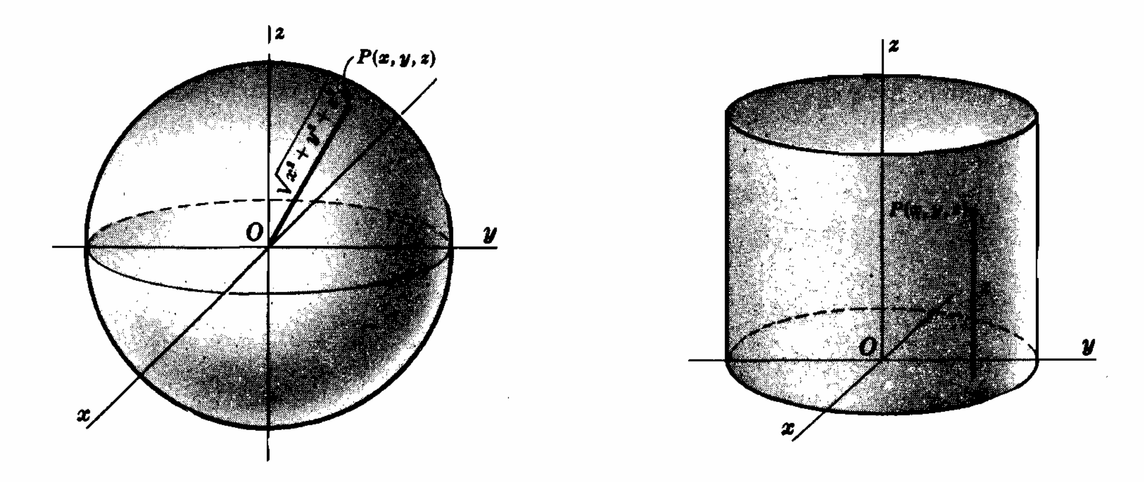


Fig. 68-7 Fig. 68-8

8. Determinar el centro de masas de un cilindro circular recto de radio r y altura h sabiendo que la densidad en cada punto es proporcional a su distancia a la base (Fig. 68-6).

Tomando el cilindro como se indica en la figura, su ecuación es $\rho = r$, y el volumen a considerar corresponde a la porción de cilindro comprendido entre los planos $z = 0$ y $z = h$. Evidentemente, el centro de masas está situado en el eje z.

$$m = \iiint_R \delta(z, \rho, \theta)\, dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^r\int_0^h kz\cdot\rho\, dz\, d\rho\, d\theta = 2kh^2\int_0^{\pi/2}\int_0^r \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= kh^2r^2\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{2}k\pi h^2r^2,$$

$$M_{xy} = \iiint_R \delta(z, \rho, \theta)\, z\, dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^r\int_0^h kz^2\cdot\rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \frac{4}{3}kh^3\int_0^{\pi/2}\int_0^r \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= \frac{2}{3}kh^3r^2\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{3}k\pi h^3r^2 \quad \text{y} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{2}{3}h$$

Las coordenadas del centro de masas son $(0, 0, \tfrac{2}{3}h)$.

Problemas propuestos

9. Hallar la masa de:

(*a*) una barra recta de longitud a, sabiendo que la densidad en cada punto es proporcional a su distancia a uno de los extremos. *Sol.* $\frac{1}{2}ka^2$.

(*b*) un plato en forma de triángulo rectángulo de catetos a y b, siendo la densidad en cada punto proporcional a la suma de sus distancias a los catetos. *Sol.* $\frac{1}{6}kab(a + b)$.

(*c*) un plato circular de radio a, siendo la densidad de cada punto proporcional a su distancia al centro. *Sol.* $\frac{2}{3}ka^3\pi$.

(*d*) un plato de forma elíptica de ecuación $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, siendo la densidad de cada punto proporcional a la suma de sus distancias a los ejes. *Sol.* $\frac{4}{3}kab(a + b)$.

(*e*) un cilindro circular de altura b y radio de la base a, siendo la densidad en cada punto proporcional al cuadrado de su distancia al eje. *Sol.* $\frac{1}{2}ka^4b\pi$.

(*f*) una esfera de radio a, siendo la densidad en cada punto proporcional a su distancia a un plano diametral fijo. *Sol.* $\frac{1}{2}ka^4\pi$.

(*g*) un cono circular de altura b y radio de la base a, siendo la densidad en cada punto proporcional a su distancia al eje. *Sol.* $\frac{1}{6}ka^3b\pi$.

(*h*) una superficie esférica, siendo la densidad en cada punto proporcional a su distancia a un plano diametral fijo. *Sol.* $2ka^3\pi$.

10. Determinar el centro de masas de:

(*a*) un cuadrante de 9(*c*). *Sol.* $(3a/2\pi, 3a/2\pi)$.

(*b*) un cuadrante de un plato circular de radio a, siendo la densidad en cada punto igual a su distancia a uno de los radios límites (eje x). *Sol.* $(3a/8, 3a\pi/16)$.

(*c*) un cubo de arista a, siendo la densidad en cada punto igual a la suma de sus distancias a tres aristas adyacentes (ejes coordenados). *Sol.* $(5a/9, 5a/9, 5a/9)$.

(*d*) un octante de una esfera de radio a, siendo la densidad en cada punto igual a su distancia a una de las caras planas. *Sol.* $(16a/15\pi, 16a/15\pi, 8a/15)$.

(*e*) un cono circular recto de altura b y radio de la base a, siendo la densidad en cada punto igual a su distancia a la base. *Sol.* $(0, 0, 2b/5)$.

11. Hallar el momento de inercia de:

(*a*) un plato cuadrado de lado a, con respecto a un lado, siendo la densidad en cada punto igual al cuadrado de su distancia a un extremo de dicho lado. *Sol.* $^{7}/_{15}\, a^2m$.

(*b*) un plato circular de radio a, con respecto a su centro, siendo la densidad en cada punto igual al cuadrado de su distancia al centro. *Sol.* $\frac{2}{3}a^2m$.

(*c*) un cubo de arista a, con respecto a una arista, siendo la densidad en cada punto igual al cuadrado de su distancia a un extremo de dicha arista. *Sol.* $^{38}/_{45}a^2m$.

(*d*) un cono circular recto de altura b y radio de la base a, con respecto a su eje, siendo la densidad en cada punto igual a su distancia al eje. *Sol.* $^{2}/_{5}a^2m$.

(*e*) el cono de (*d*), siendo la densidad en cada punto igual a su distancia a la base. *Sol.* $\frac{1}{5}a^2m$.

Capítulo 69

Ecuaciones diferenciales

UNA ECUACION DIFERENCIAL es aquella en cuyos términos figuran derivadas o diferenciales; por ejemplo, $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\,\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0, \quad dy = (x + 2y)\,dx$, etc.

El *orden* de una ecuación diferencial es el correspondiente al de la derivada de mayor índice que figura en ella. La primera de las ecuaciones anteriores es de segundo orden y la segunda es de primer orden. Ambas son *lineales* o de primer grado.

Una *solución* de una ecuación diferencial es toda relación entre las variables en la que no figuran ni derivadas ni diferenciales y que satisface idénticamente a la ecuación. La *solución general* de una ecuación diferencial de orden n es aquella solución que contiene el máximo número ($= n$) de constantes arbitrarias.

(Ver Problemas 1-3.)

ECUACION DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN. Es de la forma $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$. Si una ecuación de este tipo se puede escribir en la forma particular $f_1(x) \cdot g_2(y)\,dx + f_2(x) \cdot g_1(y)\,dy = 0$, las variables son *separables* y la solución viene dada por

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\,dy = C$$

(Ver Problemas 4-6.)

Una función $f(x, y)$ es ***homogénea de grado n***, si $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$. La ecuación $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ es ***homogénea***, si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas del mismo grado.

La sustitución

$$y = vx, \qquad dy = v\,dx + x\,dv$$

transforma la ecuación homogénea en otra cuyas variables, x e y, son separables.

(Ver Problemas 7-9.)

ALGUNAS ECUACIONES DIFERENCIALES se pueden resolver, rápidamente, si se advierte en ellas la presencia de combinaciones de términos integrables.

Otras ecuaciones, cuya solución no es inmediata por el método anterior, se pueden resolver multiplicándolas por un factor adecuado, función de x e y, que recibe el nombre de *factor integrante* de la ecuación.

(Ver Problemas 10-14.)

La ecuación diferencial lineal de primer orden $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$, siendo P y Q funciones de x solamente, tiene como factor integrante $\xi(x) = e^{\int P\,dx}$. (Ver Problemas 15-17.

Una ecuación de la forma $\dfrac{dy}{dx} + Py = Qy^n$, siendo $n \neq 0,1$ y P y Q funciones de x únicamente se reduce a otra lineal mediante la sustitución

$$y^{1-n} = z, \qquad y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}$$

(Ver Problemas 18-19.)

Problemas resueltos

1. Demostrar que (*a*) $y = 2e^x$, (*b*) $y = 3x$ y (*c*) $y = C_1e^x + C_2x$, siendo C_1 y C_2 constantes arbitrarias, son soluciones de la ecuación diferencial $y''(1-x) + y'x - y = 0$.

(*a*) Derivando dos veces la función $y = 2e^x$ resulta, $y' = 2e^x$ e $y'' = 2e^x$. Sustituyendo en la ecuación diferencial dada, se obtiene la identidad $2e^x(1-x) + 2e^xx - 2e^x = 0$.

(*b*) Derivando dos veces $y = 3x$ resulta, $y' = 3$ e $y'' = 0$. Sustituyendo en la ecuación diferencial dada se llega a la identidad $0(1-x) + 3x - 3x = 0$.

(*c*) Derivando dos veces $y = C_1e^x + C_2x$ resulta, $y' = C_1e^x + C_2$ e $y'' = C_1e^x$. Sustituyendo en la ecuación diferencial dada, se llega a la identidad $C_1e^x(1-x) + (C_1e^x + C_2)x - (C_1e^x + C_2x) = 0$.

La solución (*c*) es la *solución general* de la ecuación diferencial, ya que contiene el número apropiado de constantes arbitrarias. Las soluciones (*a*) y (*b*) reciben el nombre de *soluciones particulares*, puesto que ambas se pueden obtener para determinados valores de las constantes arbitrarias de la solución general.

2. Hallar la ecuación diferencial cuya solución general es

$$(a)\quad y = Cx^2 - x \qquad \text{y} \qquad (b)\quad y = C_1x^3 + C_2x + C_3$$

(*a*) Dirivando $y = Cx^2 - x$ obtenemos $y' = 2Cx - 1$. Despejando, $C = \frac{1}{2}\left(\frac{y'+1}{x}\right)$ y sustituyendo en la relación dada (solución general) resulta $y = \frac{1}{2}\left(\frac{y'+1}{x}\right)x^2 - x$ o sea $y'x = 2y + x$.

(*b*) Derivando tres veces $y = C_1x^3 + C_2x + C_3$ resulta, $y' = 3C_1x^2 + C_2$, $y'' = 6C_1x$, $y''' = 6C_1$. Por tanto, $y'' = xy'''$ es la ecuación pedida.

Obsérvese que la relación dada es una solución de la ecuación $y^{\text{iv}} = 0$, pero no es su solución general, ya que solamente contiene tres constantes arbitrarias.

3. Hallar la ecuación diferencial de todas las parábolas cuyo eje principal es el eje Ox.

La ecuación de una familia de parábolas es $y^2 = Ax + B$, siendo A y B constantes arbitrarias.

Derivando dos veces, obtenemos $2yy' = A$ y $2yy'' + 2y'^2 = 0$.

Luego $2yy'' + 2y'^2 = 0$ es la ecuación pedida.

4. Resolver $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1+y^3}{xy^2(1+x^2)} = 0$.

Operando, $xy^2(1+x^2)dy + (1+y^3)dx = 0$ ó $\dfrac{y^2}{1+y^3}dy + \dfrac{1}{x(1+x^2)}dx = 0$ que es una ecuación de variables separadas. Luego

$$\frac{y^2\,dy}{1+y^3} + \frac{dx}{x} - \frac{x\,dx}{1+x^2} = 0,$$

$$\frac{1}{3}\ln|1+y^3| + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = c,$$

$$2\ln|1+y^3| + 6\ln|x| - 3\ln(1+x^2) = 6c,$$

$$\ln\frac{x^6(1+y^3)^2}{(1+x^2)^3} = 6c \qquad \text{y} \qquad \frac{x^6(1+y^3)^2}{(1+x^2)^3} = e^{6c} = C.$$

5. Resolver $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$.

Tendremos $\dfrac{dy}{1+y^2} = \dfrac{dx}{1+x^2}$. Luego $\text{arc tag}\,y = \text{arc tag}\,x + \text{arc tag}\,C$ e

$$y = \text{tag}(\text{arc tag}\,x + \text{arc tag}\,C) = \frac{x+C}{1-Cx}$$

6. Resolver $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos^2 y}{\operatorname{sen}^2 x}$.

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}, \quad \sec^2 y\, dy = \csc^2 x\, dx, \quad \text{y} \quad \operatorname{tag} y = -\cot x + C$$

7. Resolver $2xy\, dy = (x^2 - y^2)\, dx$.

La ecuación es homogénea de segundo grado. Haciendo el cambio $y = vx$, $dy = v\, dx + x\, dv$ obtenemos $2x \cdot vx(v\, dx + x\, dv) = (x^2 - v^2x^2)\, dx$ o sea $\dfrac{2v\, dv}{1 - 3v^2} = \dfrac{dx}{x}$.

Luego $-\frac{1}{3} \ln |1 - 3v^2| = \ln |x| + \ln c$, $\quad \ln |1 - 3v^2| + 3 \ln |x| + \ln C' = 0 \quad$ ó $\quad C' |x^3(1 - 3v^2)| = 1$.

Ahora bien $\pm C'x^3(1 - 3v^2) = Cx^3(1 - 3v^2) = 1$ y, haciendo $v = y/x$, $C(x^3 - 3xy^2) = 1$.

8. Resolver $x \operatorname{sen} \dfrac{y}{x} (y\, dx + x\, dy) + y \cos \dfrac{y}{x} (x\, dy - y\, dx) = 0$.

La ecuación es homogénea de segundo grado. Haciendo el cambio $y = vx$, $dy = v\, dx + x\, dv$ obtenemos

$$x \operatorname{sen} v (vx\, dx + x^2\, dv + vx\, dx) + vx \cos v (x^2\, dv + vx\, dx - vx\, dx) = 0$$

$$\operatorname{sen} v (2v\, dx + x\, dv) + xv \cos v\, dv = 0, \qquad \frac{\operatorname{sen} v + v \cos v}{v \operatorname{sen} v}\, dv + 2\frac{dx}{x} = 0$$

Luego $\ln |v \operatorname{sen} v| + 2 \ln |x| = \ln C'$, $\quad x^2 \cdot v \cdot \operatorname{sen} v = C$, $\quad$ y $\quad xy \operatorname{sen} y/x = C$.

9. Resolver $(x^2 - 2y^2)\, dy + 2xy\, dx = 0$.

La ecuación es homogénea de segundo grado. Haciendo el cambio de variable correspondiente, obtenemos

$$(1 - 2v^2)(v\, dx + x\, dv) + 2v\, dx = 0, \qquad \frac{1 - 2v^2}{v(3 - 2v^2)}\, dv + \frac{dx}{x} = 0, \qquad \frac{dv}{3v} - \frac{4v\, dv}{3(3 - 2v^2)} + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\tfrac{1}{3} \ln |v| + \tfrac{1}{3} \ln |3 - 2v^2| + \ln |x| = \ln c, \qquad \ln |v| + \ln |3 - 2v^2| + 3 \ln |x| = \ln C'$$

Luego $vx^3(3 - 2v^2) = C$ y $y(3x^2 - 2y^2) = C$.

10. Resolver $(x^2 + y)\, dx + (y^3 + x)\, dy = 0$.

Integrando $x^2\, dx + (y\, dx + x\, dy) + y^3\, dy = 0$ término a término, obtenemos $\dfrac{x^3}{3} + xy + \dfrac{y^4}{4} = C$.

11. Resolver $(x + e^{-x} \operatorname{sen} y)\, dx - (y + e^{-x} \cos y)\, dy = 0$.

Integrando $x\, dx - y\, dy - (e^{-x} \cos y\, dy - e^{-x} \operatorname{sen} y\, dx) = 0$, término a término, obtenemos

$$\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}y^2 - e^{-x} \operatorname{sen} y = C$$

12. Resolver $x\, dy - y\, dx = 2x^3\, dx$.

La expresión $x\, dy - y\, dx$ nos lleva a $d\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{x\, dy - y\, dx}{x^2}$. Luego, multiplicando la ecuación dada por $\xi(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$\dfrac{x\, dy - y\, dx}{x^2} = 2x\, dx$ y $\dfrac{y}{x} = x^2 + C$ o $y = x^3 + Cx$.

13. Resolver $x\, dy + y\, dx = 2x^2y\, dx$.

La expresión $x\, dy + y\, dx$ nos lleva a $d(\ln xy) = \dfrac{x\, dy + y\, dx}{xy}$. Luego, multiplicando la ecuación dada por $\xi(x, y) = \dfrac{1}{xy}$, $\dfrac{x\, dy + y\, dx}{xy} = 2x\, dx$ y $\ln |xy| = x^2 + C$.

14. Resolver $x\, dy + (3y - e^x)\, dx = 0$.

Multiplicando la ecuación por $\xi(x) = x^2$ obtenemos $x^3\, dy + 3x^2y\, dx = x^2e^x\, dx$.

Luego, $x^3y = \displaystyle\int x^2e^x\, dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$.

15. Resolver $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2}{x}y = 6x^3$.

Aquí $P(x) = \dfrac{2}{x}$, $\displaystyle\int P(x)\,dx = \ln x^2$, y $\xi(x) = e^{\ln x^2} = x^2$.

Multiplicando la ecuación dada por $\xi(x) = x^2$ obtenemos $x^2\,dy + 2xy\,dx = 6x^5\,dx$. Luego, $x^2y = x^6 + C$.

Nota 1. Después de multiplicar por el factor integrante, los términos del primer miembro de la ecuación que resulta forman una *combinación integrable*.

Nota 2. El factor integrante de una ecuación dada no es único. En este problema, x^2, $3x^2$, $\frac{1}{2}x^2$, etc., son todos ellos factores integrantes. Es decir, hemos utilizado la integral particular más sencilla de $P(x)\,dx$ en lugar de la integral general $\ln x^2 + \ln C = Cx^2$.

16. Resolver $\operatorname{tag} x\,\dfrac{dy}{dx} + y = \sec x$.

Tendremos $\dfrac{dy}{dx} + y\cot x = \csc x$, $\displaystyle\int P(x)\,dx = \int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x|$ y $\xi(x) = e^{\ln|\operatorname{sen} x|} = |\operatorname{sen} x|$.

Luego $\operatorname{sen} x\left(\dfrac{dy}{dx} + y\cot x\right) = \operatorname{sen} x \csc x$, $\operatorname{sen} x\,dy + y\cos x\,dx = dx$, y $y\operatorname{sen} x = x + C$.

17. Resolver $\dfrac{dy}{dx} - xy = x$.

Aquí $P(x) = -x$, $\displaystyle\int P(x)\,dx = -\tfrac{1}{2}x^2$, y $\xi(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Luego, $e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dy - xye^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = xe^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$, $ye^{-\frac{1}{2}x^2} = -e^{-\frac{1}{2}x^2} + C$, e $y = Ce^{\frac{1}{2}x^2} - 1$.

18. Resolver $\dfrac{dy}{dx} + y = xy^2$.

La ecuación es de la forma $\dfrac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ con $n = 2$.

Haciendo el cambio $y^{1-n} = y^{-1} = z$, $y^{-2}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{dz}{dx}$. (Es conveniente escribir la ecuación en la forma $y^{-2}\dfrac{dy}{dx} + y^{-1} = x$.) Luego, $-\dfrac{dz}{dx} + z = x$ o $\dfrac{dz}{dx} - z = -x$.

El factor integrante es $\xi(x) = e^{\int P\,dx} = e^{-\int dx} = e^{-x}$. Por tanto, $e^{-x}dz - ze^{-x}dx = -xe^{-x}dx$ y $ze^{-x} = xe^{-x} + e^{-x} + C$. Finalmente, como $z = y^{-1}$, $\dfrac{1}{y} = x + 1 + Ce^x$.

19. Resolver $\dfrac{dy}{dx} + y\operatorname{tag} x = y^3\sec x$.

Ponemos la ecuación en la forma $y^{-3}\dfrac{dy}{dx} + y^{-2}\operatorname{tag} x = \sec x$.

Haciendo el cambio $y^{-2} = z$, $y^{-3}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{dz}{dx}$ obtenemos $\dfrac{dz}{dx} - 2z\operatorname{tag} x = -2\sec x$.

El factor integrante es $\xi(x) = e^{-2\int \operatorname{tag} x\,dx} = \cos^2 x$. Luego, $\cos^2 x\,dz - 2z\cos x\operatorname{sen} x\,dx = -2\cos x\,dx$, $z\cos^2 x = -2\operatorname{sen} x + C$, y $\dfrac{\cos^2 x}{y^2} = -2\operatorname{sen} x + C$.

20. Se dispara una bala contra una masa de arena. Suponiendo que la resistencia sea igual a la raíz cuadrada de la velocidad de la bala, calcular el tiempo que tardará en detenerse totalmente si su velocidad, al penetrar en la arena, es de 49 metros por segundo.

Sea v la velocidad de la bala t segundos después de haberse introducido en la arena.

La retardación será $= -\dfrac{dv}{dt} = \sqrt{v}$ o $\dfrac{dv}{\sqrt{v}} = -dt$ y $2\sqrt{v} = -t + C$.

Para $t = 0$, $v = 49$ y $c = 2\sqrt{49} = 14$. Por tanto, $2\sqrt{v} = -t + 14$ es la ecuación del movimiento de la bala. Para $v = 0$, $t = 14$; es decir, la bala se detiene a los 14 segundos de incidir en la arena.

21. Un depósito contiene 500 litros de salmuera siendo la cantidad de sal en solución igual a 100 kilogramos. Se introduce en el depósito una corriente de agua que contiene 100 gramos de sal por litro a una velocidad de 15 litros por minuto. La mezcla se mantiene uniforme mediante una agitación adecuada y se la extrae del depósito a la misma velocidad anterior. Hallar la cantidad de sal que contendrá el depósito al cabo de 90 minutos.

Sea q (kilogramos) la sal que hay en el depósito al cabo de t minutos, y $\frac{dq}{dt}$ la velocidad de variación de dicha cantidad con el tiempo t.

En cada minuto llegan al depósito 1,5 kg de sal, y salen de él $0{,}03q$ kg. Por tanto, $\frac{dq}{dt} = 1{,}5 - 0{,}03q$, $\frac{dq}{1{,}5 - 0{,}03q} = dt$, $\frac{\ln(0{,}03q - 1{,}5)}{0{,}03} = -t + C$.

Para $t = 0$, $q = 100$ y $C = \frac{\ln 1{,}5}{0{,}03}$; por consiguiente, $\ln(0{,}03q - 1{,}5) = -0{,}03t + \ln 1{,}5$, $0{,}02q - 1 = e^{-0{,}03t}$ y $q = 50 + 50e^{-0{,}03t}$. Para $t = 90$, $q = 50 + 50e^{-2{,}7} = 53{,}35$ kg.

22. Bajo ciertas condiciones, el azúcar en agua se transforma en dextrosa a una velocidad proporcional, en cada instante, a la cantidad de azúcar sin transformar. Sabiendo que para $t = 0$ la cantidad de azúcar es de 75 gramos, y que al cabo de 30 minutos se han transformado 8 gramos, hallar la cantidad transformada al cabo de una hora y media.

Sea q la cantidad transformada en t minutos.

Tendremos $\frac{dq}{dt} = k(75 - q)$, $\frac{dq}{75 - q} = k\,dt$, y $\ln(75 - q) = -kt + C$.

Para $t = 0$, $q = 0$ y $C = \ln 75$; por tanto, $\ln(75 - q) = -kt + \ln 75$.

Para $t = 30$, $q = 8$, $30k = \ln 75 - \ln 67$, y $k = 0{,}0038$. Es decir, $q = 75(1 - e^{-0{,}0038t})$.

Para $t = 90$, $q = 75(1 - e^{-0{,}034}) = 21{,}6$ gramos.

Problemas propuestos

23. Hallar la ecuación diferencial cuya solución general es:

(*a*) $y = Cx^2 + 1$ (*b*) $y = C^2x + C$ (*c*) $y = Cx^2 + C^2$ (*d*) $xy = x^3 - C$ (*e*) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2$ (*f*) $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$ (*g*) $y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$ (*h*) $y = C_1e^x \cos(3x + C_2)$

Sol. (*a*) $xy' = 2(y - 1)$ (*b*) $y' = (y - xy')^2$ (*c*) $4x^2y = 2x^3y' + (y')^2$ (*d*) $xy' + y = 3x^2$ (*e*) $y''' = 0$ (*f*) $y'' - 3y' + 2y = 0$ (*g*) $y'' + y = 0$ (*h*) $y'' - 2y' + 10y = 0$

24. Resolver:

(*a*) $y\,dy - 4x\,dx = 0$ *Sol.* $y^2 = 4x^2 + C$

(*b*) $y^2\,dy - 3x^5\,dx = 0$ *Sol.* $2y^3 = 3x^6 + C$

(*c*) $x^3y' = y^2(x - 4)$ *Sol.* $x^2 - xy + 2y = Cx^2y$

(*d*) $(x - 2y)\,dy + (y + 4x)\,dx = 0$ *Sol.* $xy - y^2 + 2x^2 = C$

(*e*) $(2y^2 + 1)y' = 3x^2y$ *Sol.* $y^2 + \ln|y| = x^3 + C$

(*f*) $xy'(2y - 1) = y(1 - x)$ *Sol.* $\ln|xy| = x + 2y + C$

(*g*) $(x^2 + y^2)\,dx = 2xy\,dy$ *Sol.* $x^2 - y^2 = Cx$

(*h*) $(x + y)\,dy = (x - y)\,dx$ *Sol.* $x^2 - 2xy - y^2 = C$

(*i*) $x(x + y)\,dy - y^2\,dx = 0$ *Sol.* $y = Ce^{-y/x}$

(*j*) $x\,dy - y\,dx + xe^{-y/x}\,dx = 0$ *Sol.* $e^{y/x} + \ln|Cx| = 0$

(*k*) $dy = (3y + e^{2x})\,dx$ *Sol.* $y = (Ce^x - 1)e^{2x}$

(*l*) $x^2y^2\,dy = (1 - xy^3)\,dx$ *Sol.* $2x^3y^3 = 3x^2 + C$

25. La tangente y la normal a una curva en un punto $P(x, y)$, cortan al eje x en T y N, y al eje y en S y M, respectivamente. Hallar la familia de curvas que satisfacen la condición:

(*a*) $TP = PS$ (*b*) $NM = MP$ (*c*) $TP = OP$ (*d*) $NP = OP$.

Sol. (*a*) $xy = C$ (*b*) $2x^2 + y^2 = C$ (*c*) $xy = C$, $y = Cx$ (*d*) $x^2 \pm y^2 = C$

26. Resolver el Problema 21 suponiendo que al depósito llega agua pura a razón de 15 litros por minuto y que la mezcla sale a la misma velocidad. *Sol.* 6,7 kg.

27. Resolver el Problema 26 suponiendo que la mezcla sale a razón de 20 litros por minuto.

Ind. $dq = -\frac{4q}{100 - t}dt$ *Sol.* 0,01 kp

Capítulo 70

Ecuaciones diferenciales de segundo orden

LOS TIPOS DE ECUACIONES diferenciales de segundo orden que vamos a considerar son:

(*1*) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ (Ver Problema 1.)

(*2*) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \dfrac{dy}{dx}\right)$ (Ver Problemas 2-3.)

(*3*) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(y)$ (Ver Problemas 4-5.)

(*4*) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + P\dfrac{dy}{dx} + Qy = R$, siendo P y Q constantes y R una constante o una función de x solamente. (Ver Problemas 6-11.)

Si la ecuación característica $m^2 + Pm + Q = 0$ tiene dos raíces *distintas*, m_1 y m_2, la solución general de $\dfrac{d^2y}{dx^2} + P\dfrac{dy}{dx} + Qy = 0$ es $y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}$. Si las dos raíces son iguales, $m_1 = m_2 = m$, la solución general es $C_1e^{mx} + C_2xe^{mx}$.

La solución general de $\dfrac{d^2y}{dx^2} + P\dfrac{dy}{dx} + Qy = 0$ (ecuación homogénea) recibe el nombre de *función complementaria* de la ecuación $\dfrac{d^2y}{dx^2} + P\dfrac{dy}{dx} + Qy = R(x)$. Si $f(x)$ satisface a esta última ecuación (solución particular), la solución general es $y =$ función complementaria $+ f(x)$.

Problemas resueltos

1. Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} = xe^x + \cos x$.

Tenemos $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = xe^x + \cos x$, $\dfrac{dy}{dx} = \int (xe^x + \cos x)\,dx = xe^x - e^x + \operatorname{sen} x + C_1$, e $y = xe^x\ 2e^x - \cos x + C_1x + C_2$

2. Resolver $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} = a$.

Hacemos $p = \dfrac{dy}{dx}$; entonces $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx}$ y la ecuación dada toma la forma $x^2\dfrac{dp}{dx} + xp = a$ o $x\,dp + p\,dx = \dfrac{a}{x}dx$.

Luego, $xp = a \ln |x| + C_1$, $x\dfrac{dy}{dx} = a \ln |x| + C_1$, $dy = a \ln |x| \dfrac{dx}{x} + C_1\dfrac{dx}{x}$ e $y = \frac{1}{2}a \ln^2 |x| + C_1 \ln |x| + C_2$.

3. Resolver $xy'' + y' + x = 0$.

Hacemos $p = \dfrac{dy}{dx}$. Con lo cual $\dfrac{d^2y}{dp^2} = \dfrac{dp}{dx}$ y la ecuación dada toma la forma

$$x\frac{dp}{dx} + p + x = 0 \text{ o } x\,dp + p\,dx = -x\,dx$$

Luego, $xp = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{C_1}{x}$ e $y = -\frac{1}{4}x^2 + C_1 \ln |x| + C_2$.

4. Resolver $\frac{d^2y}{dx^2} - 2y = 0$.

Como $\frac{d}{dx}(y'^2) = 2y'y''$, multiplicando la ecuación dada por $2y'$ obtenemos

$$2y'y'' = 4yy', \qquad y'^2 = 4\int yy'\,dx = 4\int y\,dy = 2y^2 + C_1$$

Luego, $\frac{dy}{dx} = \sqrt{2y^2 + C_1}$, $\frac{dy}{\sqrt{2y^2 + C_1}} = dx$, $\ln|\sqrt{2}\,y + \sqrt{2y^2 + C_1}| = \sqrt{2}\,x + \ln C_2'$
y

$$\sqrt{2}\,y + \sqrt{2y^2 + C_1} = C_2 e^{\sqrt{2}x}$$

5. Resolver $y'' = -\frac{1}{y^3}$

Multiplicando por $2y'$ obtenemos $2y'y'' = -\frac{2y'}{y^3}$. Luego,

$$(y')^2 = \frac{1}{y^2} + C_1, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 + C_1 y^2}}{y}, \qquad \frac{y\,dy}{\sqrt{1 + C_1 y^2}} = dx, \qquad \sqrt{1 + C_1 y^2} = C_1 x + C_2$$

y

$$(C_1 x + C_2)^2 - C_1 y^2 = 1$$

6. Resolver $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = 0$.

Tendremos $m^2 + 3m - 4 = 0$ y $m = 1, -4$. La solución general es $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$.

7. Resolver $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = 0$.

Tenemos $m^2 + 3m = 0$ y $m = 0, -3$. La solución general es $y = C_1 + C_2 e^{-3x}$.

8. Resolver $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 13y = 0$.

Aquí $m^2 - 4m + 13 = 0$ y las raíces son $m_1 = 2 + 3i$ y $m_2 = 2 - 3i$. La solución general es

$$y = C_1 e^{(2+3i)x} + C_2 e^{(2-3i)x} = e^{2x}(C_1 e^{3ix} + C_2 e^{-3ix})$$

Como $e^{iax} = \cos ax + i \operatorname{sen} ax$, tendremos $e^{3ix} = \cos 3x + i \operatorname{sen} 3x$, $e^{-3ix} = \cos 3x, - i \operatorname{sen} 3x$, y la solución se puede dar en la forma

$$\begin{aligned} y &= e^{2x}\{C_1(\cos 3x + i \operatorname{sen} 3x) + C_2(\cos 3x - i \operatorname{sen} 3x)\} \\ &= e^{2x}\{(C_1 + C_2)\cos 3x + i(C_1 - C_2)\operatorname{sen} 3x\} \\ &= e^{2x}(A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x) \end{aligned}$$

9. Resolver $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

Tenemos $m^2 - 4m + 4 = 0$ y $m = 2, 2$. La solución general es $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$.

10. Resolver $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = 0$.

Según el Problema 6, la función complementaria es $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$.

Para encontrar una solución particular de la ecuación obsérvese que el segundo miembro es $R(x) = x^2$. Esto nos sugiere que la integral particular ha de contener un término en x^2, y, quizá, otros términos obtenidos por derivación sucesiva. Suponiendo que es de la forma $y = Ax^2 + Bx + C$, en donde A, B y C son constantes a determinar.

Sustituyendo $y = Ax^2 + Bx + C$, $y' = 2Ax + B$, $y'' = 2A$, en la ecuación diferencial obtenemos

$$2A + 3(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2, \qquad -4Ax^2 + (6A - 4B)x + (2A + 3B - 4C) = x^2$$

Como esto es una identidad en x, $-4A = 1$, $6A - 4B = 0$, $2A + 3B - 4C = 0$.

Luego $A = -\frac{1}{4}$, $B = -\frac{3}{8}$, $C = -\frac{13}{32}$, e $y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}$ es una integral particular.

Por tanto, la solución general es $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}$.

11. Hallar la solución de la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = \cos x$.

En este caso, la ecuación característica es $m^2 - 2m - 3 = 0$ y sus soluciones, $m = -1, 3$; la función complementaria es $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$. El segundo miembro de la ecuación diferencial nos hace pensar que una integral particular sea de la forma $A \cos x + B \operatorname{sen} x$.

Sustituyendo $y = A\cos x + B \operatorname{sen} x$, $y' = B\cos x - A \operatorname{sen} x$, $y'' = -A\cos x - B\operatorname{sen} x$, en la ecuación diferencial, obtenemos

$$(-A\cos x - B\operatorname{sen} x) - 2(B\cos x - A\operatorname{sen} x) - 3(A\cos x + B\operatorname{sen} x) = \cos x$$
$$-2(2A + B)\cos x + 2(A - 2B)\operatorname{sen} x = \cos x$$

Luego $-2(2A + B) = 1$, $A - 2B = 0$, y $A = -\frac{1}{5}$, $B = -{}^1/_{10}$.

La solución general es $C_1e^{-x} + C_2e^{3x} - \frac{1}{5}\cos x - {}^1/_{10}\operatorname{sen} x = y$.

12. La ecuación del movimiento de vibración de un cuerpo unido a un resorte es $\frac{d^2s}{dt^2} + 16s = 0$, siendo la elongación del muelle en el instante t. Si para $t = 0$, $s = 2$ y $\frac{ds}{dt} = 1$, hallar s en función de t.

Tenemos $m^2 + 16 = 0$, $m = \pm 4i$, y la solución general es $s = A\cos 4t + B\operatorname{sen} 4t$.

Para $t = 0$, $s = 2 = A$, por tanto $s = 2\cos 4t + B\operatorname{sen} 4t$.

Para $t = 0$, $ds/dt = 1 = -8\operatorname{sen} 4t + 4B\cos 4t = 4B$ y $B = \frac{1}{4}$.

Luego, la ecuación es $s = 2\cos 4t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4t$.

13. La intensidad de corriente en cierto circuito eléctrico viene dada por $\frac{d^2I}{dt^2} + 4\frac{dI}{dt} + 2504I = 110$. Si para $t = 0$, es $I = 0$ y $\frac{dI}{dt} = 0$, hallar I en función de t.

$m^2 + 4m + 2504 = 0$; $m = -2 + 50i$, $-2 - 50i$; la función complementaria es $e^{-2t}(A\cos 50t + B\operatorname{sen} 50t)$.

La integral particular es $I = 110/2504 = 0{,}044$.

Por tanto, la solución general es $I = e^{-2t}(A\cos 50t + B\operatorname{sen} 50t) + 0{,}044$.

Para $t = 0$, $I = 0 = A + 0{,}044$; luego $A = -0{,}044$.

Para $t = 0$, $\frac{dI}{dt} = 0 = e^{-2t}[(-2A + 50B)\cos 50t - (2B + 50A)\operatorname{sen} 50t] = -2A + 50B$.

De donde $B = -0{,}0018$ y la relación pedida es $I = -e^{-2t}(0{,}044\cos 50t + 0{,}0018\operatorname{sen} 50t) + 0{,}044$.

14. Una cadena de 4 metros de longitud comienza a deslizar por una superficie, sin rozamiento, en el momento en que pende verticalmente un tramo de 1 metro de longitud. Hallar (*a*) su velocidad cuando abandona la superficie el último trozo de cadena y (*b*) el tiempo que tarda en abandonar la superficie.

Sea s la longitud de cadena que cuelga en el instante t.

(*a*) La fuerza F que obliga a deslizar a la cadena es el peso de la parte que cuelga.

Fuerza = masa × aceleración = $ms'' = \frac{1}{4}mgs$ o $s'' = \frac{1}{4}gs$.

$2s's'' = \frac{1}{2}gss'$ y $(s')^2 = \frac{1}{4}gs^2 + C_1$.

Para $t = 0$, $s = 1$ y $s' = 0$. Luego $C_1 = -\frac{1}{4}g$ y $s' = \frac{1}{2}\sqrt{g}\cdot\sqrt{s^2 - 1}$.

Para $s = 4$, $s' = \frac{1}{2}\sqrt{15g}$ m/seg.

(*b*) $\frac{ds}{\sqrt{s^2 - 1}} = \frac{1}{2}\sqrt{g}\,dt$ y $\ln|s + \sqrt{s^2 - 1}| = \frac{1}{2}\sqrt{g}\,t + C_2$.

Para $t = 0$, $s = 1$. Luego $C_2 = 0$ y $\ln(s + \sqrt{s^2 - 1}) = \frac{1}{2}\sqrt{g}\,t$.

Para $s = 4$, $t = \frac{2}{\sqrt{g}}\ln(4 + \sqrt{15})$ sec.

15. Una motora de 245 kilogramos de masa lleva una velocidad de 20 metros por segundo cuando se desconecta el motor (en el instante $t = 0$). La resistencia del agua es proporcional a su velocidad y vale 100 kilopondios en $t = 0$. Hallar el espacio recorrido hasta que la velocidad sea de 5 metros por segundo.

Sea s el espacio recorrido por la motora al cabo de t segundos.

$$ms'' = -Ks' \quad \text{o} \quad s'' = -ks'$$

Para determinar k: Para $t = 0$, $s' = 20$, $s'' = \dfrac{\text{fuerza}}{\text{masa}} = -\dfrac{100g}{245} = -4$ y $k = \dfrac{1}{5}$.

$s'' = \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{v}{5}$, $\ln v = -\dfrac{1}{5}t + C_1$, y $v = C_1 e^{-t/5}$.

Para $t = 0$, $v = 20$. Luego $C_1 = 20$, $v = \dfrac{ds}{dt} = 20e^{-t/5}$ y $s = -100e^{-t/5} + C_2$.

Para $t = 0$, $s = 0$. Luego $C_2 = 100$ y $s = 100(1 - e^{-t/5})$.

Para $v = 5 = 20e^{-t/5}$, $s = 100(1 - \frac{1}{4}) = 75$ m.

Problemas propuestos

Resolver:

16. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 3x + 2$ *Sol.* $y = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + C_1x + C_2$

17. $e^{2x}\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4(e^{4x} + 1)$ *Sol.* $y = e^{2x} + e^{-2x} + C_1x + C_2$

18. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -9 \operatorname{sen} 3x$ *Sol.* $y = \operatorname{sen} 3x + C_1x + C_2$

19. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 4x = 0$ *Sol.* $y = x^2 + C_1x^4 + C_2$

20. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = 2x - x^2$ *Sol.* $y = x^3/3 + C_1e^x + C_2$

21. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = 8x^3$ *Sol.* $y = x^4 + C_1x^2 + C_2$

22. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ *Sol.* $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$

23. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$ *Sol.* $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$

24. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = 0$ *Sol.* $y = C_1 + C_2e^x$

25. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ *Sol.* $y = C_1xe^x + C_2e^x$

26. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$ *Sol.* $y = C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x$

27. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$ *Sol.* $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x)$

28. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$ *Sol.* $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$

29. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 3y = 6x + 23$ *Sol.* $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + 2x + 5$

30. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = e^{3x}$ *Sol.* $y = C_1 \operatorname{sen} 2x + C_2 \cos 2x + e^{3x}/13$

31. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = x + e^{2x}$ *Sol.* $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + e^{2x} + \dfrac{x}{9} + \dfrac{2}{27}$

32. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = \cos 2x - 2 \operatorname{sen} 2x$ *Sol.* $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{2}{5} \operatorname{sen} 2x$

33. Una partícula de masa m, en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la velocidad, está sometida a una fuerza atractiva proporcional al desplazamiento. Hallar la ecuación del movimiento si para $t = 0$, $s = 0$ y $s' = v_0$.

Ind. Aquí $m\dfrac{d^2s}{dt^2} = -k_1\dfrac{ds}{dt} - k_2s$ o sea $\dfrac{d^2s}{dt^2} + 2b\dfrac{ds}{dt} + c^2s = 0$, $b > 0$.

Sol. Si $b^2 = c^2$, $s = v_0te^{-bt}$.

Si $b^2 < c^2$, $s = \dfrac{v_0}{\sqrt{c^2 - b^2}}e^{-bt} \operatorname{sen} \sqrt{c^2 - b^2}\, t$.

Si $b^2 > c^2$, $s = \dfrac{v_0}{2\sqrt{b^2 - c^2}}\left(e^{(-b+\sqrt{b^2-c^2})t} - e^{(-b-\sqrt{b^2-c^2})t}\right)$.

INDICE

LIBROS SERIE SCHAUM PUBLICADOS EN ESPAÑOL

ALGEBRA ELEMENTAL
2700 Problemas Resueltos
Por Barnett Rich, Ph.D.,
Jefe del Depto. de Matemáticas, Brooklyn Tech. H. S.

ALGEBRA LINEAL
600 Problemas Resueltos
Por Seymour Lipschutz, Ph. D.,
Profesor Asociado de Matemáticas, Temple University

ALGEBRA MODERNA
425 Problemas Resueltos
Por Frank Ayres, Jr., Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Dickinson College

ALGEBRA SUPERIOR
1940 Problemas Resueltos
Por Murray R. Spiegel, Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Rensselaer Polytech. Inst.

ANALISIS NUMERICO
775 Problemas Resueltos
Por Francis Scheid, Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Boston University

ANALISIS VECTORIAL
480 Problemas Resueltos
Por Murray R. Spiegel, Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Rensselaer Polytech. Inst.

CALCULO DIFERENCIAL
1175 Problemas Resueltos
Por Frank Ayres, Jr., Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Dickinson College

CALCULO SUPERIOR
925 Problemas Resueltos
Por Murray R. Spiegel, Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Rensselaer Polytech. Inst.

CIRCUITOS ELECTRICOS
350 Problemas Resueltos
Por Joseph A. Edminister, M.S.E.E.,
Profesor Asociado de Ingenieria Electromecánica, University of Akron

CIRCUITOS ELECTRONICOS
160 Problemas Resueltos
Por Edwin C. Lowenberg, Ph.D.,
Profesor de Ingenieria Eléctrica, University of Nebraska

DINAMICA DE LAGRANGE
275 Problemas Resueltos
Por D. A. Wells, Ph.D.,
Profesor de Física, University of Cincinnati

DINAMICA DE LOS FLUIDOS
100 Problemas Resueltos
Por William F. Hughes, Ph.D.,
Profesor de Ingenieria Mecánica, Pennsylvania State U.

DISEÑO DE MAQUINAS
320 Problemas Resueltos
Por Hall, Holowenko, Laughlin
Profesores de Ingenieria Mecánica, Purdue University

CIENCIAS DE LA INGENIERIA
1400 Ecuaciones Básicas
Por W. F. Hughes, E. W. Gaylord, Ph.D.,
Profesores de Ing. Mec., Carnegie Inst. of Tech.

ECUACIONES DIFERENCIALES
560 Problemas Resueltos
Por Frank Ayres, Jr. Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Dickinson College

ESTADISTICA
875 Problemas Resueltos
Por Murray R. Spiegel, Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Rensselaer Polytech. Inst.

FISICA GENERAL
625 Problemas Resueltos
Por Carel W. van der Merwe, Ph.D.,
Profesor de Fisica, New York University

FUNDAMENTOS DE MATEMATICAS SUPERIORES
1850 Problemas Resueltos
Por Frank Ayres, Jr., Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Dickinson College

GENETICA
500 Problemas Resueltos
Por William D. Stansfield, Ph.D.,
Depto. de Ciencias Biológicas, Calif. State Polytech.

GEOMETRIA ANALITICA
345 Problemas Resueltos
Por Joseph H. Kindle, Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, University of Cincinnati

GEOMETRIA DESCRIPTIVA
175 Problemas Resueltos
Por Minor C. Hawk
Jefe Departamento de Ingeniería Gráfica, Carnegie Inst. of Tech.

GEOMETRIA DIFERENCIAL
500 Problemas Resueltos
Por Martin Lipschutz, Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, University of Bridgeport

GEOMETRIA PLANA
850 Problemas Resueltos
Por Barnett Rich, Ph.D.,
Jefe del Depto. de Matematicas, Brooklyn Tech. H. S.

GEOMETRIA PROYECTIVA
200 Problemas Resueltos
Por Frank Ayres, Jr., Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Dickinson College

INTRODUCCION A LA CIENCIA DE LAS COMPUTADORAS
300 Problemas Resueltos
Por Francis Scheid, Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Boston University

LINEAS DE TRASMISION
165 Problemas Resueltos
Por R. A. Chipman, Ph.D.,
Profesor de Ingenieria Eléctrica, University of Toledo

MANUAL DE FORMULAS Y TABLAS MATEMATICAS
2400 Fórmulas y 60 Tablas
Por Murray R. Spiegel, Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Rensselaer Polytech. Inst.

MATEMATICAS FINANCIERAS
500 Problemas Resueltos
Por Frank Ayres, Jr., Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Dickinson College

MATEMATICAS FINITAS
750 Problemas Resueltos
Por Seymour Lipschutz, Ph.D.,
Profesor Asoc. de Matemáticas, Temple University

MATRICES
340 Problemas Resueltos
Por Frank Ayres, Jr., Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Dickinson College

MECANICA DE LOS FLUIDOS E HIDRAULICA
475 Problemas Resueltos
Por Ranald V. Giles, B. S., M.S. in C.E.,
Profesor de Ingeniería Civil, Drexel Inst. of Tech.

MECANICA TECNICA
460 Problemas Resueltos
Por W.E. McLean, B.S. in E.E., M.S.,
Profesor de Mecánica, Lafayette College
y E.W. Nelson, B.S. in M.E., M. Adm. E.,
Ingeniero Supervisor, Western Electric Co.

PROBABILIDAD
500 Problemas Resueltos
Por Seymour Lipschutz, Ph.D.,
Profesor Asociado de Matemáticas, Temple University

QUIMICA GENERAL
385 Problemas Resueltos
Por Jerome L. Rosenberg, Ph.D.,
Profesor de Química, University of Pittsburgh

RESISTENCIA DE MATERIALES
430 Problemas Resueltos
Por William A. Nash, Ph.D.,
Profesor de Ingeniería Mecánica, University of Florida

RETROALIMENTACION Y SISTEMAS DE CONTROL
680 Problemas Resueltos
Por J.J. Distefano III, A.R. Stubberud, I.J. Williams, Ph.D.,
Departamento de Ingeniería, University of Calif., at L. A.

TEORIA DE CONJUNTOS
530 Problemas Resueltos
Por Seymour Lipschutz, Ph. D.
Profesor Asociado de Matemáticas, Temple University

TEORIA DE GRUPOS
600 Problemas Resueltos
Por B. Baumslag, B. Chandler, Ph.D.,
Departamento de Matemáticas, New York University

TOPOLOGIA GENERAL
650 Problemas Resueltos
Por Seymour Lipschutz, Ph.D.,
Profesor Asociado de Matemáticas, Temple University

TRASFORMADAS DE LAPLACE
450 Problemas Resueltos
Por Murray R. Spiegel, Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Rensselaer Polytech. Inst.

TRIGONOMETRIA
680 Problemas Resueltos
Por Frank Ayres, Jr., Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Dickinson College

VARIABLE COMPLEJA
640 Problemas Resueltos
Por Murray R. Spiegel, Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Rensselaer Polytech. Inst.

VIBRACIONES MECANICAS
225 Problemas Resueltos
Por William W. Seto, B.S. in M.E., M.S.,
Profesor Asociado de Ingenieria Mecánica, San José State College